Empl
Get HR

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat11pari

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

RÉDIGÉE PAR MM.

E. HUMBERT
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

ET

G. PAPELIER
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ORLÉANS

AVEC LA COLLABORATION DE MM.

N. CHARRUIT,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE DE LYON

E. DESSENON,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

P. LAMAIRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU COLLÈGE CHAPTAL

CH. RIVIÈRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE AU LYCÉE SAINT-LOUIS

H. VUIBERT,
RÉDACTEUR DU *Journal de Mathématiques élémentaires.*

TOME SIXIÈME

ANNÉES 1900-1901 & 1901-1902

11 & 12

291729/9 33
30

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

QA
1
R486
année 11-
12

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

11e Année. N° 1. Octobre 1900.

PREMIÈRE PARTIE

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE PONCELET SUR LES POLYGONES INSCRITS DANS UNE CONIQUE ET CIRCONSCRITS A UNE AUTRE

par M. **E. Cahen**, professeur de Mathématiques spéciales au Collège Rollin.

Dans le n° 9 de l'année 1900 de ce journal, M. Fontené considère deux points d'une conique V, dont les paramètres t et t' sont liés par une relation *doublement quadratique* et *symétrique*

$$(1) \qquad At^2t'^2 + Btt'(t+t') + C(t^2+t'^2) + Dtt' + E(t+t') + F = 0.$$

La droite qui joint ces deux points enveloppe une conique V *et, réciproquement.*

Si la droite qui joint deux points d'une conique V *est tangente à une conique* U, *les paramètres de ces deux points sont liés par une relation de la forme précédente.*

Bien entendu, les énoncés corrélatifs sont vrais.

Comme application, M. Fontené indique le *lieu du troisième sommet d'un triangle circonscrit à une conique* U *et dont les deux autres sommets décrivent une conique* S et l'enveloppe corrélative.

Ceci peut se généraliser :

Soient deux coniques V *et* U. *Un polygone de* p *côtés est inscrit dans* V *et* $p-1$ *de ses côtés sont tangents à* U. *Quelle est l'enveloppe du* p^e *côté ?* (Sur la figure $p = 5$).

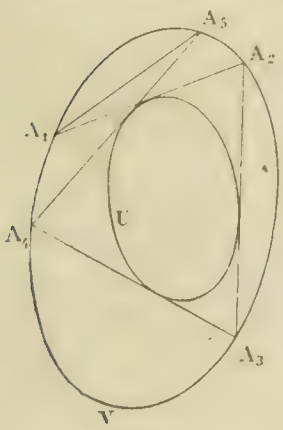


Fig. 1.

Or, il y a entre les paramètres des points A_1 et A_p sur la conique V, une relation qui est évidemment *algébrique* et *symétrique*. D'autre part, cette relation est du second degré. En effet, si l'on se donne A_1 il y a deux positions possibles pour A_2, mais si l'on choisit l'une de ces positions il y a une position déterminée pour A_3 puis une pour A_4 et ainsi de suite. Donc si l'on se donne A_1, il y a deux positions possibles pour A_p. La relation *algébrique, symétrique* entre les paramètres de A_1 et de A_p, est donc, de plus, du second degré. Donc A_1A_p *enveloppe une conique.*

Corrélativement : *Un polygone de* p *côtés étant circonscrit à une conique et* $p-1$ *de ses sommets étant sur une autre, le lieu du* p^e *sommet est une conique.*

Pour arriver au théorème de Poncelet, cherchons s'il existe un polygone de p côtés inscrit dans V et circonscrit à U. Or, si d'un point A_1 de U, on déduit, au moyen de p tangentes consécutives, un point A_{p+1}, il y a entre les paramètres de A_1 et de A_{p+1}, une relation

$$A^{(p)}t^2t'^2 + B^{(p)}tt'(t+t') + C^{(p)}(t^2+t'^2) + D^{(p)}tt' + E^{(p)}(t+t') + F^{(p)} = 0,$$

$A^{(p)}$, $B^{(p)}$, ... $F^{(p)}$ étant des coefficients qui dépendent de p.

Pour que le point A_1 soit sommet d'un polygone cherché, il faut et il suffit qu'il coïncide avec A_{p+1}.

On obtient donc son t, en faisant $t' = t$ dans l'équation précédente, ce qui donne

$$(2) \qquad A^{(p+1)}t^4 + 2B^{(p+1)}t^3 + 2C^{(p+1)} + D^{(p+1)}t^2 + 2E^{(p+1)}t + F^{(p+1)} = 0.$$

Cette équation est du quatrième degré : on trouve donc quatre positions pour le point A_1.

Mais il faut remarquer qu'il y a, quel que soit p, quatre positions du point A_1 dont les paramètres doivent satisfaire à l'équation (2), sans que ces points donnent de vrais polygones répondant à la question. Ce sont les *quatre points de contact avec* V, *des tangentes communes à* U *et* V.

Si on considère un tel point A_1 (voir la figure 2 où les tangentes communes à U et V sont réelles), il est évident qu'il coïncide avec les points A_2, A_3, ... A_{p+1}, ...

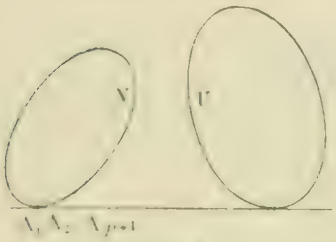


Fig. 2

Donc l'équation (2) doit donner ces quatre solutions singulières, et comme elle est du quatrième degré, elle n'en donne, en général, pas d'autres.

Donc, en général, *il n'y a pas de vrai polygone de p côtés inscrit dans* V *et circonscrit à* U.

Mais on voit que s'il y en a un, l'équation (2) ayant plus de quatre racines est une identité. *Donc s'il y a un de ces polygones il y en a une infinité.* C'est le théorème de Poncelet.

On peut choisir arbitrairement un sommet du polygone sur V.

Corrélativement, on peut choisir arbitrairement un côté du polygone tangent à U (*).

Voici quelques remarques que suggère la méthode précédente.

Considérons un polygone de p côtés inscrit dans V et circonscrit à U : si partant d'un sommet, on joint les sommets de q en q, jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ, on forme un polygone de $\frac{p}{d}$ côtés (d étant le plus grand commun diviseur de p et q).

Or, entre les paramètres de deux sommets dont les rangs diffèrent de q, existe une relation doublement quadratique et symétrique, qui est la même, quelle que soit la position de ces sommets. Donc le polygone obtenu est circonscrit à une conique $U^{(q)}$, et cette conique reste la même si le polygone primitif varie en restant inscrit dans V et circonscrit à U. Au système de deux coniques U et V, correspondent ainsi p coniques

$$U^{(1)}, \qquad U^{(2)}, \ldots \qquad U^{(p)},$$

(dont la première est V, et la dernière U).

Sur ces p coniques, il y en a $\varphi(p)$ qui correspondent à des polygones de p côtés ; et plus généralement $\varphi\left(\frac{p}{d}\right)$ qui correspondent à des polygones de $\frac{p}{d}$ côtés.

(*) La démonstration précédente ne prouve pas qu'il existe effectivement des polygones de Poncelet. Il est clair qu'il en existe pour $p \leqslant 5$, car si l'on circonscrit un pentagone, par exemple, à une conique U, on peut faire passer une conique V par les cinq sommets de ce pentagone. Mais pour $p > 5$, ce raisonnement ne s'applique pas. On peut se borner à un exemple. Soit la parabole V, $x = t$, $y = t^2$ et la parabole U dont l'équation est $x(1 - \cos\varphi) - 2y = 0$.

On trouve facilement que la relation qui doit exister entre les paramètres t et t' de deux points A_1, A_2 de V pour que la droite A_1A_2 soit tangente à U est

$$t^2 + t'^2 - 2tt'\cos\varphi = 0.$$

Quant à la relation entre les paramètres t et $t^{(p)}$ de A_1 et de A_{p+1}, on voit (de proche en proche) que c'est

$$t^2 + t'^2 - 2tt'\cos p\varphi = 0.$$

L'équation (2) se réduit donc ici à $\qquad 2(1 - \cos p\varphi)t^2 = 0.$

Elle est une identité lorsque $\qquad \cos p\varphi = 1, \qquad$ ou $\qquad \varphi = \frac{2k\pi}{p}$

Pour ces valeurs de φ, il existe des polygones de p côtés inscrits dans V et circonscrits à U.

En particulier, si p est pair, en faisant $q = \frac{p}{2}$, on est amené à joindre deux sommets opposés du polygone. Pour ces deux sommets la relation quadratique se réduit à une relation du premier degré symétrique, c'est-à-dire à une involution (car à un sommet du polygone ne correspond qu'un sommet opposé). Donc

Quand un polygone d'un nombre pair de côtés est inscrit dans une conique et circonscrit à une autre, les diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent en un même point qui est fixe quand le polygone varie.

Dans les cas de l'hexagone, ce point est le point de Brianchon.

Tous ces théorèmes ont d'ailleurs leurs corrélatifs.

Par exemple, dans les polygones précédents, les points de rencontre des côtés opposés sont tous sur une même droite fixe. Dans le cas de l'hexagone, c'est la droite de Pascal.

ALGÈBRE

904. — *Étant donnée une équation du quatrième degré* $f(x) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4b'x + a' = 0$, *trouver les conditions qui doivent être remplies pour que l'équation* $f(y+h) = 0$ *soit réciproque pour trois valeurs de* h.

Dans ce cas, trouver les valeurs de h *et les racines de l'équation* $f(x) = 0$.

Si dans l'équation proposée, on effectue la substitution indiquée $x = y + h$, cette équation devient

$$ay^4 + 4(ah + b)y^3 + 6(ah^2 + 2bh + c)y^2 + 4(ah^3 + 3bh^2 + 3ch + b')y + ah^4 + 4bh^3 + 6ch^2 + 4b'h + a' = 0$$

En écrivant que cette équation est une équation réciproque ordinaire, nous avons les deux relations

$$ah^4 + 4bh^3 + 6ch^2 + 4b'h + a' = a,$$

$$ah^3 + 3bh^2 + (3c - a)h + b' - b = 0$$

qui doivent être vérifiées simultanément pour trois valeurs de h. Or, en multipliant la seconde par h et retranchant le résultat ainsi obtenu de la première, celle-ci s'abaisse au troisième degré et devient

$$bh^3 + (3c + a)h^2 + (3b' + b)h + a' - a = 0,$$

et nous avons alors à exprimer que les deux équations du troisième degré en h ont trois racines communes, par suite, qu'elles ont leurs coefficients proportionnels. Cela nous donne les relations

$$\frac{b}{a} = \frac{3c - a}{3b} = \frac{3b' + b}{3c + a} = \frac{a' - a}{b' - b}.$$

Posons alors $\frac{b}{a} = k$; nous aurons $\frac{3c}{a} = 3k^2 - 1$, $\frac{3b' + b}{a} = k(3k^2 - 2)$, d'où $\frac{b'}{a} = k(k^2 - 1)$,

et enfin $$\frac{a' - a}{a} = k^2(k^2 - 2) \quad \text{et} \quad \frac{a'}{a} = (k^2 - 1)^2.$$

L'équation du quatrième degré est donc

$$x^4 + 4kx^3 + 2(3k^2 - 1)x^2 + 4k(k^2 - 1)x + (k^2 - 1)^2 = 0;$$

elle peut s'écrire $(x + k)^4 - 2(x + k)^2 + 1 = 0$ ou $(x + k^2 - 1)^2 = 0$.

Elle a deux racines doubles qui sont $1 - k$ et $-1 - k$.

Quant à l'équation qui donne h, elle devient $$h^3 + 3kh^2 + (3k^2 - 2)h + k(k^2 - 2) = 0,$$
ou $$(h + k)^3 - 2(h + k) = 0;$$
elle admet les trois racines $h = -k$ et $h = -k \pm \sqrt{2}$.

Voyons maintenant si le problème peut avoir d'autres solutions. Il faudra pour cela que l'équation en y puisse être réciproque de seconde espèce, c'est-à-dire que le terme du milieu puisse être nul, les coefficients des autres termes étant deux à deux égaux et de signes contraires, ou que l'on ait simultanément :
$$ah^4 - 4bh^3 + 6ch^2 + 4b'h + a' + a = 0,$$
$$ah^3 - 3bh^2 + (3c + a)h + b' + b = 0, \qquad ah^2 + 2bh + c = 0.$$

La dernière équation permet d'abaisser successivement les deux autres au troisième et au second degré ; cette nouvelle équation permet enfin d'abaisser la première à son tour au second degré et l'on est finalement conduit à trois équations du second degré en h
$$(c - 2a)h^2 + 2(b' - b)h + a' + a = 0,$$
$$bh^2 + (2c - a)h + b' - b = 0, \qquad ah^2 + 2bh + c = 0.$$

Ces trois équations peuvent au plus avoir deux racines communes ; pour qu'elles les aient effectivement, il faut qu'elles aient deux à deux leurs coefficients proportionnels. En posant $\frac{b}{a} = k$, le calcul se fait facilement ; il ne présente aucune impossibilité et donne $\frac{b}{a} = k$, $\frac{c}{a} = k^2 - \frac{1}{2}$, $\frac{b'}{a} = k\left(k^2 - \frac{3}{2}\right)$, $\frac{a'}{a} = k^4 - 3k^2 + \frac{1}{4}$.

L'équation du quatrième degré en x est alors $$(x + k)^4 - 3(x + k)^2 + \frac{1}{4} = 0,$$
et l'équation qui donne h, $$(h + k)^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Le problème, tel qu'il est posé, n'est cependant pas possible, car l'équation devant être réciproque pour une autre valeur de h, il faut qu'elle soit encore réciproque de première espèce pour une valeur de h autre que celles-ci, c'est-à-dire que les équations
$$ah^4 + 4bh^3 + 6ch^2 + 4b'h + a' - a = 0, \qquad ah^3 + 3bh^2 + (3c - a)h + b' - b = 0,$$
aient une racine commune ; actuellement, elles se réduisent à
$$(h + k)^4 - 3(h + k)^2 - \frac{3}{4} = 0, \qquad (h + k)^3 - \frac{5}{2}(h + k) = 0,$$
et n'ont aucune racine commune.

Il reste à voir maintenant si l'équation $f(y + h) = 0$ peut être réciproque de première espèce pour deux valeurs de h, et de seconde espèce pour une autre valeur de h.

Pour traiter cette question, nous partirons de l'équation en y, supposée réciproque de seconde espèce,
$$y^4 + 4\alpha y^3 - 4\alpha y - 1 = 0,$$
nous y changerons y en $x - \beta$ et nous aurons une équation en x,
$$x^4 - 4(x - \beta)x^3 - 6\beta(x - \beta)^2 - 2\alpha(x - \beta)^3 - 4\beta(x - \beta)^3 + 3\alpha(x - \beta)^2 + 4\alpha(x - \beta)^2 + 4\alpha\beta - 1 = 0,$$
qui est réciproque de seconde espèce pour une valeur de h, $h = \beta$; pour qu'elle soit réciproque de première espèce pour deux valeurs de h, il faut que les deux équations en h signalées dès le début aient deux racines communes : or, ici, ces équations sont
$$(h - \beta)^4 + 4\alpha(h - \beta)^3 - 4\alpha(h - \beta) - 2 = 0, \qquad (h - \beta)^3 + 3\alpha(h - \beta)^2 - (h - \beta) - 2\alpha = 0,$$
ou en posant $h - \beta = u$,
$$u^4 + 4\alpha u^3 - 4\alpha u - 2 = 0, \qquad u^3 + 3\alpha u^2 - u - 2\alpha = 0;$$

en multipliant la seconde par u et retranchant de la première, nous obtenons

$$\alpha u^4 + u^2 - 2\alpha u - 2 = 0,$$

équation qui se décompose en $u^2 - 2 = 0$ et $\alpha u + 1 = 0$. Pour que le problème fût possible, il faudrait que deux de ces valeurs de u annulassent la seconde équation en u ; or il est facile de voir que les hypothèses $u = \sqrt{2}$, $u = -\sqrt{2}$ et $u = -\frac{1}{\alpha}$, portées successivement dans cette équation donnent des valeurs distinctes de α. Le problème n'a donc pas de solution de ce genre.

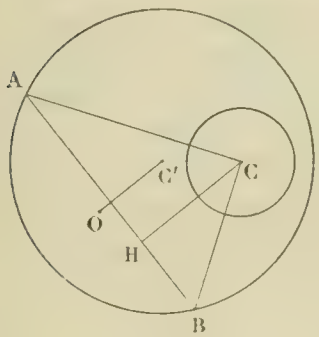
F. PÉGORIER, à Toulouse.

GÉOMÉTRIE

886. — *On considère deux cercles* C, C′ *et une corde variable* AB *du cercle* C′ *qui soit vue du centre du cercle* C *sous un angle droit.*

Trouver le lieu du centre du cercle passant par A *et* B *et orthogonal au cercle* C.

Appelons O le centre du cercle variable, H le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur AB ; soient R le rayon du cercle C et P la puissance du point C par rapport au cercle C′. On sait que AB enveloppe une conique de foyers C et C′ ; d'où il résulte que le point H décrit un cercle.



D'autre part, la différence des puissances d'un point C par rapport aux deux cercles C′ et O est égale au double produit de la distance des centres C′O par la distance du point C à l'axe radical AB. Donc

$$2.\mathrm{CH} \cdot \mathrm{CO} = \mathrm{P} - \mathrm{R}^2 - \mathrm{C'^2}.$$

Comme le point H décrit un cercle, le lieu du point O qui en dérive par translation et inversion est aussi un cercle.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

913. — *La différence des carrés des segments interceptés sur deux diamètres conjugués d'une hyperbole équilatère par tout cercle ayant son centre sur l'hyperbole est constante.*

Rapportons l'hyperbole équilatère à ses deux asymptotes et choisissons les directions positives des axes de façon que l'équation de cette courbe soit $xy = k^2$. Deux diamètres conjugués de cette conique auront pour équation $y = mx$ et $y = -mx$.

Cela posé, rappelons que le carré du demi-segment intercepté par un cercle de rayon ρ sur une droite située à une distance δ du centre est $\rho^2 - \delta^2$, et le carré du segment, $4(\rho^2 - \delta^2)$. Si nous appelons alors (x, y) le point de l'hyperbole qui est le centre du cercle considéré, ρ le rayon de ce cercle, les carrés des deux segments interceptés sur les deux diamètres seront

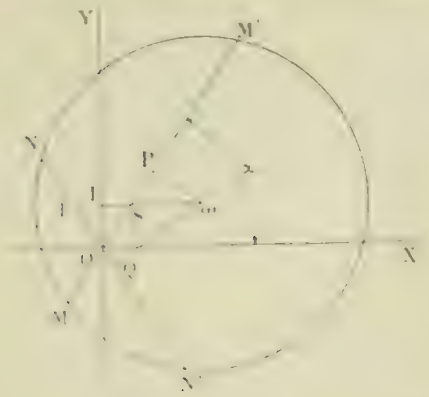
$$4\rho^2 - 4\frac{(y - mx)^2}{1 + m^2} \quad \text{et} \quad 4\rho^2 - 4\frac{(y + mx)^2}{1 + m^2};$$

leur différence est donc $4\dfrac{(y + mx)^2 - (y - mx)^2}{1 + m^2}$ ou $\dfrac{16mxy}{1 + m^2}$. Cette quantité est constante et égale à $\dfrac{16k^2m}{1 + m^2}$. On peut représenter géométriquement de bien des manières cette quantité à l'aide de cercles particuliers.

E.-N. BARISIEN.

Bonnes solutions : MM. F. Pégorier, à Toulouse ; Balaban.

Solution géométrique. — Soient OX, OY les asymptotes de l'hyperbole équilatère, MM', NN' les segments interceptés par un cercle ω sur deux diamètres conjugués, qui sont comme on sait également inclinés sur OX. P et Q étant les pieds des perpendiculaires abaissées du centre ω du cercle sur les cordes, on a $\frac{\overline{MM'}^2}{4} = R^2 - \overline{\omega P}^2$,



d'où

$$\overline{MM'}^2 - \overline{NN'}^2 = 4(\overline{\omega Q}^2 - \overline{\omega P}^2) = 4(\overline{\omega T}^2 - \overline{\omega S}^2)\sin^2\alpha = 16\,\omega I.SI.\sin^2\alpha\,;$$

et comme

$$SI = OI\cot g\,\alpha, \qquad \overline{MM'}^2 - \overline{NN'}^2 = 8\,\omega I.OI.\sin 2\alpha.$$

Or quand le point ω se déplace sur l'hyperbole, le produit $\omega I.OI$ est constant. La proposition est donc démontrée.

VASNIER.

PHYSIQUE

919. *Un pendule est constitué par une tige de masse négligeable mobile autour d'un axe horizontal et à laquelle sont fixées deux boules de volumes respectifs v et v', de masses spécifiques ϖ et ϖ', à des distances b et b' de l'axe. Les dimensions des boules sont négligeables vis-à-vis des distances b et b'. Le tout est plongé dans un liquide de masse spécifique δ. Discuter la durée d'oscillation du pendule en supposant que la boule v soit vide, que ϖ soit supérieur à ϖ' et que l'action du liquide se réduise à la poussée d'Archimède.*

Étant donnée la formule du pendule $t = \pi\sqrt{\frac{I}{Mga}}$, il suffit de discuter la quantité sous le radical.

I est le moment d'inertie : $I = v\varpi b^2 + v'\varpi' b'^2$.

Mga représente le moment statique des forces qui agissent sur le pendule :

$$Mga = v\varpi - \delta b - v'\varpi' - \delta b' q.$$

On en déduit pour la longueur du pendule

$$l = \frac{I}{Ma} = \frac{v\varpi b^2 + v'\varpi' b'^2}{v\varpi - \delta b + v'\varpi' - \delta b'}$$

1° Supposons v plus petit que v' et que ϖ. Si b, d'abord très grand, diminue, la longueur du pendule diminue. Cherchons s'il y a un minimum en égalant la dérivée à 0, ce qui donne

$$(1) \qquad \left(\frac{b'}{b}\right)^2 - 2\frac{v\varpi - \delta b}{v'\varpi' - \delta b'}\frac{b'}{b} - \frac{v}{v'}\frac{\varpi}{\varpi'} = 0$$

Cette équation admet une racine positive comprise entre 0 et 1 ; la longueur du pendule passe donc par un minimum pour une valeur de b' inférieure à b.

Pour $b' = 0$, $\qquad l = \frac{\varpi}{\varpi - \delta}b.$

Si b' prend des valeurs négatives, c'est-à-dire si la boule mobile passe au-dessus de l'axe, l continue de croître et devient infini pour

$$\frac{b}{b'} = \frac{v\varpi - \delta b}{v'\varpi' - \delta b'}.$$

Au delà de cette valeur, le pendule se renverse ; la seconde racine de l'équation (1) est située au delà de 1 et n'a pas, par conséquent, de signification physique.

2° Supposons $\varpi > \delta > \varpi'$. Le pendule n'est stable que pour des valeurs de b' inférieures à

$$\frac{v}{v'} \cdot \frac{\varpi - \delta}{\delta - \varpi'} b.$$

Si b' diminue à partir de cette valeur, l diminue, passe par un minimum pour une certaine valeur négative de b', puis augmente indéfiniment. La différence entre ce résultat et le précédent se conçoit *a priori*, car la présence de la boule mobile donne lieu à une force dirigée de bas en haut, tandis qu'elle produisait, dans le cas précédent, une force dirigée de haut en bas.

3° Supposons δ supérieur à ϖ. Le pendule n'est stable que pour des valeurs de b' négatives et supérieures en valeur absolue à

$$\frac{v}{v'} \cdot \frac{\delta - \varpi}{\delta - \varpi'} b.$$

Si la boule s'éloigne indéfiniment à partir de cette position, l diminue, passe par un minimum puis augmente indéfiniment.

En résumé, la longueur et, par suite, la durée d'oscillation du pendule passent dans les trois cas par un minimum. Cette longueur devient infinie soit pour une position de la boule mobile qui place sur l'axe de suspension le centre des forces qui agissent sur le pendule, soit pour une position infiniment éloignée qui rend infini le moment d'inertie.

(Dans la solution qu'il a envoyée, M. G. Fontaine a fait intervenir à tort la masse spécifique du milieu ambiant dans l'expression du moment d'inertie.)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1900).

I. — Mathématiques élémentaires.

1885. — Le produit de p nombres entiers consécutifs est divisible par le produit des p premiers nombres.

1886. — Trouver p nombres entiers consécutifs qui ne soient pas premiers.

1887. — Démontrer que la moyenne arithmétique de n nombres positifs est plus grande que leur moyenne harmonique.

1888. — La somme des trois fractions $\frac{a^3}{3}$, $\frac{a^2}{2}$, $\frac{a}{6}$ est entière.

1889. — Si n est entier $n^5 - 5n^3 + 4n$ est divisible par 120.

1890. — Si a est un entier premier avec 5 et impair, le produit $(a^2 - 1)(a^2 - 9)(a^2 - 49)$ est divisible par 23 040.

1891. — Déterminer un nombre de deux chiffres égal au double du produit de ses chiffres.

1892. — Trouver trois nombres consécutifs dont la somme soit égale au produit.

1893. — Décomposer le nombre 100 en quatre parties a, b, c, d telles que $a + b = b + c = c + \frac{d}{4}$.

1894. — Si d'un point du cercle circonscrit à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les trois pieds sont en ligne droite.

1895. — Inscrire un carré dans un triangle équilatéral.

1896. — Étant donné un quadrilatère ABCD, mener par le sommet A une droite divisant le quadrilatère en deux parties équivalentes.

1897. — Partager un quadrilatère en deux parties équivalentes par une droite parallèle à une direction donnée.

1898. — Les milieux des côtés d'un quadrilatère gauche sont dans un même plan.

1899. — Volume du prismatoïde.

1900. — Étant donnés une sphère et un cône circonscrit, évaluer le volume de la portion du cône limitée à son sommet et au plan de contact. Déterminer le sommet du cône de façon que ce volume soit égal au volume de la sphère.

II. — Algèbre.

1901. — Calculer l'expression $\Sigma(n-h)+\Sigma h(h-1)$, n étant donné et h variant de 1 à $n-1$.

1902. — Démontrer les formules

$$C_{2n+1}^{n+1} = C_{2n}^{n} + C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-2}^{n-2} + \ldots + C_{n+1}^{1},$$

$$C_{2n+1}^{n+1} = C_{2n}^{n} + C_{2n}^{n-1} + C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-2}^{n-2} + \ldots + C_{n+1}^{1}.$$

1903. — Décomposer $(x+y+z)^n - (x+y-z)^n - (x-y+z)^n + (x-y-z)^n$ en un produit de facteurs linéaires.

1904. — Calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

1905. — Si dans un déterminant un élément est égal à zéro, combien le déterminant a-t-il de termes ? et si deux éléments sont nuls.

1906. — On égale à zéro tous les mineurs du premier ordre d'un déterminant à n^2 éléments ; combien cela fait-il d'équations distinctes ?

1907. — Étudier les séries qui ont pour termes généraux :

$$\frac{1}{2n+1}, \quad \frac{1}{n(\mathrm{L}n)^p}, \quad \frac{1}{n^2(\mathrm{L}n)^5}, \quad \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}, \quad \frac{\cos nx}{n^2}, \quad (-1)^n \operatorname{tg}\frac{x}{n},$$

$$(-1)^n \sin\frac{x}{n}, \quad \frac{\sin n}{n}, \quad \frac{\sin nx}{n}, \quad \frac{1}{r^n-1}.$$

1908. — Étudier la série

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$$

1909. — Calculer à $\frac{1}{1000}$ près la somme de la série qui a pour terme général $\frac{1}{n}$.

1910. — Déterminer une fonction $\varphi(x)$ vérifiant l'égalité

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y).$$

1911. — Dérivées des fonctions

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{1-ax}, \quad \operatorname{arc\,sin}(3x-4x^3), \quad \ldots \quad (u \text{ et } v, \text{ fonctions de } x),$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x-a}{1+x^2}, \quad \operatorname{arc\,sin}(x\sqrt{\ldots}), \quad \ldots \cos 3(x^2 \ldots).$$

1912. — Dérivées de $\mathrm{L}(\cos x + i\sin x)$. En déduire les formules $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

1913. — Dérivées des fonctions

$$\mathrm{C}(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{S}(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{T}(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}},$$

et des fonctions inverses. Comparer avec les dérivées de $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$. Démontrer la formule

$$\mathrm{C}(x) + \mathrm{S}(x) = \mathrm{C}(nx) + \mathrm{S}(nx).$$

1914. — Dérivée de $\mathrm{L}x$ par rapport à x^x.

1915. — Limites de $\left|\begin{matrix} a & b \\ 2 & \end{matrix}\right|$ pour a infini, de $\frac{x-\sin x}{x+\cos x}$ pour x infini.

1916. — Dans un cercle on inscrit un polygone régulier de n côtés. Sur chaque côté on construit un triangle équilatéral. M étant le sommet extérieur à la circonférence d'un de ces triangles, calculer OM. Limite du produit des longueurs OM [illegible]

1917. — Calculer $\sin 1^\circ$ à $\frac{1}{10^{\ldots}}$ près. Calculer $\sin 1 + \sin 2$.

1918. — Calculer $\ldots$ à $\frac{1}{10^{\ldots}}$ près $\sqrt{\ldots}$.

1919. — Développer en série $\sin x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$.

1920. — Condition pour que $Ae^{ax} + Be^{bx} + Ce^{cx}$ soit nul quel que soit x.

1921. — [illegible] des fonctions $\ldots + a_0 \ldots$ a désignant un polynome de degré n, $c^{\ldots}$. Étudier les racines des polynomes figurant dans ces dérivées.

1922. — [illegible]

$$\ldots, \quad \sin\ldots, \quad \frac{x^{\ldots}-1}{x-1}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad x\mathrm{L}x, \quad x^{\frac{1}{x}}.$$

$$\frac{2x^3-6x+1}{x^2-1},\quad \frac{x\mathrm{L}x}{x-1},\quad \frac{ax^4+bx^2+cx+d}{x^2+px+q},\quad x^{\frac{1}{x}},\quad \cos\sqrt{x},\quad x+\frac{x-1}{x+1},$$

$$\frac{\operatorname{tg}x}{x},\quad e^{x^2+px+q},\quad a^x-x,\quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad (1+x)^{\frac{1}{x}},\quad \frac{1}{x^2-5x+6},\quad \mathrm{L}\operatorname{tg}x,$$

$$\cos^m x+\sin^m x,\quad \mathrm{L}\sin x,\quad \mathrm{L}\frac{3x^2+p}{x^3+px+q},\quad \frac{1-x^2}{\cos x},\quad x\sin x,\quad \frac{a^x}{x},\quad (\operatorname{tg}x)^{\cos x}.$$

1923. — On donne une demi-circonférence de diamètre AB. D'un point C de la courbe on abaisse CD perpendiculaire sur AB. Variation de AD + CD.

1924. — D'un point M d'une demi-circonférence de diamètre AB, on abaisse MM′ perpendiculaire sur la tangente en B. Étudier les variations de AM + MM′.

1925. — Variations du rapport des distances de deux points fixes à un point mobile sur une droite.

1926. — Calculer $\sqrt[3]{-i}$, $\sqrt[3]{1+i}$.

1927. — Toute imaginaire de module 1 peut se mettre sous la forme $\frac{1+iz}{1-iz}$. Déterminer la valeur de z pour une imaginaire donnée.

1928. — Démontrer que le nombre des racines réelles d'une équation $f(x)=0$ comprises entre a et b est inférieur ou égal au nombre des variations de l'équation $f\left(\frac{a+by}{1+y}\right)=0$ et que la différence est paire.

1929. — Ecrire que dans l'équation $x^3+px+q=0$ une des racines est égale au carré d'une autre.

1930. — On considère une équation du sixième degré dont les racines $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ vérifient les relations

$$\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2=\gamma_1+\gamma_2,\qquad \alpha_1\alpha_2=\beta_1\beta_2=\gamma_1\gamma_2;$$

résoudre l'équation et étudier les relations entre les coefficients.

1931. — Calculer le résultant entre un polynome et sa dérivée.

1932. — Etant donnée l'équation $x^3+px+q=0$, calculer la fonction symétrique $\Sigma\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}{x_1x_2}$.

1933. — Soient $a, b, c, \ldots l$ les racines d'une équation algébrique $f(x)=0$. Former l'équation qui admet pour racines $a+\frac{1}{a}$, $b+\frac{1}{b}$, ... $l+\frac{1}{l}$. Application à l'équation $x^3+px+q=0$.

1934. — Etant donnés un polynome $f(x)$ et l'équation $x^m-1=0$ qui a pour racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, calculer les fonctions symétriques $f(\alpha_1)f\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)+f(\alpha_2)f\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)+\ldots+f(\alpha_m)f\left(\frac{1}{\alpha_m}\right)$, et $f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\ldots+f(\alpha_m)$.

1935. — Calculer la fonction $\Sigma\frac{1}{(x-a)(x-b)}$, $a, b, c \ldots l$ étant les racines de l'équation $f(x)=0$.

1936. — Eliminer x et y entre les équations

$$x+\frac{1}{x}=a,\qquad y+\frac{1}{y}=b,\qquad xy+\frac{1}{xy}=c.$$

1937. — Séparer les racines des équations

$$e^x=ax+b,\qquad ax-\mathrm{L}x=0,\qquad \frac{\sin x}{\cos^2 x}-\mathrm{L}\frac{1+\sin x}{\cos x}-1=0,\qquad \mathrm{L}\operatorname{tg}x-2x=0,$$

$$a\sin x+b\cos x+cx+d=0,\qquad ax+b-\mathrm{L}(px+q)=0,\qquad x+\sin x\cos x-0{,}6=0,$$

$$ax+b-\cos x=0,\qquad \mathrm{L}x=\frac{1}{x}.$$

1938. — Discuter la réalité des racines des équations

$$x^5+px^3+qx^2+r=0,\qquad x^n+px^3+qx+r=0,\qquad 1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=0,\qquad x^n+\frac{p}{x}+q=0,$$

$$x^3+\lambda x^2+\mu x^2-1=0,\qquad x^2+\lambda x+\lambda=0.$$

1939. — Résoudre les équations

$$x^6+x^5-4x^4+x^2+1=0,\qquad x^3+2x-2ax^2+x^2-2ax+a^2=0,$$

$$(x^2+x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0\quad \text{(vérifier que } i \text{ est racine)}.$$

1940. — Si $f(x)=0$ a toutes ses racines réelles et distinctes, l'équation $f(x)f''(x)-f'(x)^2=0$ a toutes ses racines imaginaires.

1941. — Etant donnés l'aire et le rayon d'un segment circulaire, calculer la corde de ce segment.

1942. — Etablir le théorème de Descartes en démontrant que s'il est vrai pour une équation de degré n il est vrai pour une équation de degré $n+1$.

1943. — Résoudre une équation du cinquième degré dont les racines sont en proportion arithmétique.

1944. — Si une équation $f(x)=0$ admet toutes ses racines réelles et distinctes, il en est de même de l'équation $f(x)+af'(x)=0$.

1945. — Condition pour que les équations $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, $x^3+3px^2+qx+r=0$ n'aient que deux racines distinctes.

1946. — Déterminer λ et μ dans l'équation $x^4 + 4x^3 - 12\lambda x + 4\mu = 0$, sachant que λ et μ sont rationnels et que l'équation a une racine double de la forme $\alpha + \beta\sqrt{3}$.

1947. — Résoudre l'équation du quatrième degré $f(x) = 0$ sachant que $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$ ont une racine commune.

1948. — On donne une équation algébrique $f(x) = 0$ et une racine a qui annule également $f'(x)$. Relation entre cette racine et les autres racines de $f(x)$. Appliquer à l'équation du troisième degré.

1949. — Démontrer que l'équation $(x+b)^3 - (x-a)^3 = 0$ a toutes ses racines réelles.

1950. — Si pour une racine α de $f(x)$, on a $f(\alpha)f''(\alpha) > 0$, l'équation $f(x) = 0$ a au moins deux racines imaginaires.

1951. — Déterminer un polynome qui pour les valeurs 1 et 2 de x prenne les valeurs 1 et 2, et tel que sa dérivée prenne les valeurs 1 et 1.

III. — Trigonométrie.

1952. — Etant donné $\sin a$, combien y a-t-il de valeurs pour $\cos 7a$?

1953. — Calculer $\cos\frac{a}{3}$, $\cos\frac{a}{4}$, $\cos 7a$, en fonction de $\operatorname{tg} a$.

1954. — Etablir géométriquement la formule $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$.

1955. — Combien y a-t-il de valeurs de $\sin ma$ quand on donne $\operatorname{tg} a$.

1956. — Calculer $\sin\frac{2}{3}a$ connaissant $\operatorname{tg} 3a$.

1957. — Calculer les fonctions circulaires de l'arc de 12°.

1958. — Calculer $\operatorname{tg} 3a$ connaissant $\sin\frac{a}{5}$, $\sin\frac{a}{3}$, $\operatorname{tg} 2a$.

1959. — On sait que $\sin x = 1 - \cos 3x$. Calculer $\cos 2x$.

1960. — Rendre calculable par logarithmes $\cos^2 p - \sin^2 q$.

1961. — Résoudre l'équation $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x = a$.

1962. — Trouver un arc du premier quadrant égal : 1° à la différence de sa sécante et de sa tangente, 2° à la somme de son sinus et de son cosinus.

1963. — Calculer le produit $\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\ldots\sin\frac{(m-1)\pi}{m}$.

1964. — Calculer dans un triangle $\Sigma\left(1 + \frac{r}{r_a}\right)\cos A$, r désignant le rayon du cercle inscrit, et r_a celui du cercle exinscrit dans l'angle A.

1965. — Calculer la valeur de l'expression $\Sigma \operatorname{arc\,sin}\dfrac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$, a, b, c désignant les côtés d'un triangle.

1966. — Soit O le centre du cercle inscrit à un triangle ABC et r son rayon ; trouver la relation qui existe entre r et les longueurs OA, OB, OC.

1967. — Dans un triangle rectangle ABC rectangle en A, on sait que $B = 5C$; calculer le rapport $\frac{a}{h}$ (a hypoténuse, h hauteur issue de l'angle droit).

1968. — Résoudre un triangle connaissant : 1° les trois hauteurs ; 2° le périmètre et les angles (calculer la surface et le rayon du cercle circonscrit).

1969. — Résoudre un triangle rectangle connaissant les longueurs des droites qui divisent l'angle droit en trois parties égales.

IV. — Géométrie analytique à deux dimensions.

1970. — Construire les courbes ayant pour équations en coordonnées rectilignes

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x+1}}, \qquad y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}}, \qquad y = \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{x+1}, \qquad y = \frac{\sqrt{x(x-1)}}{(x-2)^2}.$$

$x^2 + y^2 + 2xy + y = 0$, $x^2 + 2xy + y^2 = 0$, $(x^2 + y^2 + a^2)^2 + 4y^2 = 0$, $y^2 - x^2 = 0$ (tangentes par un point α, β),

$x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x^2 + y^2 - ax = 0$, $x^2 + y^2 - y = 0$, $y^2 + y + x^2 + 5x = 0$, $(x^2 + y^2 + my)^2 = 0$,

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x+1}}, \qquad x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad \text{(points d'inflexion)}, \qquad y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}},$$

$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0$, $y^2 - 2y^2 + x^2 - x - x^3 + 1 = 0$, $y^2 = x^2 - x^3$ (points d'inflexion),

$x^2 + y^2 - x^2 + y^2 = 0$, $x^2y^2 + 2y^2 - x^2 = 0$, $(x^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2y^2 = 0$,

$x^2 + y^2 - xy - x - y - 1 = 0$, $x^2 + xy + x^2 - y^2 + x + y = 0$, $xy^2 + y^2 - x^2 + x = 0$,

$y^2 - 2y^2 + 2x^2 + 1 = 0$, $y = \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 1}{x+1}} - \sqrt{x^2 + 1}$, $y = 2x + \sqrt{\frac{x(x-1)^2}{x+2}}$, $x^2 - 2x^2y + y^2 = 0$,

$(x^2 - y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$, $x^3 + y^3 + y^2 - 3x = 0$, $x^3 - 2xy + y^2 = 0$, $x^2y^2 + xy^2 - x^2 + 1 = 0$, $x^2 = y^3$,

$$\begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{L}t}{1+t-\mathrm{L}t}, \\ y = \dfrac{t-\mathrm{L}t}{1+t-\mathrm{L}t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2t}{1-t^2}, \\ y = \operatorname{tg} t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{L}t - t - 1}{1-t^2}, \\ y = \dfrac{1+t}{1+t^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{t+2}{1-t^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{t+2}{t-1t^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{L}t + t^2 - 1}{t}, \\ y = \dfrac{2t^2+1}{t}. \end{cases}$$

1971. — Construire les courbes qui ont pour équations en coordonnées polaires :

$\rho = \dfrac{a \sin\omega + b\cos\omega}{\sin 2\omega}$, $\dfrac{m}{\rho} = \omega^2 - \alpha^2$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\rho = \dfrac{1}{1 - \operatorname{tg} 2\omega}$, $\rho = \dfrac{\sin\omega}{\omega}$, $\rho = \dfrac{\omega - \pi}{\omega + \dfrac{\pi}{4}}$,

$\rho = \cos\omega + \cos 2\omega$, $\rho = \sin\omega + \dfrac{1}{\sin\omega}$, $\rho = \dfrac{\sin\omega}{\omega - \alpha}$, $\rho = \dfrac{\cos\omega}{\cos 2\omega}$, $\dfrac{m}{\rho} = e^{\omega} + e^{-\omega}$, $\rho^2\cos^3\omega - \rho\cos^2\omega - \sin\omega = 0$,

$\rho = \dfrac{\cos\omega}{1 - \cos 2\omega}$, $\rho = \operatorname{tg}\dfrac{\omega}{3}$, $\rho = a\sqrt{\cos 2\omega}$ (point où la tangente est horizontale), $\dfrac{m}{\rho} = \omega^2 + p\omega + q$, $\rho = \dfrac{\cos 3\omega + \sin 3\omega}{\operatorname{tg}\omega}$, $\rho = \dfrac{\cos\omega - \sin\omega}{(\cos\omega + \sin\omega)}$,

$\rho^2 \sin 2\omega + 2\rho\cos\omega - 1 = 0$, $\rho = \sqrt{\dfrac{\sin\dfrac{\omega}{2}}{1 + \cos\omega}}$, $\rho^2 \operatorname{tg}\omega + \rho\cos\omega - 1 = 0$, $\rho = \dfrac{a}{1 + 2\sin\dfrac{\omega}{2}}$, $\rho = \dfrac{\cos\omega + \sqrt{\cos 2\omega}}{\cos 2\omega}$,

$\rho = \dfrac{a}{b + c\cos\dfrac{\omega}{2}}$, $\rho^2(1 + \cos\omega) - 2\rho\sin 2\omega + 1 = 0$, $\rho^2 \sin 2\omega - 2\rho\cos\omega + 1 = 0$, $\rho = \sqrt{\dfrac{\sin 2\omega}{\cos 3\omega}}$,

$\rho = \dfrac{\sin(\omega - \alpha)}{\operatorname{tg}\omega}$, $\rho^2\cos^3\omega - \rho\cos^2\omega - \sin\omega = 0$, $\rho^2 - 2\rho(1 + \sin\omega) + \cos^2\omega = 0$, $\rho = \operatorname{tg}\dfrac{\omega}{2}$, $\rho^2\cos\omega - \rho\sin\omega + 1 = 0$,

$\rho^2\cos 2\omega + 2\rho\cos\omega - 3 = 0$, $\rho^2 \sin 3\omega - 2\rho\sin\omega - 1 = 0$, $\rho = \operatorname{tg}\dfrac{2\omega}{3}$, $\rho(1 - \cos 3\omega) = a^2$,

$\rho^2\cos 2\omega - 2\rho^2\sin\omega + 1 = 0$, $\rho^2\cos^3\dfrac{\omega}{3} + \rho - 1 = 0$.

$\rho^4 \sin\omega + \rho^2\cos\omega - 1 = 0$, $\rho^m = a^m \cos m\omega$ $\left(m = 1, -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\begin{cases} \rho = \dfrac{2t}{1-t^2}, \\ \sin\omega = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

1972. — Dans un triangle ABC les points B et C sont fixes, lieu du point A si l'on a : 1° $\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C$; 2° $\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}^2 C$; 3° $\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} 3C$; 4° $B + 2C = \pi$; 5° $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = k$.

1973. — Si P et Q sont des fonctions linéaires d'x et d'y que représente l'équation $P^3 + \alpha PQ + \beta Q^2 = 0$?

1974. — Lieu des points d'où l'on voit sous le meme angle deux segments AB et A'B'.

1975. — Dans un triangle ABC les points B et C sont fixes et l'on a $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = k$. Lieu du point de concours des hauteurs.

1976. — Etant donné un triangle ABC, on prend AC pour axe des x, la perpendiculaire à AC menée par le point A pour axe des y. On construit sur AB un triangle ADB directement semblable au triangle ABC, calculer les coordonnées du point D.

1977. — Construire la courbe $\rho = \dfrac{\sin\omega}{\omega}$; couper cette courbe par la droite $\omega = \alpha$. Équation générale des tangentes aux points de rencontre.

1978. — Étant donnée la courbe $y^2 = x^3$, lieu des milieux des cordes parallèles à l'une des bissectrices des axes.

1979. — Construire la courbe représentée par les équations $x = \dfrac{a(t^2-1)}{t^2+1}$, $y = \dfrac{ab(t^2-1)}{t^2+1}$. Prendre un point sur la courbe et voir combien on peut mener de tangentes à la courbe par ce point.

1980. — Mener par l'origine une tangente à la courbe $y = \mathrm{L}x$.

1981. — Former l'équation d'une courbe du quatrième degré qui ait un point double à l'infini et une branche parabolique.

1982. — Équation d'une courbe du quatrième degré ayant trois asymptotes.

1983. — Soient deux droites rectangulaires D et OA, M un point variable de D. On mène la bissectrice de l'angle AOM et on porte sur cette droite une longueur $OP = \sqrt{OM.OA}$. Lieu de P.

1984. — Équation d'une courbe du troisième degré ; 1° admettant deux asymptotes ; 2° n'ayant pas d'asymptote.

1985. — Former l'équation de la courbe telle que les vecteurs joignant un point fixe à l'un quelconque de ses points fassent un angle constant avec la tangente en ce point à la courbe. Développée de cette courbe.

1986. — Soient A, B, C trois points en ligne droite tels que C soit le milieu de AB. Lieu d'un point M tel que l'on ait $\dfrac{2}{\overline{MC}^2} = \dfrac{1}{\overline{AM}^2} + \dfrac{1}{\overline{MB}^2}$.

1987. — On donne un cercle et une tangente fixe; on considère une tangente mobile roulant sur le cercle, on prend le symétrique M du point d'intersection des deux tangentes par rapport au point de contact de la tangente mobile. Lieu du point M.

1988. — On donne la courbe $y = f(x)$, construire $y^2 = f(x)$. Application aux courbes $y = ax + b$, $y = x(x-1)(x-2)$.

1989. — Par le point $x = 0$, $y = 2$, mener une tangente à la courbe $y = \cos x$.

1990. — Étant donnée la courbe $y = f(x)$, construire $y = \frac{1}{f(x)}$. Application : construire les deux courbes $y = \frac{[illegible]}{[illegible]}$, $y = \frac{[illegible]}{x^2 + 4x^2 + 1}$.

1991. — Mener par un point (α, β) des tangentes à la courbe $x^3 - a^2y^2 = 0$. Discussion.

1992. — Points doubles de la courbe $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 - c^2 = 0$.

1993. — Point d'inflexion de la courbe $y = e^x + \sin x$.

1994. — Un cercle mobile est assujetti à toucher deux cercles fixes; trouver le lieu des points de contact des tangentes menées à ce cercle mobile parallèlement à une direction donnée.

1995. — Sur une tangente variable à un cercle on prend MP = arc MA, A étant un point fixe du cercle. Lieu du point P. Tangente au point P.

1996. — On donne deux cercles O et O', on mène une tangente variable à O et l'on demande le lieu du pôle de cette tangente par rapport à O.

1997. — On donne une droite et un point. Par le point on fait passer deux cercles tangents à la droite et se coupant sous un angle donné. Lieu du second point d'intersection.

1998. — On considère la courbe $\rho = f(\omega)$, un point $M(r, \alpha)$ de cette courbe, former l'équation du cercle passant par le pôle, par le point M et tangent (ou orthogonal) à la courbe au point M.

1999. — On donne la courbe $y^2 = x^3 - x$; lieu des milieux des cordes parallèles à Ox. Etudier les points d'intersection du lieu avec la courbe donnée.

2000. — Discuter la conique $y = x = \sqrt{(\beta^2 - 2\alpha)x^2 - 2(\alpha + \beta + 1)x + 2\alpha + 1}$.

2001. — On donne deux coniques qui ont leur axe focal commun et un foyer commun, trouver la condition pour que les deux coniques se coupent orthogonalement. (On prendra le foyer pour pôle et l'axe focal comme axe polaire.)

2002. — Si d'un sommet du grand axe d'une ellipse on abaisse des perpendiculaires sur les normales issues d'un point à l'ellipse les quatre points de rencontre de ces droites et de l'ellipse sont sur un cercle.

2003. — Une parabole de grandeur constante tourne autour de son foyer. On lui mène une tangente parallèle à une direction fixe. Lieu du point de contact. Traiter le problème en coordonnées polaires.

2004. — Etant donnée une hyperbole, montrer que si deux sommets opposés d'un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux asymptotes décrivent l'hyperbole, la diagonale joignant les deux autres sommets passe par le centre.

2005. — Lieu du point de rencontre des normales à une parabole aux extrémités d'une corde qui se déplace parallèlement à elle-même.

2006. — Lieu des sommets des paraboles de grandeur constante tangentes à deux droites rectangulaires.

2007. — Lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans une ellipse.

2008. — On donne une série de cercles concentriques et deux points fixes A et B ; on mène les tangentes à ces cercles par ces deux points. Lieu des points de rencontre des diagonales du quadrilatère de ces tangentes.

2009. — On donne une conique et un point P. Par le point P on mène une sécante Px, et la polaire Oy du point P qui rencontre Px en O. Equation de la conique en prenant comme axes Ox et Oy. On prend un point Q sur Ox, un point S sur Oy, puis par le point Q on mène une sécante QMM'; SM et SM' rencontrent Ox en V et V'. Relation entre les abscisses de V et V'.

2010. — On donne une conique, deux tangentes T et T' et une droite quelconque D. On mène à la conique une tangente variable qui rencontre T, T', D aux points A, B, C ; lieu du conjugué harmonique de C par rapport à A et B.

2011. — Trouver dans une ellipse la normale la plus éloignée du centre.

2012. — Les sommets d'une ellipse décrivant quatre droites données, trouver les lieux du centre et des foyers.

2013. — Equation générale des ellipses ayant pour demi-axes a et b, et dont le centre a pour coordonnées x_0, y_0.

2014. — Lieu du centre et des sommets d'une ellipse de grandeur constante qui est tangente à deux droites fixes.

2015. — Démontrer que le carré de la distance du centre d'une ellipse à une tangente est égale à la somme des carrés des demi-axes multipliés respectivement par le carré du sinus et du cosinus de l'angle de la tangente et du grand axe.

2016. — Lieu du centre d'une ellipse dont chaque directrice passe par un point fixe et dont deux sommets décrivent des droites fixes.

2017. — Lieu des centres des coniques qui passent par trois points fixes et qui sont d'aire constante.

2018. — Lieu des pieds des normales abaissées d'un point fixe sur une ellipse de grandeur constante tournant autour de son centre.

2019. — Dans une hyperbole équilatère on donne un point fixe P et un foyer F ; lieu du deuxième foyer.

2020. — Lieu des projections d'un point sur les normales à une parabole. Cas où le point est le sommet.

2021. — Lieu du foyer d'une parabole tangente à une droite donnée en un point donné et à une seconde droite en un point variable.

2022. — Construire le foyer d'une parabole définie par deux tangentes et leurs points de contact.

2023. — Lieu des foyers des paraboles de grandeur constante qui restent tangentes à deux droites rectangulaires.

2024. — On donne une parabole de foyer F ; un angle droit pivote autour du foyer et rencontre la parabole en deux points. Lieu du point de concours des tangentes en ces deux points.

2025. — Lieu des foyers des coniques inscrites dans un triangle dont la somme des carrés des demi-axes est constante.

2026. — Lieu du centre d'un cercle tangent à une ellipse et à deux tangentes rectangulaires fixes de cette ellipse.

2027. — On considère un cercle C et un point O. Par le point O on mène une sécante OAB ; on demande le lieu des sommets des ellipses qui passent par le point O et qui ont pour foyers les points A et B.

2028. — Lieu du centre d'une ellipse d'aire constante dont trois sommets décrivent des droites.

2029. — Lieu des centres des cercles tangents à un cercle et à une ellipse concentriques donnés.

2030. — Lieu du foyer d'une parabole de grandeur donnée, touchant une ellipse donnée et dont l'axe est parallèle à l'un des axes de l'ellipse.

2031. — Lieu du centre d'une ellipse tangente à trois droites fixes et ayant une distance focale donnée.

2032. — Soit une conique et deux tangentes à cette conique faisant respectivement avec l'axe des x les angles α et 2α. Lieu du point de rencontre de ces deux tangentes, quand α varie.

2033. — Lieu des projections du centre d'une ellipse sur les normales à cette ellipse. Déterminer les pieds des normales abaissées du centre sur ce lieu.

2034. — Lieu du centre d'une hyperbole dont les asymptotes passent par deux points fixes et dont deux sommets décrivent des droites fixes.

2035. — Une parabole de grandeur constante passe par deux points fixes Lieu des points de contact des tangentes parallèles à la droite joignant les deux points fixes.

2036. — Une ellipse de grandeur constante est tangente à deux cercles égaux. Lieu de son centre.

2037. — Foyers et directrices de la conique $xy = k^2$.

2038. — On donne une hyperbole de centre O et un point P. La polaire du point P rencontre l'hyperbole en deux points A et B ; trouver l'équation du cercle OAB et l'équation de la seconde corde commune au cercle et à l'hyperbole.

2039. — Soient une conique et une normale à cette conique faisant avec Ox l'angle φ et une seconde normale faisant avec Ox l'angle 2φ. Lieu du point d'intersection de ces deux droites. Application à la parabole $y^2 - 2px = 0$.

2040. — Lieu des points d'intersection de deux paraboles ayant un foyer commun, une tangente commune et telles que leurs axes fassent entre eux un angle θ.

2041. — Equation générale des coniques normales aux deux axes de coordonnées.

2042. — Lieu des points d'où l'on voit une ellipse sous un angle donné.

2043. — On donne une conique ayant son centre O à l'origine. On joint le point O à un point M de la conique, puis on mène une droite faisant avec Ox un angle double de l'angle MOx ; cette droite rencontre en P la tangente en M. Lieu du point P.

2044. — Lieu des foyers des hyperboles équilatères tangentes à trois droites.

2045. — Une tangente quelconque à une hyperbole rencontre les axes en A et B. Lieu géométrique du centre de gravité du triangle AOB.

2046. — Soient OA, OB deux diamètres conjugués d'une ellipse ; on fait tourner OB d'un angle droit autour du point O, OB prend la position OB_1. Calculer la longueur AB_1.

2047. — Lieu des sommets des paraboles tangentes à trois droites fixes.

2048. — Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction fixe, menées à une ellipse de grandeur constante qui tourne autour d'un de ses foyers.

2049 — Condition pour que deux coniques coaxiales soient orthogonales.

2050. — Lieu du pied de la perpendiculaire menée du sommet A d'un angle droit circonscrit à une ellipse sur sa polaire par rapport à l'ellipse.

2051. — Soient MA et MB les tangentes menées d'un point M à une ellipse ; on partage AB en trois parties égales, soient C et D les points de division. Lieu décrit par C et D quand M décrit une droite.

2052. — Enveloppe des cordes de longueur constante d'une ellipse.

2053. — Lieu du centre d'une ellipse ayant un foyer fixe et tangente à deux droites fixes.

2054. — Lieu des sommets des angles de grandeur constante circonscrits à une parabole.

2055. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de l'axe d'une parabole sur les normales à la courbe.

2056. — Equation générale des hyperboles équilatères ayant leurs asymptotes parallèles aux axes d'une ellipse et tangentes à cette ellipse.

2057. — Diamètres conjugués égaux de l'ellipse $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. Qu'arriverait-il si on avait une hyperbole ?

2058. — Lieu des sommets des triangles équilatéraux conjugués par rapport à une conique.

2059. — On donne une droite et un point ; on demande l'enveloppe de la deuxième directrice des coniques admettant la droite pour asymptote et le point pour premier foyer.

2060. — Comment peut-on reconnaître qu'un point est à l'intérieur ou à l'extérieur d'une conique donnée.

2061. — D'un point P l'une ellipse on mène les trois normales qui n'ont pas leurs pieds au point P. Lieu du centre du cercle passant par les trois pieds de ces normales quand le point P décrit l'ellipse.

2062. — On donne un triangle ABC et un point M. Existe-t-il une conique par rapport à laquelle AM et BC sont conjuguées en direction, de même BM et CA, CM et AB.

2063. — Démontrer que si par un point d'une ellipse on mène des parallèles à des directions conjuguées par rapport à une autre conique, la sécante obtenue passe par un point fixe. Dans quels cas le point est-il intérieur ou extérieur à l'ellipse ? Lieu de ce point quand le premier parcourt l'ellipse.

2064. — Démontrer que deux coniques concentriques ont toujours un système de diamètres conjugués communs. Construire ce système dans le cas où l'une des coniques est une ellipse définie par deux diamètres conjugués en grandeur et en position et l'autre une hyperbole définie par ses asymptotes.

2065. — On considère la courbe $x = a\sin\alpha + b\cos\alpha + \lambda = c$, où λ représente un paramètre. Quelle est la courbe représentée par cette équation. Lieu des points de contact des tangentes menées à cette courbe parallèlement à une direction donnée.

2066. — Former en coordonnées polaires, l'équation d'une ellipse tangente à l'axe polaire à l'origine, admettant pour foyer un point donné et ayant une distance focale donnée.

2067. — Une ellipse est assujettie aux conditions suivantes : elle reste tangente à une droite fixe Ox en un point fixe O, son foyer F se projette sur Oy en un point fixe P, et sa longueur focale est constante. On joint OF et on porte dans le sens FO une longueur FI égale au demi-grand axe. Lieu du point I. Solution géométrique.

2068. — On considère une parabole et une droite fixe perpendiculaire à l'axe. D'un point M de la parabole comme centre on décrit un cercle tangent à la droite ; trouver l'enveloppe de ce cercle.

2069. — On donne une parabole fixe dont on prend la symétrique P' par rapport à chacune de ses tangentes, trouver le lieu du sommet S' et le lieu du pied de l'axe sur la directrice.

2070. — Construire une conique tangente à quatre droites et vue d'un point donné sous un angle droit.

2071. — On donne deux coniques tangentes. Démontrer que les tangentes aux coniques aux points où elles rencontrent une droite mobile qui tourne autour du premier point de contact se coupent sur une droite fixe.

2072. — Étant donnée une parabole, trouver le lieu des points du plan tels que le segment intercepté par la parabole sur leurs polaires soit de longueur constante.

2073. — Une ellipse de grandeur constante tourne autour d'un de ses sommets, trouver le lieu des points de contact des tangentes issues d'un point fixe.

2074. — Lieu des foyers des paraboles passant par deux points fixes et dont l'axe passe par un autre point fixe.

2075. — Autour d'un point O fixe d'une conique on fait tourner un angle constant AOB, dont les côtés coupent la conique en A et B. Trouver l'enveloppe de AB.

2076. — On donne une parabole et on considère deux tangentes dont les points de contact ont des abscisses x_1, x_2 liées par une relation $f(x_1, x_2) = 0$. Lieu du point de rencontre des tangentes. Cas où $x_2 = 2x_1$.

2077. — Calculer les foyers de l'ellipse $x^2 + y^2 - 1 = 0$, les axes de coordonnées faisant l'angle 30°.

2078. — Lieu géométrique des points tels que leur puissance par rapport à un cercle soit proportionnelle au carré de leur distance à une droite. Discussion. Éléments du lieu trouvé.

2079. — Démontrer que les foyers d'une hyperbole et les points où une tangente à l'hyperbole rencontre les asymptotes sont quatre points sur une même circonférence.

2080. — Sur le petit axe d'une ellipse de centre O on prend deux points G et G' tels que OG et OG' soient égaux à la demi-distance focale. Démontrer que la somme des carrés des distances des points G et G' à une tangente quelconque est constante.

2081. — Lieu des foyers des coniques tangentes à deux droites données en deux points donnés.

2082. — On donne une parabole et deux points A et B. Par ces points on mène des tangentes à la parabole. Condition pour que par les quatre points de rencontre on puisse faire passer un cercle. Si le point A est fixe montrer que le point B décrit une droite. Quel est alors le lieu des centres des cercles.

2083. — Lieu des foyers des ellipses ayant deux sommets donnés (coordonnées polaires).

2084. — Enveloppe des coniques $y^2 + 2ax + cx^2 - 2ay - 2cxy + 2by - 2cy + bc^2 = 0$.

2085. — On donne une droite Δ et un point A ; par le point A on mène une droite variable rencontrant Δ au point B. On mène BM perpendiculaire au AB. Enveloppe de BM.

2086. — Construire la courbe $\rho = \frac{p}{1 - \cos\alpha}$. Par le pôle on mène une corde, on décrit un cercle sur cette corde comme diamètre. Enveloppe de ce cercle.

2087. — Construire la courbe $\frac{x^2}{\cos^2\alpha} + \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1$. Enveloppe.

2088. — On considère la courbe $F(x, y, \lambda) = 0$. Y a-t-il une enveloppe ? Application à $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $x = \lambda^2$, $y = \lambda^3$.

2089. — On donne une ellipse de foyers F et F'. On joint un point M de la courbe aux points F et F'. Les droites MF, MF' rencontrent l'ellipse en A et B. Enveloppe de la droite AB.

2090. — Enveloppe des cordes de grandeur constante d'une parabole.

2091. — Enveloppe de la droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, a et b étant liés par la relation $a^p + b^p = l$, l étant une constante. Examiner les cas de $p = 2$, $p = 3$.

2092. — Enveloppe d'un cercle passant par un point fixe et dont le centre décrit un cercle fixe.

2093. — Enveloppe des normales à la courbe $\rho^m = a^m \cos m\omega$. Etudier le cas où $m = -\frac{1}{2}$.

2094. — D'un point M d'une parabole on abaisse MP perpendiculaire sur l'axe. Enveloppe du cercle de diamètre MP.

2095. — Enveloppe des axes non focaux des ellipses ayant un foyer fixe et assujetties à toucher une droite donnée en un point donné.

2096. — On donne deux cercles O et O', et l'on mène une tangente variable au cercle O. On élève des perpendiculaires à cette tangente aux points où elle rencontre le cercle O'. Trouver l'enveloppe de ces perpendiculaires.

2097. — On donne la courbe $(y - ax)(x^2 + y^2) - bxy$. Par le point double on mène une droite rencontrant la courbe en un autre point. Par ce point on mène une perpendiculaire à la sécante. Enveloppe de cette perpendiculaire.

V. — Géométrie analytique à trois dimensions.

2098. — On donne une droite passant par l'origine et définie par ses cosinus directeurs. On fait tourner un point (x, y, z) d'un angle θ autour de la droite, trouver les nouvelles coordonnées du point.

2099. — On considère les droites représentées par les équations $x = uz - v$, $y = u^2 - 2uvz - v(u^2 - v)$, où u et v sont des paramètres. Combien peut-on mener de ces droites par un point quelconque M de l'espace.

2100. — Perpendiculaire commune à Oz et à la droite $y = z$, $x - a = my$. Lieu de cette perpendiculaire commune quand la seconde droite varie dans le plan $y = z$, a restant constant.

2101. — On donne trois droites passant par l'origine, définies par leurs cosinus directeurs; calculer les dièdres du trièdre ainsi formé.

2102. — Lieu des points équidistants de deux droites données.

2103. — Symétrique d'un point par rapport à une droite et par rapport à un plan.

2104. — Soit un polygone de n côtés dans l'espace et un plan qui se déplace parallèlement à lui-même ; on considère les points d'intersection du plan et des côtés du polygone. Lieu du centre des moyennes distances de ces points.

2105. — On considère le cône qui a pour directrice la courbe $z = 0$, $y = e^{x^3+px+q}$ et pour sommet un point de Oz. Equation de ce cône. Point à l'infini de la section de ce cône par un plan quelconque.

2106. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires, une conique dont le plan est quelconque dans l'espace rencontre l'axe des z, et sa projection sur le plan des xy est un cercle. Equation de la surface engendrée par une parallèle au plan des xy qui s'appuie sur Oz et sur la conique.

2107. — Lieu des sommets des cônes qui passent par un cercle donné et admettent une direction de plans cycliques donnée.

2108. — On considère la courbe $y^2 - 2px = 0$, $ax + by + cz + d = 0$. Trouver l'équation du cylindre ayant cette courbe pour directrice et dont les génératrices ont une direction donnée.

2109. — Lieu des sommets des cônes de révolution s'appuyant sur la conique $z = 0$, $y^2 = 2px + qx$.

2110. — Etudier la surface $z(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$. Sections par des plans parallèles au plan des xy. Ces sections se composent de droites. Lieu des projections sur ces droites d'un point donné (α, β, γ).

2111. — On sait que le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à une ellipse E est une hyperbole H, et que le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à l'hyperbole H est l'ellipse E. Démontrer que deux quelconques des cônes de révolution dont l'un a pour base E et l'autre H sont orthogonaux.

2112. — Equation d'un cône circonscrit à un trièdre ou inscrit dans un trièdre.

2113. — Déterminer le centre de la surface $a \cos x + b \cos y + c \cos z - 1 = 0$.

2114. — Surface engendrée par un cercle dont le centre est fixe et qui rencontre deux droites fixes.

2115. — Equation d'une surface de révolution ayant pour axe une droite donnée et circonscrite à une surface donnée.

2116. — Etudier la surface de révolution $ax + by + cz + d = \sin\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2117. — Etant donnée la courbe $x^2 = \cos z$, $y = \sin z$, chercher si cette courbe a un centre.

2118. — Equation d'un conoïde droit ayant pour axe l'axe d'un cylindre de révolution et pour directrice la courbe obtenue en appliquant un cercle sur le cylindre, de façon que le plan du cercle s'enroule sur le cylindre.

2119. — Equation de la surface de révolution engendrée par une hélice tournant autour d'une génératrice du cylindre contenant l'hélice. On considère un cylindre circonscrit à cette surface parallèlement à la direction α, β, γ; équation de la courbe de contact.

2120. — Lieu des centres des moyennes distances des points d'intersection d'une corde de direction α, β, γ avec la surface $x^3 + y^3 + z^3 - a^3 = 0$.

2121. — Mener par le point (x, y, z) une normale à l'ellipse qui a pour équation $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} - 1 = 0$, $z = 0$.

2122. — Mener une normale commune à une ellipse et à une droite passant par le centre.

2123. — Lieu des segments de grandeur constante qui s'appuient sur deux droites fixes dans l'espace.

2124. — On donne la surface $z(f(x, y, z) + g(x, y, z)) = 0$, où f et g sont du deuxième degré. On coupe la surface par des droites de paramètres directeurs $\alpha, \beta, 0$. Lieu des milieux des cordes obtenues.

2125. — Lieu des droites qui rencontrent deux cercles dans l'espace et restent parallèles à un plan fixe.

2126. — Condition pour qu'un cône du deuxième degré ayant pour sommet l'origine $\varphi(x, y, z) = 0$ soit coupé par le plan $ax + by + cz = 0$ suivant deux droites rectangulaires.

2127. — On donne une ellipse et une droite non située dans son plan et passant par son centre. Lieu des perpendiculaires communes à la droite et aux tangentes à l'ellipse.

2128. — Reconnaître les surfaces

$$(ax + by + cz)^2 + (a'x + b'y + c'z)^2 = 1, \quad \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} + 1 = 0, \quad (cy - bz)^2 + (az - cx)^2 + (bx - ay)^2 = h,$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0 \quad \text{où l'on a} \quad a + b + c = bc + ca + ab = 0,$$

$$(x + y + z)^2 - (x - y + 2z + 1)^2 - 5 = 0 \quad (\text{Axe et section droite}), \quad PQ + \lambda RS = 0 \quad (P, Q, R, S \text{ étant des fonctions linéaires}),$$

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2mxy + 1 = 0, \quad 3x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + (x + y + z)^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - 2z^2 + 2mxy + 6x = 0,$$

$$(x + 1)(y + z - 1) = x + y + z, \quad Bzx + Bxy + Cyz + Cxz = 0 \quad (\text{génératrices passant par l'origine}).$$

2129. — Lieu des centres des quadriques $x^2 + y^2 + 8z^2 - 4yz + 6zx + 2axy - 2az = 0$ lorsque a varie.

2130. — Montrer que les deux quadriques $(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = 1$, $(a_1x + a_2y + a_3z)^2 + (b_1x + b_2y + b_3z)^2 + (c_1x + c_2y + c_3z)^2 = 1$ sont égales.

2131. — Equation générale des ellipsoïdes ayant pour centre le point x_0, y_0, z_0 et dont les demi-axes ont pour longueurs a, b, c.

2132. — Sections circulaires de la quadrique $ay^2 + bz^2 + cyz + dx + 1 = 0$.

2133. — Equation générale des quadriques passant par deux coniques. Cônes du système.

2134. — Condition pour que l'équation générale du deuxième degré représente : 1° un cylindre parabolique ; 2° un système de deux plans.

2135. — Démontrer que la surface $yz + zx + xy = 1$ est de révolution. Trouver sa méridienne.

2136. — Ecrire que la surface $(az - bx)(cz - by) - z^2 = 0$ est de révolution.

2137. — Equation générale des plans coupant un hyperboloïde suivant une parabole. Sommet de la parabole de section.

2138. — Construire une section circulaire d'un ellipsoïde défini par ses trois axes donnés par leurs projections.

2139. — On considère la parabole définie par les équations $(ax + by + cz + d)^2 - 2(a'x + b'y + c'z + d') = 0$, $lx + my + nz + p = 0$, déterminer le sommet et le paramètre de cette parabole.

2140. — Etant donnés un ellipsoïde de révolution et un plan sécant, montrer que le cône qui a pour sommet un foyer de l'ellipsoïde et pour base la section est de révolution.

2141. — Lieu des perpendiculaires communes aux génératrices d'un hyperboloïde et à une droite fixe passant par le centre. Cas particulier où cette droite est l'axe imaginaire de la surface.

2142. — Lieu des sommets des paraboloïdes équilatères passant par deux droites données.

2143. — En un point d'un ellipsoïde on mène la normale à cette surface ; par cette normale on fait passer des plans ; trouver le lieu des sommets des sections déterminées par ces plans.

2144. — Lieu des sections cycliques centrales de la quadrique $ayz + bzx + cxy + 1 = 0$, a, b, c étant liés par les relations $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

2145. — Deux trièdres trirectangles qui ont même sommet sont sur un même cône du deuxième degré.

2146. — Lieux des centres des sphères de rayon nul bitangentes au paraboloïde $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0$.

2147. — Foyers de la section plane de la quadrique $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$ par le plan $ux + vy + wz + 1 = 0$.

2148. — Quelles conditions doivent remplir deux quadriques pour qu'on puisse leur circonscrire un même cône.

2149. — Reconnaître si un point est à l'intérieur et à l'extérieur d'une surface du second ordre non réglée.

2150. — Lieu des projections du centre d'un hyperboloïde à une nappe sur les génératrices de même système.

2151. — Lieu des sommets des cônes circonscrits à un ellipsoïde donné et capables d'un trièdre trirectangle.

2152. — Lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes rencontrent une conique. Cas où la conique est une parabole.

2153. — Etant donnés une quadrique et un point, par ce point on mène des cordes, et on demande le lieu des cordes pour lesquelles le point partage le segment intercepté par la quadrique dans un rapport donné.

2154. — Lieux des axes des cônes passant par une conique et dont les sommets décrivent une droite fixe.

2155. — Etant donné un paraboloïde hyperbolique, on mène la perpendiculaire commune à l'axe et à une génératrice. Lieu du pied de cette perpendiculaire. Lieu de la perpendiculaire commune.

2156. — On considère l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$ et le plan $ux + vy + wz + 1 = 0$. Trouver l'équation de la section rapportée à deux axes de son plan.

2157. — Mener par le point (α, β, γ) une normale à la quadrique $f(x, y, z) = 0$. Que représente l'équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ f' & f'_1 & f'_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0 ?$$

Lieu des points tels que le cône des normales soit de révolution.

2158. — Lieux des sommets des cônes circonscrits à un ellipsoïde dont la trace sur un des plans principaux a une aire constante.

2159. — On donne un hyperboloïde à une nappe et une droite D passant par le centre. Lieu des perpendiculaires communes à la droite D et aux génératrices d'un même système.

2160. — Lieux des sections principales de la quadrique $ayz + bzx + cxy = 1$ quand on a $a + b + c = 0$, $abc = 1$.

2161. — Lieux des milieux des cordes d'une quadrique passant par un point fixe.

2162. — On donne dans l'espace une parabole fixe et une deuxième parabole de grandeur constante dont l'axe est parallèle à celui de la première ; cette deuxième parabole se déplace parallèlement à elle-même de telle manière qu'un de ses points (fixé sur elle) décrive la première ; on demande la surface engendrée.

2163. — Un cône a son sommet sur une quadrique, sa base est une section plane de la quadrique; trouver le reste de l'intersection des deux surfaces. Si on considère tous les cônes ayant pour sommet le même point de la quadrique et dont les plans de base passent par une droite fixe, quelle est leur particularité ?

2164. — Lieu des perpendiculaires communes à deux génératrices de même système d'un hyperboloïde qui aboutissent aux extrémités de deux diamètres conjugués de l'ellipse de gorge.

2165. — Trouver sur un hyperboloïde à une nappe le lieu des points où les génératrices font un angle donné.

2166. — Equation générale des surfaces de révolution coupant les axes de coordonnées aux sommets de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Lieu des axes de ces surfaces.

2167. — Dans l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, on considère les sections qui sont des hyperboles équilatères et on demande le lieu des normales menées du centre de l'hyperboloïde aux plans de ces hyperboles.

2168. — Lieu des points dont les distances δ et δ' à deux droites de l'espace sont liées par la relation $\lambda\delta^2 + \lambda'\delta'^2 + \mu = 0$. Trouver le centre de la quadrique qui forme le lieu.

2169. — Lieu du point de rencontre de deux génératrices de systèmes différents d'un hyperboloïde à une nappe qui aboutissent aux extrémités de deux diamètres conjugués de l'ellipse de gorge.

2170. — On considère un ellipsoïde et une sphère concentrique; un plan tangent quelconque à la sphère coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse. Lieu des sommets de cette ellipse quand le plan tangent passe par un point fixe.

2171. — Lieu des symétriques d'une droite par rapport aux génératrices d'un hyperboloïde.

2172. — On donne le paraboloïde elliptique $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0$. Equation du cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à la droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Montrer que le cylindre est parabolique. Trouver son plan principal.

2173. — Equation de la surface engendrée par une droite parallèle au plan des xy, qui rencontre une droite $y = 0$, $x = p$ et qui reste tangente à un ellipsoïde rapporté à ses axes.

2174. — On coupe un cylindre parabolique $y^2 - 2px = 0$ par le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, déterminer le sommet de la section.

2175. — Démontrer que dans un hyperboloïde le rapport anharmonique de quatre plans tangents suivant une même génératrice est égal au rapport anharmonique des points de contact.

2176. — Démontrer que si deux quadriques ont une génératrice commune et si les deux plans tangents communs sont isotropes, les deux quadriques se coupent sous un angle constant.

2177. — Lieu des axes des hyperboloïdes de révolution qui passent par deux droites données.

2178. — Lieu des centres des sphères de rayon nul bitangentes à un cône ou à un paraboloïde.

2179. — Si deux surfaces du second degré ont mêmes plans cycliques, leurs sections par un même plan ont même direction d'axes.

2180. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné sur les plans tangents à un paraboloïde hyperbolique.

2181. — On donne une quadrique $f(x, y, z) = 0$. Ecrire que le point (a, b, c) est : 1° sommet ; 2° ombilic. Ecrire qu'une droite est : 1° axe ; 2° diamètre conjugué de sections circulaires ; 3° axe de révolution. Ecrire qu'un plan est : 1° plan principal ; 2° plan de section circulaire ; 3° plan de l'équateur d'une surface de révolution.

2182. — Une quadrique passe par une conique donnée et admet pour centre un point donné ; est-elle déterminée ? Il manque encore une condition ; on donne un plan tangent, trouver le point de contact.

2183. — Que peut-on dire de deux cônes circonscrits à une quadrique ? Démontrer qu'ils sont bitangents. On donne deux cônes bitangents, la quadrique est-elle déterminée ? La déterminer en donnant soit un point, soit un plan tangent.

2184. — Equation générale des quadriques dont on donne deux génératrices du cône asymptote et le diamètre conjugué de leur plan.

2185. — On donne un quadrilatère gauche, existe-t-il un paraboloïde passant par ce quadrilatère. Construction des génératrices ; plan tangent en un point ; direction des diamètres, sommet.

2186. — Construire un paraboloïde de révolution connaissant son axe et un nombre suffisant de points pour le déterminer.

2187. — Construire un paraboloïde de révolution connaissant une section plane et un point.

2188. — Construire un cylindre parabolique connaissant une directrice et deux points.

2189. — Équation générale des quadriques passant par deux droites.

2190. — On donne dans une quadrique le centre et deux génératrices de même système, la quadrique est-elle déterminée ?

2191. — On détermine une quadrique par deux cercles parallèles et un point, trouver le plan tangent en ce point.

2192. — On définit une quadrique par une conique et deux génératrices, construire le centre.

2193. — On donne un hyperboloïde de révolution. Combien cela fait-il de conditions ? On assujettit en outre la surface à passer par quatre points, est-elle déterminée ? Trouver son équation. Solution géométrique.

2194. — Étudier les quadriques passant : 1° par deux paraboles ; 2° par une parabole et un cercle ; 3° par deux cercles.

2195. — A combien de conditions équivalent pour une quadrique un axe, un sommet sur l'axe et un ombilic ? Équation [illegible]

2196. — On donne une droite et un point sur cette droite ; la droite est axe d'un paraboloïde et le point est sommet. Nombre de conditions. On donne trois points de la surface, écrire son équation. Discussion.

2197. — On donne trois axes de coordonnées obliques Ox, Oy, Oz. Ox est une génératrice d'un paraboloïde, Oz est un diamètre. Équation générale des paraboloïdes. Combien y aura-t-il de paramètres dans l'équation ?

2198. — Déterminer une quadrique connaissant une section plane et deux génératrices.

2199. — On donne dans une quadrique le cône asymptote et un plan tangent. Génératrices de la quadrique qui sont dans le plan tangent.

2200. — Équation générale des quadriques ayant pour axe une droite donnée (les axes de coordonnées étant quelconques).

2201. — Une quadrique est-elle déterminée quand on connaît trois normales et leurs pieds.

2202. — Équation générale des quadriques qui ont pour plans asymptotes les plans des yz et des zx. Dire *a priori* combien il y aura de paramètres dans l'équation. Quelles sont les surfaces qu'on pourra avoir ?

2203. — Existe-t-il une quadrique ayant pour axe un segment de droite donné et passant par trois points ? Écrire l'équation de la quadrique.

2204. — Comment se coupent deux quadriques qui sont tangentes en trois points. Cas où les trois points sont sur une même génératrice.

2205. — Comment se coupent deux paraboloïdes hyperboliques qui ont un plan directeur commun et une génératrice commune parallèle ou non au plan directeur. Solution analytique et géométrique.

2206. — Comment se coupent deux quadriques ayant une génératrice commune et un point de contact en dehors. A combien de conditions chacune des surfaces est-elle astreinte ?

2207. — Intersection d'un cylindre de révolution et d'un paraboloïde de révolution dont l'axe est parallèle aux génératrices du cylindre.

2208. — Comment se coupent deux quadriques qui se raccordent en tous les points d'une génératrice ?

VI. — Géométrie descriptive.

2209. — On donne une droite rencontrant la ligne de terre : mener par cette droite un plan perpendiculaire au second bissecteur.

2210. — Étant donné un cube dont une face *abcd* est dans le plan horizontal, on le fait tourner autour d'une droite passant par le point *d* et parallèle à la diagonale *ac* jusqu'à ce que la diagonale du cube qui passe par le point *d* devienne verticale. [illegible] du cube.

2211. — On mène par un point (a, a') un plan parallèle au deuxième bissecteur. Intersection de ce plan avec un plan défini par deux droites.

2212. — [illegible] avec le second bissecteur.

2213. — Faire tourner un point (a, a') d'un angle donné autour d'une droite dont les projections sont données.

2214. — On représente un cube par ses projections, l'une des faces étant dans le plan horizontal. Représenter le cube [illegible]

2215. — La base d'un cône quelconque étant donnée, combien faut-il de points pour déterminer le cône ? Dans le cas où la base est une conique, comment trouvera-t-on le sommet, le cône étant déterminé complètement par des points.

2216. — On donne une parabole, base d'un cylindre parabolique. Combien faut-il donner de points pour déterminer le cylindre ? On donne deux points, il y a deux solutions ; compléter l'intersection des deux cylindres répondant à la question.

2217. — On donne un cône dont la directrice est une conique dans le plan horizontal, on considère le cône supplémentaire. On donne un point de ce cône en projection horizontale, trouver sa position verticale, et inversement. Intersection [illegible]

2218. — [illegible] les bases sont horizontales.

2219. — On donne les projections d'une droite D et d'un point F. F est le foyer d'une parabole dont D est la directrice ; déterminer les projections de la parabole.

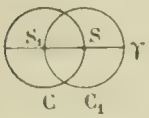
2220. — On donne un cône dont la base est un cercle horizontal. On coupe ce cône par un plan de bout dont la trace verticale est parallèle à une génératrice de contour apparent vertical. Nature de la section. Sommet de la parabole.

2221. — On donne une ellipse définie par deux diamètres conjugués (Oa, $O'a'$) et (Ob, $O'b'$). Déterminer les projections de cette ellipse.

2222. — Dans un plan défini par deux droites on donne une conique qui se projette horizontalement suivant un cercle. Cette conique est la directrice d'un cône dont on donne le sommet. Trouver les directions de plans telles que les sections du cône par ces plans se projettent horizontalement suivant des cercles.

2223. — On donne un cône ayant pour directrice une conique horizontale. Mener par une droite donnée un plan coupant le cône suivant une parabole.

2224. — Dans un plan horizontal on donne une hyperbole équilatère et un cercle tangent en σ à une asymptote (A) de l'hyperbole. On considère le cône qui a pour directrice le cercle et dont le sommet se projette horizontalement sur l'asymptote (A) en un point s, et le cylindre qui a pour directrice l'hyperbole et dont les génératrices sont parallèles à la génératrice du cône qui passe au point σ. Intersection des deux surfaces.



2225. — On donne deux cercles égaux C et C_1 situés dans le plan horizontal, chacun passant par le centre de l'autre. Le cercle C est la directrice d'un cône dont le sommet est projeté horizontalement en s, C_1 est la base d'un cône dont le sommet est projeté horizontalement en s_1 La ligne des sommets coupe le plan horizontal au point γ. Intersection des deux cônes.

2226. — Intersection de deux cônes de révolution définis l'un par deux droites du plan vertical formant son contour apparent vertical, l'autre par deux droites du plan horizontal formant son contour apparent horizontal.

2227. — Intersection de deux cônes de révolution dont l'un a pour axe la ligne de terre et dont l'autre a son axe vertical.

2228. — Soit un cylindre droit à base circulaire dans le plan horizontal, on prend un point sur une génératrice de front de ce cylindre, c'est le sommet d'un cône ayant pour base un cercle tangent intérieurement à la base du cylindre. Intersection des deux surfaces.

2229. — On donne deux circonférences dans un plan horizontal ; par le centre de similitude externe on mène une droite quelconque sur laquelle on prend deux points qui sont les sommets de deux cônes ayant pour bases les deux circonférences. Intersection des deux cônes.

2230. — Intersection de deux cônes du deuxième degré qui se raccordent tout le long d'une génératrice.

2231. — On considère une sphère et un point (m, m') à l'intérieur de la sphère. Par ce point, on mène le plan parallèle au second bissecteur, trouver un point de l'intersection du plan et de la sphère et la tangente en ce point.

2232. — Ombre au flambeau d'une calotte sphérique sur un plan vertical, le point lumineux étant le centre de la sphère.

2233. — Représenter par ses deux projections une demi-sphère limitée par un plan diamétral vertical. Ombre propre et ombre portée par le corps supposé éclairé par une source ponctuelle située dans le plan de front du centre.

2234. — Intersection d'une droite et d'une sphère définie par quatre points.

2235. — On considère une sphère donnée par ses deux contours apparents, et on la coupe par un plan horizontal passant par le centre, on supprime l'hémisphère inférieur. Ombre propre et ombre portée. Le système est éclairé par un point lumineux.

2236. — On donne trois droites OA, OB, OC par leurs projections. Construire le triangle sphérique intercepté par ces trois droites sur une sphère de centre O.

2237. — Mener à une sphère un plan tangent, le point de contact étant sur un cercle vertical donné.

2238. — Intersection d'une sphère ayant son centre dans le deuxième bissecteur avec une droite située dans ce même bissecteur.

2239. — On donne un triangle ABC dans l'espace, on demande le point commun aux trois sphères décrites sur les côtés comme diamètres.

2240. — Construire une sphère tangente au plan horizontal, à un plan de bout et passant par deux points.

2241. — Etant donnés une sphère et un plan, pour trouver des points de la section, on coupe par des plans horizontaux. Trouver les plans limites utiles.

2242. — On donne un tétraèdre ayant sa base dans un plan horizontal. Intersection de ce tétraèdre et d'une sphère ayant son centre en un sommet. Ombre du système sur le plan horizontal.

2243. — Ombres d'un tore à axe vertical éclairé par des rayons parallèles.

2244. — Une ellipse située dans le plan du tableau tourne autour d'un de ses axes ; un plan a pour trace sur le plan de la figure une droite Δ et fait avec cette droite un angle de 45° ; mener à l'ellipsoïde un plan tangent parallèle au plan donné.

2245. — Contour apparent horizontal d'un ellipsoïde de révolution dont l'axe est de front.

2246. — Mener à un tore d'axe vertical une normale par un point extérieur. Ce problème répond-il à un problème d'ombre ?

2247. — On donne une parabole dans un plan de bout tournant autour d'un axe vertical passant par le foyer de la projection horizontale. Contour apparent de la surface engendrée.

2248. — Même problème en remplaçant la parabole par une ellipse.

2249. — Contour apparent vertical de la surface de révolution dont l'axe est vertical et qui est engendrée par une conique située dans un plan de bout et se projetant horizontalement devant une conique (ellipse, hyperbole ou parabole) ayant un axe parallèle à la ligne de terre et dont l'un des foyers coïncide avec la projection horizontale de l'axe de révolution.

2250. — On considère un paraboloïde de révolution à axe vertical ; le sommet est le point le plus bas de la surface et le paraboloïde est supposé creux. On éclaire par des rayons à 45°. Ombre propre et ombre portée.

2251. — On considère un ellipsoïde de révolution autour d'un axe de front (F, F'). Ombre portée par l'ellipsoïde sur un plan horizontal, le point lumineux étant dans le plan de front F.

2252. — Contour apparent de la surface engendrée par une ellipse tournant autour d'un axe vertical qui n'est pas dans le plan de l'ellipse. Points doubles de la méridienne.

2253. — La droite (D, D') est l'axe d'un cylindre de révolution dont on donne un point (a, a'). Mener par un point (b, b') des plans tangents à ce cylindre.

2254. — Construire les projections d'un cylindre de révolution connaissant son rayon, sa hauteur et le plan d'une de ses bases.

2255. — Normale commune à un cylindre de révolution dont l'axe est horizontal et à un cône dont la directrice est un cercle dans le plan vertical.

2256. — On donne trois droites A, B, C. Construire une droite parallèle à C qui soit à une distance α de A, β de B.

2257. — On donne deux cylindres de révolution ayant même axe vertical, des rayons et des hauteurs différentes. Ombres du système; les rayons lumineux sont de front à 45°.

2258. — Projection verticale d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution à axe vertical. Ombre portée par cette hélice sur le plan horizontal, le point lumineux étant sur l'axe du cylindre.

2259. — Construire un cône de révolution sachant qu'il est tangent au plan horizontal, au plan vertical et à un plan de bout donné. On donne un point du cône en projection horizontale, trouver la projection verticale.

2260. — Dans un cône de révolution on donne un plan tangent et la génératrice de contact, puis la projection horizontale de l'axe, le cône est-il déterminé ? Construire son axe et son angle au sommet.

2261. — Normales communes à une droite et à un cône de révolution.

2262. — On donne deux plans et la projection horizontale d'une droite. Construire un cône de révolution tangent aux deux plans et dont l'axe se projette horizontalement suivant la droite donnée.

2263. — Construire un cône de révolution connaissant les projections de son axe et sachant qu'il est tangent au plan vertical.

2264. — Trace horizontale d'un cône de révolution circonscrit à une sphère.

2265. — On donne un cône de révolution défini par son axe, son sommet et un point. Section par le plan bissecteur du second dièdre. Axes de la section.

2266. — Contours apparents d'un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est 30° et qui est tangent au plan horizontal, connaissant la génératrice de contact et le sommet.

2267. — Soit un cône circulaire droit ; on le place sur un plan horizontal la pointe en bas et de telle façon que l'une de ses génératrices soit verticale. Ombre au soleil de ce cône.

2268. — On donne un cône de révolution par les projections de son axe, son sommet et un point. Section pour un plan de bout.

2269. — Ombre propre et ombre portée d'un tronc de cône de révolution reposant par sa petite base sur le plan horizontal. Les rayons lumineux sont parallèles.

2270. — Combien faut-il donner de points pour définir un cône de révolution ? Construire un cône de révolution connaissant une section plane et un point.

2271. — On donne un cône de révolution défini par son axe, son sommet et une sphère inscrite. Construire un cône de révolution tangent au premier connaissant l'axe et le sommet.

2272. — Mener par une droite un plan faisant un angle donné avec une droite donnée. Cas où la première droite est la ligne de terre.

2273. — Construire une horizontale rencontrant deux droites données et faisant avec l'une d'elles un angle donné.

2274. — Construire deux cônes de révolution égaux et tangents connaissant leurs axes et leurs sommets.

2275. — Construire une horizontale rencontrant deux droites données et faisant avec ces deux droites des angles égaux.

2276. — Construire un cône de révolution tangent aux deux plans de projection et à un plan défini par ses traces.

2277. — Etant donnée une surface gauche de révolution à axe vertical, déterminer l'intersection de cette surface et d'un plan défini par la ligne de terre et un point.

2278. — Etant données une surface gauche de révolution définie par un axe vertical et une génératrice, mener à cette surface un plan tangent par un point, de manière que le point de contact soit sur un méridien donné.

2279. — Une droite (D, D') tourne autour d'une droite (Δ, Δ'). Intersection de la surface engendrée avec une droite verticale rencontrant Δ, Δ'.

2280. — On considère la surface engendrée par une droite (D, D') tournant autour d'une autre droite Δ, Δ', puis le plan défini par (D, D') et un point (a, a'). Trouver le point où ce plan est tangent à la surface.

2281. — On coupe par un plan de bout une surface gauche de révolution à axe vertical, la conique section est la directrice d'un cône de sommet donné. Intersection du cône et de la surface.

2282. — On donne un hyperboloïde de révolution défini par un axe vertical et une génératrice de front; construire la courbe de contact du cône circonscrit de sommet donné. Trace horizontale de ce cône.

2283. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe de front avec le plan bissecteur du deuxième dièdre. Asymptotes.

2284. — Construire l'axe d'un hyperboloïde de révolution connaissant une ellipse de la surface située dans un plan horizontal et une génératrice.

2285. — On donne deux droites quelconques; l'une tourne autour de l'autre et engendre un hyperboloïde. Intersection de cette surface et du second bissecteur.

2286. — Construire une surface gauche de révolution, connaissant une hyperbole tracée sur la surface et située dans un plan horizontal, un point de la surface à distance finie et une direction asymptotique.

2287. — On donne un plan défini par une ligne de front (F, F') et une horizontale (H, H'). Intersection des deux cylindres de révolution touchant le plan l'un suivant (F, F'), l'autre suivant (H, H') et ayant un même rayon.

2288. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical défini par une génératrice G rencontrant le cercle de gorge en un point α. On demande l'intersection de cette surface et d'un cône ayant pour directrice un cercle situé dans le plan du cercle de gorge et passant par le point α, et pour sommet un point situé sur la génératrice G.

2289. — On donne un cylindre ayant pour base une ellipse située dans un plan horizontal et ayant ses génératrices de front, et une sphère ayant même centre que l'ellipse et pour diamètre le grand axe de l'ellipse. Intersection de la sphère et du cylindre.

2290. — On donne dans un plan horizontal deux droites OA, OB et un cercle C. Le cercle en tournant autour de OA et OB engendre deux tores. Intersection.

2291. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et qui a pour génératrices la génératrice de front définissant l'hyperboloïde et une autre droite de front.

2292. — Faire passer un cylindre hyperbolique par l'intersection de deux paraboloïdes hyperboliques ayant le plan horizontal pour plan directeur commun.

2293. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical et un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est de profil et qui passe par deux génératrices de même système de cet hyperboloïde, dont l'une est de front. Intersection des deux surfaces.

2294. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et d'un cône qui a pour base le cercle de gorge de l'hyperboloïde.

2295. — Etant donnés une sphère par son centre et son rayon, et un cylindre de révolution par son axe et le rayon de sa section droite, trouver l'intersection des deux surfaces.

2296. — Etant données deux droites de front A et B, déterminer l'intersection des hyperboloïdes de révolution engendrés par une droite D tournant autour des droites A et B.

2297. — Un cercle est le contour apparent d'un hémisphère qui repose sur le plan du tableau. Deux droites concourantes dans le plan du tableau sont les génératrices de contour apparent d'un cône de révolution. Intersection du cône et de l'hémisphère.

2298. — Intersection de deux cylindres de révolution dont l'un a son axe dans le plan horizontal et l'autre dans le plan vertical.

2299. — On donne dans le plan horizontal un cercle et un carré inscrit dont les côtés *ab, cd* sont parallèles à la ligne de terre. On considère le cylindre ayant pour directrice le cercle et pour génératrice une droite de front D passant par le point *a* et faisant 45° sur le plan horizontal. Intersection de ce cylindre avec l'hyperboloïde engendré par la droite D tournant autour de la verticale du point *d*, diamétralement opposé au point *a*.

2300. — Intersection d'un tore à axe vertical avec un cône de révolution dont le contour apparent vertical se compose d'une tangente commune intérieure et d'une tangente commune extérieure aux deux cercles qui forment la méridienne principale du tore. L'axe du cône est dans le plan de front de l'axe du tore.

2301. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et d'un cône dont la base est une conique dans le plan du cercle de gorge et dont le sommet est sur la génératrice principale.

2302. — On donne une sphère par ses deux projections; un cône a pour sommet un point (*a*, *a'*) et pour base la circonférence du plan horizontal qui est le contour apparent horizontal de la sphère. Intersection des deux surfaces.

2303. — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et un hyperboloïde défini par une génératrice du paraboloïde, une verticale et une horizontale. Intersection des deux surfaces.

2304. — On donne une droite verticale et une courbe gauche quelconque qui tourne autour de l'axe et qui engendre une surface de révolution. Intersection de cette surface et d'un cylindre ayant pour directrice la courbe donnée et dont les génératrices sont horizontales.

2305. — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur horizontal avec un cône qui a une des deux génératrices commune avec le paraboloïde et pour base un cercle horizontal.

2306. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et d'un cylindre ayant pour axe une génératrice de l'hyperboloïde et passant par son centre.

2307. — On donne un hyperboloïde à une nappe par son cône asymptote, base circulaire horizontale et un point [illegible]. Trouver le plan tangent en ce point.

2308. — On donne le contour apparent horizontal d'une quadrique de révolution et la projection verticale de l'axe (ou un point de l'axe). La quadrique est-elle déterminée ?

2309. — Etant donné un segment de droite, élever en une de ses extrémités une perpendiculaire de longueur donnée, et, en ce même point, une perpendiculaire au plan des droites précédentes et de longueur donnée. Déterminer la sphère de Monge de l'ellipsoïde ayant les trois droites précédentes comme demi-axes.

2310. — Etant donné un ellipsoïde par ses trois demi-axes OA, OB, OC, construire le plan polaire d'un point P par rapport à cet ellipsoïde. Faire l'épure en supposant le plan OAB horizontal.

2311. — On donne dans le plan de la figure une ellipse et une droite. Cette droite est la projection d'une droite de l'espace [illegible] avec le plan du tableau et rencontrant ce plan en un point donné. Intersection de cette droite avec l'ellipsoïde engendré par l'ellipse tournant autour d'un de ses axes.

2312. — On considère une quadrique définie par un cercle horizontal et deux génératrices de même système rencontrant le cercle. La quadrique est-elle déterminée ? Construire son centre, son cône asymptote, son contour apparent horizontal.

2313. — On donne deux coniques non situées dans un même plan et tangentes en un point A. On considère la quadrique passant par ces deux coniques et un point M. Déterminer le plan tangent au point A et au point M.

2314. — On donne un cercle horizontal, une droite D rencontrant le cercle et une droite Δ passant par son centre. Trouver une quadrique contenant le cercle et la droite D et admettant Δ pour diamètre conjugué du plan du cercle. Déterminer les éléments de la quadrique.

2315. — On considère un cône défini par sa base (un cercle dans le plan horizontal) et son sommet. Par un point A on mène des perpendiculaires sur les plans tangents au cône. Construire la courbe lieu des projections.

2316. — Même problème en remplaçant les plans tangents par les génératrices.

2317. — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur horizontal. On demande : 1° la section par un plan de bout ; asymptotes ; 2° contour apparent horizontal ; 3° trace horizontale du cône circonscrit ; 4° pôle d'un plan de bout.

2318. — On donne deux génératrices d'un paraboloïde hyperbolique qui a pour plan directeur le plan bissecteur du deuxième dièdre. Mener par une verticale un plan coupant le paraboloïde suivant une hyperbole équilatère. Asymptotes.

2319. — On donne une verticale, une droite quelconque ne la rencontrant pas ; on considère les horizontales qui s'appuient sur ces deux droites et on projette un point (a, a') sur ces horizontales. Construire la courbe lieu de ces projections. Branches infinies.

2320. — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal. Par un point d'une génératrice (A, A') on mène une droite de front dont la projection verticale est bissectrice de l'angle de A' et de la ligne de rappel. Cette droite est l'axe d'un cône de révolution dont une génératrice est (A, A'). Intersection des deux surfaces.

2321. — Deux paraboloïdes hyperboliques ont pour plan directeur commun le plan bissecteur du second dièdre et sont définis chacun par deux génératrices. Intersection.

2322. — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur horizontal. Lieu des projections d'un point donné sur les génératrices horizontales du paraboloïde.

VII. Statique.

2323. — On divise une barre AB de 40 centimètres de long en 10 parties égales ; aux points 1, 2, 3 ... de division on applique des poids de 1, 2, 3 ... hectogrammes. La barre pèse 800 grammes. Trouver le centre de gravité du système.

2324. — Centre de gravité de la table de Pythagore.

2325. — Centre de gravité du système formé par les arêtes d'un tétraèdre.

2326. — Soit OR la résultante de deux forces OF et OF_1. Si F_1 décrit un cercle, quel est le lieu du point R ?

2327. — On donne deux forces constantes appliquées en deux points différents A et B, dans un même plan. On les fait tourner en même temps d'un même angle autour de leurs points d'application. Lieu du point d'intersection de leurs directions. Démontrer que la résultante passe par un point fixe. Que devient ce théorème lorsque les deux forces deviennent [illegible] ?

2328. — On donne un point matériel M, une force P appliquée en ce point est donnée en grandeur et direction. Quelle doit être la direction d'une force Q donnée en grandeur et appliquée en M pour que la résultante R des forces P et Q soit [illegible] ?

2329. — On donne une demi-circonférence de diamètre AB. D'un point M de la courbe on abaisse MH perpendiculaire sur AB. Centre de gravité de l'aire AMH.

2330. — Trois points matériels M_1, M_2, M_3 décrivent avec des mouvements uniformément accélérés trois droites [illegible] M_1, M_2, M_3 et à une [illegible] de A, A_1, A_2, A_3. Comment se déplace le centre de gravité des trois points ?

2331. — On donne trois points O, A et B [illegible] par un fil. Un point peut descendre le long du fil, on y suspend un poids P ; position d'équilibre.

2332. — La projection de l'axe d'un couple sur une droite est égale à la somme des moments des forces du couple par rapport à la droite.

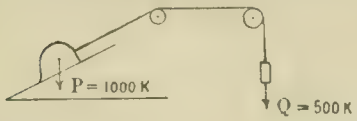
2333. — On donne trois axes fixes dans l'espace. Lieu des segments de longueur constante ayant des moments donnés par rapport à ces trois axes.

2334. — On donne un tétraèdre ; aux centres de gravité des faces, on applique des forces normales à ces faces et orientées du même côté. Montrer que le système est en équilibre.

2335. — On considère un ellipsoïde et les rayons vecteurs issus du centre. Lieu de ces rayons vecteurs pour que leur moment par rapport à une droite donnée soit constant.

2336. — Equation générale des cordes constantes d'une sphère qui ont un moment donné par rapport à une droite donnée.

2337. — Equilibre d'une barre pesante OA dont une extrémité O est fixe et dont l'autre est chargée d'un poids P et soumise à une tension T par le moyen d'une corde passant par un point B. Le point B est dans le plan horizontal du point O.



2338. — Un corps pesant 1000 k. reposant sur un plan d'inclinaison α est attaché à un cordon qui passe sur deux poulies et supporte un poids de 500 k. Quelle doit être la valeur de α pour qu'il y ait équilibre?

2339. — Une balance repose sur un plan incliné ; la pesée faite avec cette balance sera-t-elle exacte ? Dans quel plateau doit-on mettre le poids le plus léger pour que l'aiguille du fléau soit sur le zéro de la graduation ? Etablir l'équation d'équilibre dans ce cas.

2340. — Une échelle pèse 40^k ; elle est appliquée contre un mur, son pied est à 3^m du pied du mur, la hauteur du point d'appui est de 4^m. Quelle est la force qu'il faudrait appliquer horizontalement au pied de l'échelle pour qu'elle ne glisse pas quand un homme du poids de 75^k est au $\frac{2}{3}$ à partir du pied.

2341. — Une barre AB a pour longueur 3^m et pour poids 50^k. Elle est mobile dans un plan vertical autour d'un point O, tel que $OA = 1^m$, $OB = 2^m$. En A est exercée une traction horizontale de 20^k, en B une traction verticale de 150^k ; position d'équilibre du système.

2342. — Une tige AB homogène pesante repose en A sur le sol. On exerce en B une traction horizontale pour la relever. Position d'équilibre.

QUESTIONS PROPOSÉES

972. — Trouver le lieu des sommets des tétraèdres circonscrits à une quadrique donnée et tels que chacune des hauteurs soit la normale au point de contact de la face correspondante.

ROUYER.

973. — Par un point P de l'axe focal d'une conique (S) on mène deux droites rectangulaires qui rencontrent (S) en A, B et C, D. Montrer que la conique (S') passant par A, B, C, D, et tangente à la tangente en un sommet de l'axe focal de la conique (S) est aussi tangente à la tangente en l'autre sommet, et que les droites AB et CD tournant autour de P, le point de rencontre des autres tangentes communes aux coniques (S) et (S') décrit une droite.

Que deviennent ces propositions quand le point fixe P occupe une position quelconque par rapport à (S) et que les droites AB et CD ne sont pas assujetties à être rectangulaires ?

VASSILIEF.

974. — Un microscope supposé réduit à deux lentilles simples est caractérisé par les données suivantes :

Distance des deux lentilles ou longueur de l'instrument . . . . . $b = 240^{mm}$.
Distance focale de l'objectif. . . . . $\varphi = 6^{mm},4$.
Distance focale de l'oculaire . . . . . $f = 15^{mm}$.
Distance à laquelle regarde l'observateur. . . . . $\Delta = 250^{mm}$.

Calculer la puissance et le grossissement de l'instrument.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

915. — 1° *Établir directement les formules :*

$$C_{m-p}^{0}C_m^{m-p} - C_{m-p+1}^{1}C_m^{m-p+1} + C_{m-p+2}^{2}C_m^{m-p+2} - \ldots + (-1)^p C_m^p C_m^m = 0,$$

$$C_{m-p}^{0}C_m^{m-p} + C_{m-p+1}^{1}C_m^{m-p+1} + C_{m-p+2}^{2}C_m^{m-p+2} + \ldots + C_m^p C_m^m = 2^p C_m^p.$$

2° *Montrer que le nombre des combinaisons de m lettres p à p qui contiennent k lettres déterminées ($k = p$) est C_{m-k}^{p-k}. En déduire la relation $C_m^k C_{m-k}^{p-k} = C_m^p C_p^k$ et appliquer cette relation à la démonstration des deux formules précédentes.*

1. On a $\quad C_{m-p+q}^{q} = \dfrac{m-p+q}{q!\,(m-p)!}, \qquad C_{m-p+q}^{p-q} = \dfrac{m!}{(m-p+q)!\,(p-q)!},$

d'où en multipliant membre à membre,

$$C_{m-p+q}^{q}C_{m-p+q}^{p-q} = \frac{m!}{q!\,(m-p)!\,(p-q)!} = \frac{m!}{p!\,(m-p)!}\cdot\frac{p!}{q!\,(p-q)!},$$

ou $\qquad C_{m-p+q}^{q}C_{m-p+q}^{p-q} = C_m^p C_p^q.$

Dans cette égalité donnons successivement à q les valeurs $0, 1, 2, \ldots p$; nous voyons alors que les premiers membres des égalités proposés peuvent s'écrire

$$C_m^p C_p^0 - C_m^1 + C_m^2 - \ldots + (-1)^p C_m^p \qquad \text{et} \qquad C_m^p C_p^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^p.$$

D'autre part, si dans l'identité

$$(1+x)^m \equiv C_p^0 + C_p^1 x + C_p^2 x^2 + \ldots + C_p^p x^p,$$

on fait successivement $x = -1$, puis $x = 1$, on a

$$0 = C_p^0 + C_p^1 + C_p^2 - \ldots + (-1)^p C_p^p, \qquad 2^p = C_p^0 + C_p^1 + C_p^2 + \ldots + C_p^p.$$

Les formules proposées sont donc établies.

2. Parmi toutes les combinaisons de m lettres $a_1, a_2, \ldots a_m$ p à p, considérons celles qui contiennent les k lettres $a_1, a_2, \ldots, a_k$, puis supprimons-y ces k lettres, il nous reste des combinaisons des $m-k$ lettres $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_m$ $p-k$ à $p-k$, toutes différentes. Je dis que nous les avons toutes. En effet, imaginons une combinaison quelconque des $m-k$ lettres $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_m$ $p-k$ à $p-k$; ajoutons-y les k lettres $a_1, a_2, \ldots, a_k$, nous obtenons une combinaison de m lettres p à p. Or celle-ci a été considérée plus haut, on y a supprimé les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_k$, on a donc formé la combinaison de $p-k$ lettres imaginée.

Donc le nombre des combinaisons de m lettres p à p qui contiennent k lettres déterminées est égal au nombre des combinaisons de $m-k$ lettres $p-k$ à $p-k$, soit à C_{m-k}^{p-k}.

Cela posé, à toute combinaison (α) de m lettres k à k correspondent C_{m-k}^{p-k} combinaisons de m lettres p à p. Supposons écrites toutes les combinaisons de m lettres p à p qui correspondent à chacune des combinaisons (α). Nous formons ainsi un tableau de $C_m^k C_{m-k}^{p-k}$ combinaisons. Il est aisé de voir que dans ce tableau, chaque combinaison de m lettres p à p est écrite C_p^k fois. En effet, imaginons une combinaison (β) de m lettres p à p ; avec les p lettres de cette combinaison, nous pouvons former C_p^k combinaisons k à k, et à chacune de ces combinaisons on a fait correspondre une fois la combinaison (β).

On a donc $\qquad C_m^k C_{m-k}^{p-k} = C_m^p C_p^k.$

Remplaçons dans cette formule k par $p-q$, nous avons

$$C_m^{p-q} C_{m-p+q}^{q} = C_m^p C_p^{p-q}, \qquad \text{ou} \qquad C_{m-p+q}^{q} C_m^{p-q} = C_m^p C_p^q,$$

et on achève la démonstration comme plus haut.

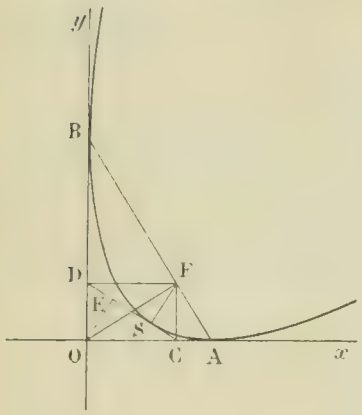
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

901. — *Une parabole de grandeur constante se déplace dans son plan de façon à rester tangente à deux droites rectangulaires de ce plan* Ox *et* Oy. *On demande :*

1° *Les enveloppes de la corde des contacts* AB, *de la directrice et de l'axe ;*

2° *Le lieu du point de rencontre de* AB *avec la directrice, les lieux du pied de l'axe sur la directrice, du sommet et du foyer.*

Puisque les tangentes Ox et Oy sont perpendiculaires, la directrice d'une quelconque des paraboles considérées passe par le point O, et son foyer est le point F, pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur la corde des contacts AB.



La tangente au sommet passe par les projections C et D du foyer sur les tangentes Ox, Oy. Abaissons FS perpendiculaire sur CD ; le point S est le sommet et $FS = \frac{p}{2}$, p désignant le paramètre constant de toutes nos paraboles.

Menons OE perpendiculaire sur CD, on a $OE = FS = \frac{p}{2}$, et soit φ l'angle de Ox avec OE. L'équation de la droite CD est

$$x\cos\varphi - y\sin\varphi - \frac{p}{2} = 0,$$

et par suite les coordonnées du point F sont

$$x = \frac{p}{2\cos\varphi}, \qquad y = \frac{p}{2\sin\varphi}.$$

D'autre part, la corde AB passe par le point F, elle est perpendiculaire à OF : donc son équation est

$$y - \frac{p}{2\sin\varphi} = \operatorname{tg}\varphi\left(x - \frac{p}{2\cos\varphi}\right)$$

ou

$$\text{(AB)} \qquad x\sin\varphi + y\cos\varphi - \frac{p}{\sin 2\varphi} = 0.$$

Enfin l'axe qui passe par le point F et qui est perpendiculaire à CD a pour équation

$$y - \frac{p}{2\sin\varphi} = \operatorname{tg}\varphi\left(x - \frac{p}{2\cos\varphi}\right)$$

ou

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi + p\cot 2\varphi = 0.$$

I. — 1. *Enveloppe de la corde* AB.

Nous avons trouvé pour équation de cette droite

$$(1) \qquad x\sin\varphi + y\cos\varphi - \frac{p}{\sin 2\varphi} = 0.$$

Pour avoir l'équation de son enveloppe il faudrait éliminer φ entre cette équation et l'équation dérivée par rapport à φ.

$$x\cos\varphi - y\sin\varphi - \frac{2p\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi} = 0.$$

Mais au lieu de s'engager dans cette élimination pénible, il est plus simple de résoudre ces deux équations par rapport à x et y ; nous obtenons ainsi les coordonnées d'un point quelconque de l'enveloppe en fonction de la variable φ

$$x = \frac{p(2 - 3\cos^2\varphi)}{2\sin^2\varphi\cos\varphi}, \qquad y = \frac{p(2 - 3\sin^2\varphi)}{2\sin\varphi\cos^2\varphi}.$$

Prenons les dérivées par rapport à φ, nous avons

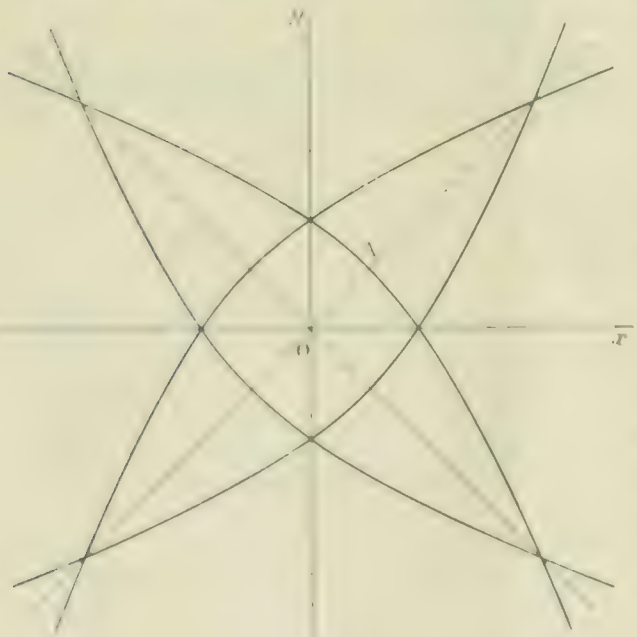
$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{p}{2} \cdot \frac{2 - 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos^2\varphi}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = -\frac{p}{2} \cdot \frac{2 - 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}.$$

Nous pouvons remarquer en passant que le coefficient angulaire de la tangente en un point de la courbe qui est égal au quotient de $\frac{dy}{d\varphi}$ par $\frac{dx}{d\varphi}$ est égal à $-\operatorname{tg}\varphi$, comme le montrait d'ailleurs l'équation (1) de la tangente.

Pour construire la courbe, nous devons faire varier φ dans un intervalle quelconque d'étendue égale à 2π et étudier les variations correspondantes de x et de y. Or, en changeant φ en $\pi - \varphi$, x et y changent de signe, donc la courbe est symétrique par rapport à l'origine, il suffira donc de faire varier φ dans un intervalle quelconque d'étendue égale à π, et de prendre le symétrique de la portion de courbe obtenue par rapport au point O.

De plus en changeant φ en $-\varphi$, x ne change pas, y change de signe, donc la courbe est symétrique par rapport à Ox, et enfin en changeant φ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$, x se change en y et y en x, la courbe est donc symétrique par rapport à la première bissectrice des axes $(x - y = 0)$.

De tout cela il résulte qu'il suffit de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{4}$, et de prendre le symétrique par rapport à la première bissectrice et par rapport aux deux axes.



Dans cet intervalle $\frac{dx}{d\varphi}$ est sans cesse positif et $\frac{dy}{d\varphi}$ sans cesse négatif, car

$$2 - 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 2 - \frac{3}{4}\sin^2 2\varphi;$$

donc x va sans cesse en croissant, et s'annule quand φ prend la valeur α définie par $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, y est décroissant et toujours positif.

φ	0		α		$\frac{\pi}{4}$
x	$-\infty$	croît	0	croît	$\frac{p}{\sqrt{2}}$
y	$+\infty$		décroît		$\frac{p}{\sqrt{2}}$

La branche infinie correspondante à $\varphi = 0$ est parabolique et dans la direction Ox, car le rapport $\frac{y}{x}$ est nul pour $\varphi = 0$. La tangente au point A $\left(x = y = \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$ a pour coefficient angulaire -1.

On peut obtenir aisément l'équation tangentielle de cette courbe. Il suffit d'écrire que les deux équations

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi - \frac{p}{\sin 2\varphi} = 0, \qquad ux + vy + w = 0$$

ont leurs coefficients proportionnels, ce qui donne

$$\sin\varphi = \lambda u, \qquad \cos\varphi = \lambda v, \qquad \frac{p}{\sin 2\varphi} = \lambda w$$

et d'éliminer φ entre ces trois équations.

On a d'abord $1 = \lambda^2(u^2 + v^2)$, et en remplaçant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par λu et λv dans $\frac{p}{\sin 2\varphi} = \lambda w$,

on obtient $-\frac{p}{2\lambda^2 uv} = \lambda w$ ou $2\lambda^3 uvw = -p$. Elevons au carré, remplaçons λ^2 par $\frac{1}{u^2+v^2}$, nous avons en définitive

$$4u^2v^2w^2 - p^2(u^2+v^2)^3 = 0.$$

2. *Enveloppe de l'axe.*

Nous allons opérer d'une manière identique. Résolvons par rapport à x et y les deux équations

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi + p\operatorname{cotg}2\varphi = 0, \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{2p}{\sin^2 2\varphi} = 0,$$

nous avons

$$x = \frac{p(2\cos^4\varphi - 3\cos^2\varphi - 2)}{2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}, \qquad y = \frac{p(2\sin^4\varphi - 3\sin^2\varphi + 2)}{2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}$$

et

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{p(\cos^2\varphi + 1)(\cos^2\varphi - 2)\left(\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\right)}{\sin^3\varphi\cos^3\varphi}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{p(\cos^2\varphi + 1)(\cos^2\varphi - 2)\left(\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\right)}{\cos^3\varphi\sin^3\varphi}.$$

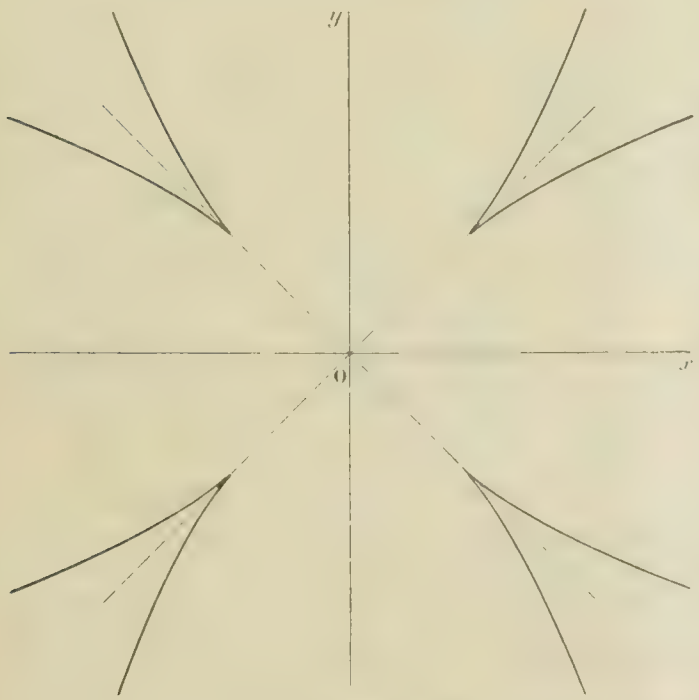
Le coefficient angulaire de la tangente est égal à tg φ.

Comme précédemment la courbe est symétrique par rapport aux deux axes et à leurs bissectrices ; **il suffit de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{4}$ et alors x et y décroissant tous deux de $+\infty$ à $p\sqrt{2}$.**

On en déduit aisément la forme de la courbe et en achevant par symétrie, on reconnaît qu'elle admet quatre points de rebroussements situés sur les bissectrices des axes et ayant précisément ces bissectrices comme tangentes.

La branche infinie relative à $\varphi = 0$ est parabolique et dans la direction Ox. Enfin l'équation tangentielle de cette courbe est

$$4u^2v^2w^2 - p^2(u^2 + v^2 + u^2 + v^2) = 0.$$



II. — 1. *Lieu du point de rencontre de* AB *avec la directrice.*

Eliminons φ entre les équations de AB et de la directrice

$$x\sin\varphi + y\cos\varphi - \frac{p}{\sin 2\varphi} = 0$$

et

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = 0.$$

De la deuxième on tire

$$\frac{\sin\varphi}{x} = \frac{\cos\varphi}{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} = \lambda,$$

d'où

$$\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation de AB, nous obtenons

$$4x^2y^2(x^2+y^2) - p^2(x^2+y^2)^3 = 0.$$

Pour construire cette courbe du huitième degré, nous passons en coordonnées polaires, ce qui nous donne $\rho^2 = \frac{4p^2}{\sin^2 4\omega}$, qui se décompose en $\rho = \frac{2p}{\sin 4\omega}$ et $\rho = \frac{-2p}{\sin 4\omega}$. L'une de ces équations suffit pour représenter toute la courbe, car chacune d'elles se déduit de l'autre en changeant ρ en $-\rho$ et ω en $\pi + \omega$.

Nous prendrons l'équation $\rho = \frac{2p}{\sin 4\omega}$.

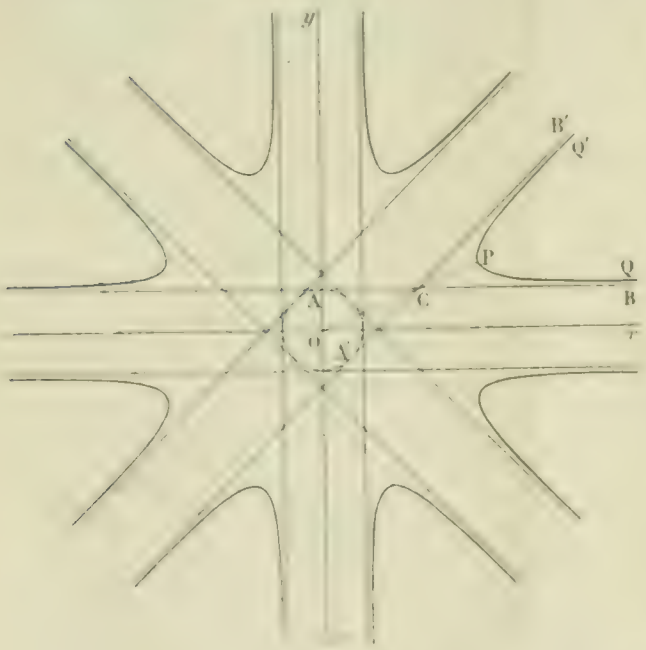
En changeant ω en $-\omega$, ρ ne change pas ; donc la courbe est symétrique par rapport au pôle

en changeant ω en $-\omega$ et en $\frac{\pi}{2}-\omega$, ρ change simplement de signe ; donc la courbe est symétrique par rapport à Oy et à la deuxième bissectrice des axes. Par suite la courbe est symétrique par rapport aux deux axes et à leurs deux bissectrices.

Mais si l'on change encore ω en $\frac{\pi}{4}-\omega$, ρ ne change pas ; donc la courbe est symétrique par rapport à la droite $\omega=\frac{\pi}{8}$. En conséquence pour avoir toute la courbe il suffit de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{8}$, de prendre le symétrique de l'arc obtenu par rapport à la droite $\omega=\frac{\pi}{8}$, puis de construire le symétrique de toute la portion obtenue par rapport aux axes et à leurs bissectrices.

Or quand ω croît de 0 à $\frac{\pi}{8}$, ρ décroît de $-\infty$ à $2p$.

Cherchons l'asymptote, elle sera déterminée par la limite de $\rho\sin(-\omega)$ ou $-\frac{2p\sin\omega}{\sin 4\omega}$ pour $\omega=0$. Dans la recherche de cette limite, nous pouvons remplacer $\sin\omega$ et $\sin 4\omega$ par ω et 4ω, par suite la limite est $-\frac{p}{2}$. Considérons la direction Ox' dont l'angle polaire est égal à $-\frac{\pi}{2}$, l'asymptote est perpendiculaire à Ox' au point A qui a pour abscisse $-\frac{p}{2}$.



Pour avoir la position de la courbe par rapport à l'asymptote, je considère la différence

$$D=\frac{2p\sin\omega}{\sin 4\omega}-\frac{p}{2}=p\cdot\frac{\sin 4\omega-4\sin\omega}{2\sin 4\omega}$$

et je détermine son signe pour les valeurs infiniment petites positives de ω. En appliquant la formule de Maclaurin, nous pouvons écrire

$$\sin\omega=\omega-\frac{\omega^3}{6}+\lambda\omega^5,\qquad \sin 4\omega=\omega-\frac{64\omega^3}{6}+\mu\omega^5,$$

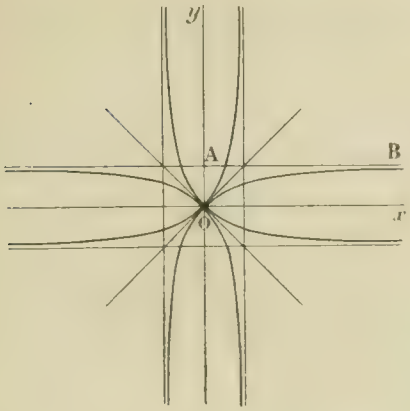
λ et μ restant finis quand ω tend vers 0 ; on voit alors que la différence D a le signe de $-\omega^5$ pour les valeurs infiniment petites de ω, par suite l'x de la courbe est inférieure à l'x de l'asymptote.

Nous obtenons ainsi la branche de courbe PQ asymptote à la droite AB. Prenons le symétrique par rapport à la droite $\omega=\frac{\pi}{8}$, nous avons la branche PQ' asymptote à AB' ; cette droite AB' est parallèle à la première bissectrice.

Il ne reste plus qu'à prendre le symétrique par rapport aux deux axes et à leurs bissectrices.

2. *Lieu du point de rencontre de l'axe et de la directrice.*

En opérant comme dans le cas précédent, on trouve aisément que le lieu est une courbe du sixième degré ayant pour équation rectiligne $4x^2y^2(x^2-y^2)-p^2(x^2-y^2)^2=0$,
et pour équation polaire $\rho=p\operatorname{cotg}2\omega$.



Elle est symétrique par rapport aux deux axes et à leurs bissectrices, et il suffit de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{4}$, alors ρ décroît de $+\infty$ à 0; la branche correspondante admet pour asymptote la droite AB parallèle à Ox et d'ordonnée $\frac{p}{2}$, et cette branche est tangente à l'origine à la première bissectrice des axes. On en déduit toute la courbe par symétrie.

3. *Lieu du sommet.*

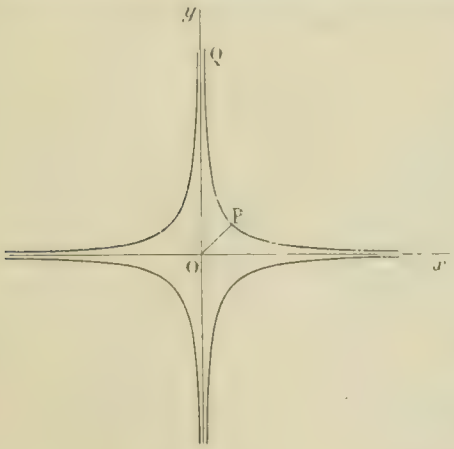
Le sommet est le point de rencontre de l'axe et de la droite CD, par conséquent pour avoir le lieu du sommet il faut éliminer φ entre les équations de ces deux droites

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi + p\,\mathrm{cotg}\,2\varphi = 0, \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{p}{2} = 0.$$

Résolvons ces deux équations par rapport à x et y, nous obtenons

$$(2) \qquad x = \frac{p\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}, \qquad y = \frac{p\cos^2\varphi}{2\sin\varphi},$$

ce qui nous donne les coordonnées d'un point de la courbe en fonction du paramètre φ. On reconnait aisément que la courbe est symétrique par rapport aux deux axes et à leurs bissectrices, et si l'on fait



varier φ de 0 à $\frac{\pi}{4}$, x croît de 0 à $\frac{p}{2\sqrt{2}}$ et y décroît de $+\infty$ à $\frac{p}{2\sqrt{2}}$: on a ainsi la branche de courbe PQ, et on achève par symétrie.

On peut d'ailleurs former l'équation rectiligne de cette courbe. Des équations (2), on tire d'abord

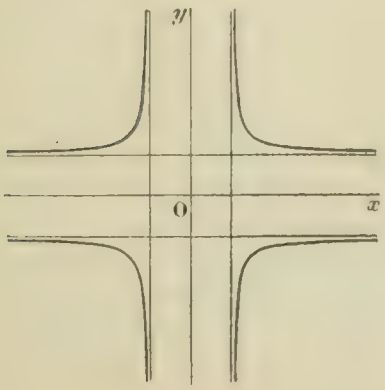
$$xy = \frac{p^2}{4}\sin\varphi\cos\varphi$$

puis $x^2 + y^2 = \frac{p^2}{4}\cdot\frac{\sin^6\varphi + \cos^6\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \frac{p^2}{4}\cdot\frac{1 - 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$,

et en y remplaçant $\sin\varphi\cos\varphi$ par $\frac{4xy}{p^2}$, il vient

$$x^2y^2\left(x^2 + y^2 + \frac{3p^2}{4}\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^6 = 0.$$

4. *Lieu du foyer.*



Les coordonnées du foyer sont

$$x = \frac{p}{2\cos\varphi}, \qquad y = \frac{p}{2\sin\varphi}.$$

Le lieu décrit par ce point est symétrique par rapport aux deux axes et à leurs bissectrices ; on en construit aisément la huitième partie en faisant varier φ de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

Cette courbe est appelée *Kreuzcurve*, son équation est

$$4x^2y^2 - p^2(x^2 - y^2) = 0.$$

J.-D. DUFAUT, école primaire supérieure d'Aiguillon.

Bonnes solutions : MM. Balaban étudiant à Bucarest ; Pelvoisin

920. — *On considère les cercles tangents aux axes de coordonnées et à une droite donnée*

$$(AB) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Montrer analytiquement qu'il existe toujours quatre cercles tangents à ces trois droites et chercher la relation, indépendante de a, b et de l'angle θ des axes qui existe entre leurs rayons :

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$$

Nous supposerons, pour fixer les idées, que les directions positives des axes aient été choisies de telle sorte que a et b soient positifs et nous nous appuierons sur ce fait, facile à établir par le calcul, qu'il y a deux systèmes de cercles tangents aux deux axes : l'un, dont le lieu des centres est la première bissectrice ; l'autre, dont le lieu des centres est la deuxième bissectrice.

Cela posé, l'équation d'un cercle du premier système est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 - 2(x - \alpha)(y - \alpha)\cos\theta - \rho^2 = 0,$$

avec la condition $\rho^2 = \alpha^2 \sin^2\theta$ qui exprime qu'il est tangent aux axes : en écrivant qu'il est tangent à la droite AB, c'est-à-dire que la distance du centre à cette droite est égale à ρ, nous avons

$$\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{b} - 1\right)^2 \sin^2\theta = \rho^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2\cos\theta}{ab}\right),$$

ou

$$\alpha^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - 2\alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + 1 = \alpha^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2\cos\theta}{ab}\right),$$

puisque $\rho^2 = \alpha^2 \sin^2\theta$. Cette équation se simplifie et s'écrit

$$\frac{4\alpha^2\cos^2\frac{\theta}{2}}{ab} - 2\alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + 1 = 0,$$

elle donne pour α deux valeurs réelles et montre, en passant, qu'il y a toujours deux cercles du premier système tangents à la droite AB. L'équation bicarrée en ρ qui donne les carrés des rayons de ces cercles s'obtient immédiatement, en isolant le terme en α, élevant au carré, puis remplaçant α^2 par $\frac{\rho^2}{\sin^2\theta}$;

nous trouvons ainsi

$$\left(\frac{\rho^2}{ab\sin^2\frac{\theta}{2}} + 1\right)^2 = \frac{4\rho^2}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2,$$

par conséquent, en appelant r et r_1 ces deux rayons, nous avons aisément

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{4}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{2}{ab\sin^2\frac{\theta}{2}}, \qquad \frac{1}{rr_1} = \frac{1}{ab\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

et, par suite

$$\frac{1}{rr_1} = \frac{1}{ab\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

nous avons donc de suite le carré de la différence

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)^2 = \frac{4}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{4}{ab\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

De même, les cercles du second système ont pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 + 2(x - \alpha)(y - \alpha)\cos\theta - \rho^2 = 0,$$

avec la condition $\rho^2 = \alpha^2 \sin^2\theta$ qui exprime le contact avec les axes. En écrivant que le centre est à une distance de la droite AB égale au rayon, nous aurons la condition de contact avec cette droite ; nous trouvons ainsi

$$\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{b} - 1\right)^2 \sin^2\theta = \rho^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2\cos\theta}{ab}\right).$$

et, comme $\rho^2 = \alpha^2 \sin^2\theta$, $\left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{b} - 1\right)^2 - \alpha^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2\cos\theta}{ab}\right) = 0$,

cette équation s'écrit $$\frac{4\alpha^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}{ab} + 2\alpha\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - 1 = 0\,;$$

elle donne pour α deux valeurs réelles et de signes contraires et montre qu'il y a deux cercles du second système tangents à la droite AB. L'équation bicarrée en ρ qui donne les carrés des rayons de ces cercles s'obtient immédiatement, en isolant le terme en α, élevant au carré, et remplaçant α^2 par $\frac{\rho^2}{\sin^2\theta}$;

nous trouvons ainsi $$\left(\frac{\rho^2}{ab\cos^2\frac{\theta}{2}} - 1\right)^2 = \frac{4\rho^2}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2\,;$$

par conséquent, en appelant r_2 et r_3 ces deux rayons, nous avons

$$\frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{4}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{2}{ab\cos^2\frac{\theta}{2}}, \quad \frac{1}{r_2^2 r_3^2} = \frac{1}{a^2b^2\cos^4\frac{\theta}{2}}, \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{1}{r_2 r_3} = \frac{1}{ab\cos^2\frac{\theta}{2}}\,;$$

nous avons donc de suite le carré de la somme des rayons

$$\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)^2 = \frac{4}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{4}{ab\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

Il est alors facile de montrer que $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)^2$;

nous déduisons donc de là, la relation annoncée $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$.

PELVOISIN.

PHYSIQUE ET CHIMIE

905. — *Un mélange de gaz* M *contient du formène, de l'hydrogène et de l'oxyde de carbone. Dans un récipient de* 110^{lit}, *on introduit* 10^{lit} *de ce mélange et* 100^{lit} *d'air mesurés dans les conditions normales. On provoque l'explosion au moyen d'une étincelle électrique. Les produits de la combustion* P *se composent :*

a) de 9^{gr},6 *d'eau qui se condense quand on ramène les produits* P *à* 0° ;

b) d'un mélange gazeux m *qui, dans les conditions normales, occupe un volume de* 95^{lit} *et a la composition suivante en volume :*

Acide carbonique	6	95
Oxygène	9	
Azote	80	

1° *On demande de calculer la composition en volume du mélange* M.

2° *L'explosion s'est effectuée dans le récipient de* 110^{lit} *à volume constant. Immédiatement après l'explosion, la température a atteint* 1 600°. *On demande de calculer la pression qui régnait dans le récipient à ce moment.*

On admettra que l'eau se trouvait à l'état de vapeur assimilable à un gaz parfait. On négligera la dissociation de l'acide carbonique et de la vapeur d'eau.

3° *L'eau qui figure dans les produits* P *étant éliminée par un produit quelconque, on reste en présence du mélange* m. *Le mélange est introduit à* 0° *et* 760^{mm} *dans un récipient où on peut le chauffer à pression constante et où se trouve une certaine masse de carbonate de chaux. On chauffe à la température de* 650° *en maintenant la pression de* 760^{mm} *de mercure. Le carbonate de chaux se décompose-t-il ? Si oui, sur quelle quantité de carbonate portera la décomposition ? Calculer le volume occupé par les gaz au moment où cette décomposition s'arrêtera.*

Les résultats doivent être donnés sous forme numérique.

Données : Composition de l'air en volume : on prendra la composition approchée :

80 d'azote, 20 d'oxygène.

Densité de l'hydrogène par rapport à l'air 0,069

Masse du litre d'air 1gr,29

Coefficient de dilatation des gaz . . . . . $\frac{1}{273}$

Poids atomiques : H = 1, O = 16, C = 12, Ca = 40.

Tension de dissociation du carbonate de chaux à 625 . . 56mm

(École des mines de St-Étienne, concours de 1899.)

1. Puisqu'il reste de l'oxygène, tout est brûlé, ce que représentent les équations

$$x\,CH^4 + 2O^2 = CO^2 + 2H^2O, \qquad y\left(H^2 + \frac{1}{2}O^2 = H^2O\right), \qquad z\left(CO + \frac{1}{2}O = CO^2\right).$$

Désignons par V le volume moléculaire. Les données permettent d'écrire :

Volume du mélange . . . . . $(x + y + z)V = 10,$

Volume du gaz carbonique produit . . $(x + z)V = 6,$

Volume de l'oxygène employé . . . $\left(2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)V = 11,$

Poids de l'eau produite . . . . . $(2x + y)18 = 9{,}6.$

Les trois premières équations suffisent pour déterminer la composition du mélange :

Formène : $xV = 4.$ Hydrogène : $yV = 4.$ Oxyde de carbone : $zV = 2.$

La quatrième est inutile ou permet de préciser la valeur adoptée pour V : $V = 22^{lit},5$

2. Si l'eau était à l'état gazeux dans les mêmes conditions que le mélange m, elle occuperait un volume $(2x + y)V = 12^{lit}$ et le volume total des produits P à 0° et sous la pression d'une atmosphère serait $95 + 12 = 107^{cc}$. Dans un récipient de 110^{cc} la pression devient $\frac{107}{110}$ et, si la température est 1600°, elle devient $\frac{107}{110}\left(1 + \frac{1600}{273}\right) = 6^{atm},67.$

3. L'oxygène et l'azote résiduels occupent, dans les conditions normales, un volume de 89^{lit}. Soit U le volume qu'occuperait, toujours dans les conditions normales, le gaz carbonique nécessaire pour produire, une fois répandu dans le volume total $89 + U$, la pression de 56mm, pression qui ne sera pas modifiée par le chauffage à 650° puisqu'il a lieu sous pression constante : U sera donné par la loi de Mariotte : $U \times 760 = (89 + U) \times 56,$ d'où $U = 7^{lit},08.$

Or il y en a déjà 6^{lit} dans le mélange m ; il en vient donc $1^{lit},08$ de la réaction

$$x\,CO^2Ca = CO^2 + CaO,$$

donc $x = 22^{lit},5 \times 1^{lit},08,$ d'où $x\,CO^2Ca = \frac{1{,}08}{22{,}5} \times 100 = 4^{gr},8.$

Enfin, le volume occupé par les gaz est donné par la formule

$$W = 96{,}08\left(1 + 650\,\frac{1}{273}\right) = 324^{cc},84.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

975 — A et B sont deux points fixes par lesquels on mène deux droites variables et parallèles, AM et BN. Trouver le lieu des foyers des coniques tangentes à AB et admettant AM et BN comme tangentes aux sommets situés sur un de leurs axes.

976 — Calculer la surface du parallélogramme déterminé par les quatre droites $ax + by = \pm c$ et $a'x + b'y = \pm c'$.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

11e Année. N° 2. Novembre 1900.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

PARAMÈTRE TANGENTIEL D'UN CONE DU SECOND ORDRE

par M. G. Fontené.

1. Je me propose principalement d'établir le fait suivant :

Soit une conique fixe S, *et soit un cercle* C *dont le plan est parallèle au plan de la conique et dont le centre est sur la perpendiculaire au plan de la conique menée par le centre de cette courbe ; si l'on considère les cônes du second ordre qui passent par la conique et qui ont leurs sommets sur le cercle* C, *si on les suppose indéformables, et si on les fait passer par une conique quelconque* S′ *de manière que leurs sommets soient encore dans un plan parallèle au plan de la conique, ces sommets seront encore sur un cercle* C′ *ayant son centre sur la perpendiculaire au plan de la conique* S′ *menée par le centre de cette courbe.* Si S ou S′ est une parabole, le cercle correspondant est remplacé par une parallèle à la directrice.

2. La forme d'un cône du second ordre dépend de deux paramètres, dont l'un est particulièrement intéressant. Les axes étant rectangulaires, l'équation du cône étant $f = 0$ avec le sommet à l'origine, l'équation du cône isotrope de même sommet étant $\varphi \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 0$ *sans facteur constant parasite*, soient Δ, Θ, Θ' les coefficients de λ^3, λ^2, λ dans le discriminant de la forme $\lambda f + \varphi$; ces invariants étant des degrés 3, 2, 1 par rapport aux coefficients de f, *les rapports des quantités*

$$\sqrt[3]{\Delta}, \qquad \sqrt[2]{\Theta}, \qquad \Theta'$$

sont indépendants du facteur arbitraire qui entre dans f et sont, par suite, complètement déterminés par la forme du cône.

Nous appellerons *paramètre tangentiel* d'un cône du second ordre la quantité

$$I = \frac{\Theta}{\sqrt[3]{\Delta^2}} ;$$

dans l'hypothèse $I = 0$, ou $\Theta = 0$, le cône est harmoniquement inscrit au cône isotrope de même sommet, c'est-à-dire qu'il admet des trièdres trirectangles circonscrits.

3. Voici une expression géométrique de l'invariant I.

Soit un cône du second ordre sur lequel on trace une conique. S'il s'agit d'une conique à centre, en désignant par a^2 et b^2 les carrés des demi-axes de la conique, par γ la distance du sommet du cône au plan *de la conique, par* P *la puissance du sommet du cône par rapport à la sphère orthoptique de la conique, on a*

$$(1) \qquad I = \frac{P}{\sqrt[3]{a^2 b^2 \gamma^2}} .$$

S'il s'agit d'une parabole, en désignant par p le paramètre de la parabole, par γ la distance du sommet du cône au plan de la parabole, par d la distance du sommet du cône au plan orthoptique de la parabole, distance comptée positivement lorsque ce sommet est séparé de la courbe par le plan orthoptique, on a

$$(1') \qquad I = \frac{2d}{\sqrt[3]{p\gamma^2}} .$$

Soit d'abord une conique à centre. L'origine des coordonnées étant au sommet du cône, les axes Ox et Oy étant pour plus de simplicité parallèles aux axes de la conique, les équations de la conique sont

$$z = \gamma, \qquad A(x - \alpha)^2 + B(y - \beta)^2 + C = 0,$$

et l'on a les deux cônes

$$\begin{cases} f = A\gamma(x - \alpha z)^2 + B\gamma(y - \beta z)^2 + Cz^2 = 0, \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

On peut écrire $\qquad f = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx,$

avec $\quad a = A\gamma^2, \qquad b = B\gamma^2, \qquad c = A\alpha^2 + B\beta^2 + C, \qquad f = -B\beta\gamma, \qquad g = -A\alpha\gamma,$

et l'on a $\qquad \Delta = abc - af^2 - bg^2 = AB\gamma^2(A\alpha^2 + B\beta^2 + C) - AB^2\beta^2\gamma^2 - BA^2\alpha^2\gamma^2,$

ou $\qquad \Delta = ABC\gamma^2.$

$$\Theta = (bc - f^2) + (ac - g^2) - ab = B\gamma^2(A\alpha^2 + B\beta^2 + C) - B^2\beta^2\gamma^2 + A\gamma^2(A\alpha^2 + B\beta^2 + C) - A^2\alpha^2\gamma^2 + AB\gamma^2,$$

ou encore $\qquad \Theta = AB\gamma^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + C(A + B)) = AB\gamma^2\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \frac{C}{A} + \frac{C}{B}\right);$

à cause de $\qquad A = \frac{-C}{a^2}, \qquad B = \frac{-C}{b^2}, \qquad$ on a donc

$$\Delta = \frac{C^3\gamma^2}{a^2b^2}, \qquad \Theta = \frac{C^2\gamma^2}{a^2b^2}.P.$$

L'élimination de C donne

$$I = \frac{\Theta}{\sqrt{\Delta^2}} = \frac{P\gamma^2}{a^2b^2\sqrt{\frac{\gamma^6}{a^2b^2}}} = \frac{P}{\sqrt{a^2b^2\gamma^2}}.$$

Pour passer au cas de la parabole, nous partirons par exemple du cas de l'ellipse. Si R est le rayon de la sphère orthoptique, on peut écrire

$$I = \frac{\frac{P}{R}}{\sqrt[3]{\frac{a^2b^2}{R^2}\gamma^2}};$$

en posant $\frac{b^2}{a} = p \quad (p > 0)$, ce qui donne $R = \sqrt{a(a+p)}$, on a d'ailleurs

$$\frac{a^2b^2}{R} = \frac{a^2p}{\sqrt{a(a+p)}};$$

si l'on fait croître a indéfiniment, d'une part, la quantité $\frac{P}{R}$ a pour limite le double de la distance d du sommet du cône au plan orthoptique de la parabole, cette distance étant positive lorsque le sommet du cône est séparé de la parabole par le plan orthoptique, d'autre part, la constante ci-dessus tend vers p ; on a donc la formule (1').

On a cette conséquence :

4. Le lieu des sommets des cônes de même paramètre tangentiel circonscrits à une conique à centre donnée est une surface de révolution dont l'axe est la perpendiculaire au plan de la conique menée par le centre de cette conique. La puissance P d'un point de cette surface par rapport à la sphère orthoptique de la conique est proportionnelle à la racine cubique du carré de la distance γ de ce point au plan de la conique ; cette puissance a d'ailleurs le signe de I ou le signe contraire selon qu'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole.

Pour une parabole, le lieu en question est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la directrice de la courbe. On a d'ailleurs $d = A.\gamma^2$, et A a le signe de I.

5. Le fait énoncé au début de cette note résulte également de la formule (1), les cônes considérés ayant même paramètre tangentiel.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

911. — *On donne un angle droit xOy et sur Ox deux points A, A′ symétriques l'un de l'autre par rapport au point O. Trouver l'équation générale des coniques tangentes à Oy, traçant sur Ox une involution dont A et A′ sont les points doubles et ayant pour centre commun le point de la première bissectrice qui se projette sur Ox en A.*

Cela étant, on demande :

1° *De séparer les points du plan par lesquels passent deux coniques réelles du faisceau de ceux par lesquels il passe deux coniques imaginaires ;*

2° *De trouver le lieu des points de rencontre de la parallèle à Ox menée par le point de contact de l'une de ces coniques avec Oy et des deux droites qui joignent le centre aux points de rencontre de cette conique avec Ox ; en outre, de construire ce lieu ;*

3° *De trouver le lieu du point de rencontre ordinaire de chacune de ces coniques avec le cercle osculateur au point situé sur Oy, et de construire ce lieu.*

Si nous désignons OA par a, l'équation demandée sera évidemment de la forme

$$(x-a)^2+2\lambda(x-a)(y-a)+\mu(y-a)^2+\nu=0.$$

Nous aurons successivement les relations qui existent entre les paramètres λ, μ, ν en écrivant d'abord que les deux points de rencontre avec Ox divisent harmoniquement les points A et A′, c'est-à-dire que le produit des racines de l'équation en x obtenue en annulant y dans l'équation de la conique est égal à a^2 ; puis, que l'axe des y rencontre la conique en deux points confondus, c'est-à-dire que l'équation en $y-a$ obtenue en faisant $x=0$ dans l'équation de la conique a une racine double. Le premier calcul donne $\nu=-2\lambda a^2-\mu a^2$; la seconde donne, en tenant compte de cette valeur de ν, $(\lambda+\mu)^2=\mu$. Posons alors $\mu=\rho^2$, nous aurons $\lambda+\rho^2=\pm\rho$, et il suffit de prendre un signe dans cette relation, car, prendre ensuite le second signe revient à changer ρ en $-\rho$ et ceci n'altère pas les valeurs que prend le paramètre, puisque c'est une variable indépendante. Nous avons donc finalement $\mu=\rho^2$ et $\lambda=\rho-\rho^2$; de là nous déduisons sans peine, en développant et simplifiant, l'équation générale des coniques envisagées

$$(1)\qquad x^2+2(\rho-\rho^2)xy+\rho^2y^2-2a(1+\rho-\rho^2)x-2a\rho y+a^2=0.$$

La signification géométrique de ρ est facile à apercevoir : en faisant $x=0$ dans l'équation, nous trouvons $(\rho y-a)^2=0$; $\frac{a}{\rho}$ est donc l'ordonnée du point de contact avec Oy.

1. Écrivons que la conique (1) passe par un point (x, y) donné dans le plan, nous aurons une équation du second degré en ρ qui nous donnera les paramètres des deux coniques du système qui passent au point choisi. Si ces paramètres sont imaginaires, les coniques (1) seront imaginaires ; sinon elles seront réelles, car chacune d'elles aura alors une équation réelle, un centre et un point réels distincts l'un de l'autre. Tout revient donc à étudier la réalité des racines de l'équation du second degré en ρ.

$$(y^2-2xy+2ax)\rho^2+2(xy-ax-ay)\rho+(x-a)^2=0\,;$$

la condition de réalité de ces racines est

$$y(x-a)-ax^2-(x-a)^2y^2-2xy+2ax=0,$$

ou (2) $$x(x-2a)(2y(x-a)-a(2x-a))=0.$$

La ligne séparatrice, qui est d'ailleurs l'enveloppe des coniques du système, se compose de l'axe des x, de la droite $x=2a$ et de l'hyperbole $2xy-2ax-2ay+a^2=0$; celle-ci est symétrique par rapport à la première bissectrice, et a pour centre le point C $(x=a,\ y=a)$, centre commun à toutes les coniques du système. Rien n'est donc plus facile que de placer la séparative totale et de distinguer les régions du plan où passent les coniques réelles des autres. La figure 1 indique cette séparation, les régions hachurées sont celles où ne passe aucune conique réelle du système considéré : elle montre en outre une ellipse du faisceau, dans une certaine position.

2 L'équation de la parallèle à Ox menée par le point de contact avec Oy est $\rho y-a=0$. Portons alors les axes parallèlement à eux-mêmes au centre commun des coniques, c'est-à-dire changeons x en $x+a$ et y en $y+a$; l'équation précédente devient $\rho(y+a)-a=0$, et celle de la conique, $x^2+2\lambda xy+\mu y^2+\nu=0$, ou, en remplaçant λ, μ, ν par leurs valeurs en fonction de ρ,

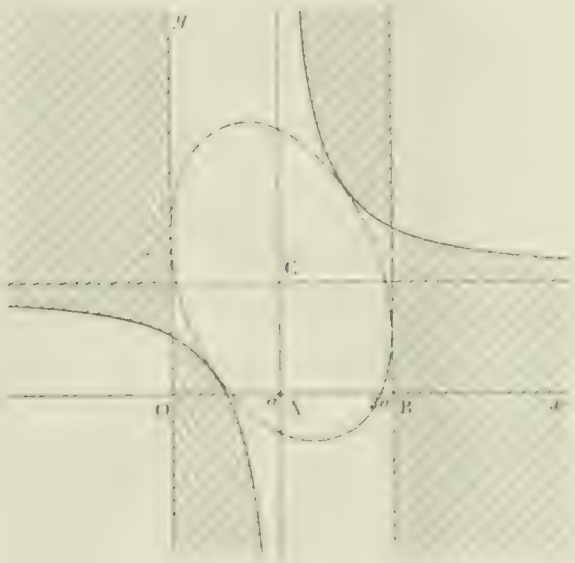


Fig. 1

$$x^2+2(\rho-\rho^2)xy+\rho^2y^2-a^2(2\rho-\rho^2)=0\,;$$

d'autre part, l'ancien axe des x a pour équation actuelle $y+a=0$ et une combinaison homogène de cette équation avec celle de la conique est aisée à former ; c'est

$$x^2+2(\rho-\rho^2)xy+\rho^2y^2+(2\rho-\rho^2)y^2=0,$$

ou $$x^2+2(\rho-\rho^2)(xy-y^2)=0\,;$$

c'est l'équation du couple de droites qui joignent le centre aux deux points de rencontre de la conique variable avec l'ancien axe des x. Nous aurons donc le lieu cherché en éliminant ρ entre cette équation et l'équation $\rho(y+a)-a=0$; ce calcul est immédiat et donne

(3) $$x^2(y+a)^2+2ay(xy-y^2)=0.$$

Sous cette forme, nous voyons de suite que l'origine et le point à l'∞ sur Ox sont des points doubles ; en outre, la courbe est tout entière dans la région négative de la droite $x-y=0$ et touche cette droite au point $x=y=-a$, c'est-à-dire à l'ancienne origine. Nous voyons, d'autre part, que les directions asymptotiques sont $x=0$, $y=0$, qu'il y a deux asymptotes parallèles à Ox et confondues avec la droite $y=-a$, l'ancien axe des x, et que les branches qui correspondent à la direction Oy sont des branches paraboliques. Discutons maintenant l'équation en regardant x comme variable principale et y comme variable indépendante. Ordonnée par rapport à x, elle s'écrit

$$y^2+a^2x^2+2ay^2x-2ay^3=0.$$

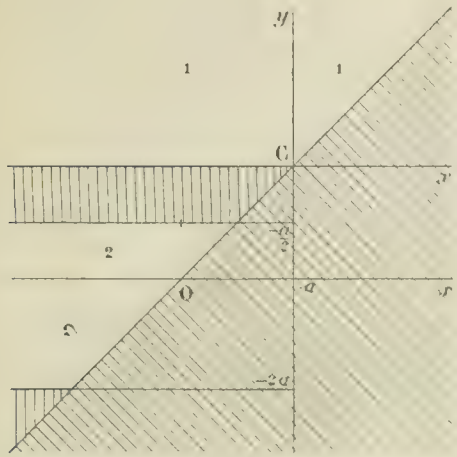


Fig. 2.

et nous montre que si y est positif, il y a toujours une racine positive et une racine négative ; si y est négatif, il n'y a pas de racine positive et il y a zéro ou deux racines négatives ; d'ailleurs la condition de réalité est

$$y(2y^2 + 5ay + 2a^2) \geqslant 0,$$

et, quand y est négatif, elle n'est remplie que pour les valeurs comprises entre les racines du trinome

$$2y^2 + 5ay + 2a^2 = 0,$$

c'est-à-dire pour les valeurs comprises entre $-2a$ et $-\frac{a}{2}$; pour ces valeurs, $x = -4a$ et $x = -a$; en ces points, la courbe touche les deux droites $y + 2a = 0$ et $y + \frac{a}{2} = 0$. Enfin, pour $y = 0$, les deux valeurs de x sont nulles ; pour $y = \infty$, les valeurs de x sont infinies ; la discussion est dès lors achevée et les principaux résultats sont marqués par la figure schématique 2. En adjoignant à tous ces résultats, le fait évident que l'origine est un point de rebroussement où la tangente est Oy, la courbe est aisée à tracer : elle est représentée par la figure 3.

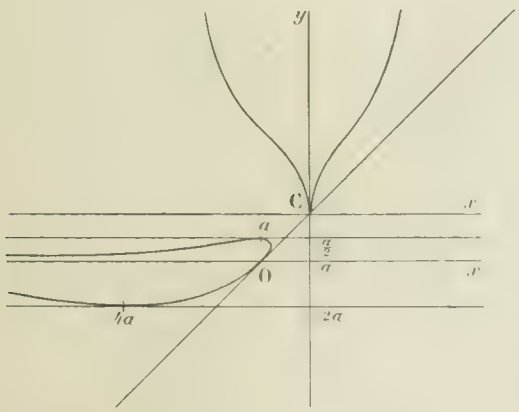


Fig. 3.

3. Le cercle osculateur à la conique au point situé sur Oy a pour équation

$$\rho^2(x^2 + y^2) - 2\alpha x - 2a\rho y + a^2 = 0,$$

car il doit couper Oy en deux points confondus avec le point dont l'ordonnée est $\frac{a}{\rho}$; il reste à déterminer α de façon que l'un des autres points de rencontre avec la conique vienne en ce point. Or, en retranchant l'équation de la conique de celle du cercle, nous obtenons l'équation

$$(\rho^2 - 1)x^2 + 2(\rho^2 - \rho)xy + 2a(1 + \rho - \rho^2)x - 2\alpha x = 0,$$

qui représente le couple de sécantes communes formé par la tangente, $x = 0$, et par la droite qui joint les deux autres points ; cette droite est représentée par

$$(\rho^2 - 1)x + 2(\rho^2 - \rho)y + 2a(1 + \rho - \rho^2) - 2\alpha = 0 ;$$

elle doit passer aussi par le point $\left(0, \frac{a}{\rho}\right)$ et la condition pour qu'il en soit ainsi donne le nombre α. Nous trouvons de cette façon $\alpha = a(2\rho - \rho^2)$; par conséquent l'équation du cercle osculateur est

$$\rho^2(x^2 + y^2) - 2a(2\rho - \rho^2)x - 2a\rho y + a^2 = 0,$$

et celle de la sécante,

$$(\rho^2 - 1)x + 2\rho(\rho - 1)y + 2a(1 - \rho) = 0.$$

Cette équation contient $\rho - 1$ en facteur, elle s'annule identiquement pour $\rho = 1$, résultat évident *a priori*, puisque pour $\rho = 1$, la conique étudiée se réduit à un cercle et se confond par suite avec son cercle osculateur ; un premier lieu exceptionnel est donc le cercle

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0.$$

Pour avoir le vrai lieu, il faut diviser l'équation de la sécante par $\rho - 1$ et éliminer ensuite ρ entre l'équation du cercle et celle qu'on obtient ainsi :

$$\rho - 1(x + 2a) - 2a = 0.$$

Cette élimination se fait immédiatement et donne

$$x(x)(y - a)^2 - (x - 2a)(x^2 - 4ax + 8ay - 4a^2) = 0.$$

Nous trouvons d'abord le lieu étranger $x = 0$, qui est le lieu du point de contact avec Oy, puis, une courbe du troisième degré

$$(4) \qquad (x)^2 - 2a(5x - 8a) + (x - a)(x^2 + 3ax - 8a^2) = 0,$$

qui est le véritable lieu.

Pour construire cette courbe, nous allons simplement discuter l'équation (4) par rapport à y. Nous lui appliquerons d'abord le théorème de Descartes, puis nous formerons la condition de réalité. Tous les résultats sont indiqués sur la figure 4.

Les valeurs pour lesquelles les coefficients changent de signes sont $x = 0$, $x = \frac{8a}{5}$, $x = a$ et $x = \alpha = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}a$, $x = \beta = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}a$, la valeur $\frac{8a}{5}$ est comprise entre α et β et n'interviendra pas, comme il est facile de s'en assurer. Figurons alors les parallèles à Oy, $x = 0$, $x = a$, $x = \alpha$ et $x = \beta$ et, pour nous guider, remarquons que α est un peu moindre que $2a$ et que β est voisin de $-5a$. Nous voyons alors que pour $x < \beta$, l'équation n'a pas de variations, elle a donc zéro racine positive et zéro ou deux racines négatives ; entre β et 0, une variation, une racine positive et une négative ; entre 0 et a, deux variations, pas de racine négative, zéro ou deux racines positives ; entre a et α, une variation, une racine positive, une racine négative ; enfin, au delà de α, pas de variation, pas de racine positive, zéro ou deux racines négatives. Consignons tous ces résultats et formons la condition de réalité. Celle-ci est $(x + 8a)(x - 2a)^3 < 0$; elle nous montre que les racines sont réelles entre $-8a$ et $2a$, et ceci achève la discussion. Pour $x = -8a$, la racine double est $y = -6a$, et la courbe est tangente en ce point à une parallèle à Oy ; pour $x = 2a$, la racine double est $y = -a$, la courbe a un point de rebroussement en ce point et y est tangente à l'hyperbole

$$xy + 5ax - 8a^2 = 0 ;$$

il n'y a, pour le voir, qu'à résoudre l'équation par rapport à y. Si l'on remarque enfin que, pour $x = 0$, une des valeurs de y est infinie et l'autre égale à $\frac{a}{2}$, que pour $x = a$ ou α ou β, une valeur de y est nulle et l'autre aisée à obtenir, il n'y a plus aucune difficulté à tracer la courbe.

Fig. 4.

CANS, à Versailles.

[illegible]

---

916 — *On considère un triangle ABC et un point P pris dans son plan et on propose :*

1° De former l'équation générale des coniques passées dans le triangle ABC et passant au point P ;

2° De chercher l'enveloppe des trois cordes des contacts.

3° *De construire le lieu décrit par le point où la droite qui joint un des points de contact avec le sommet opposé rencontre la polaire de ce sommet ;*

4° *De construire le lieu décrit par le point où cette même droite rencontre à nouveau la conique.*

1. En prenant le triangle ABC pour triangle de référence, l'équation demandée est

(1) $$\sqrt{\lambda x} + \sqrt{\mu y} + \sqrt{\nu z} = 0,$$

avec la relation (2) $\sqrt{\lambda x_0} + \sqrt{\mu y_0} + \sqrt{\nu z_0} = 0$ x_0, y_0, z_0, étant les coordonnées du point P.

2. L'équation (1) développée devient $\lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2 + \nu^2 z^2 - 2\lambda\mu xy - 2\lambda\nu xz - 2\mu\nu yz = 0$;
la polaire d'un point x', y', z' sera

$$\lambda^2 xx' + \mu^2 yy' + \nu^2 zz' - \lambda\mu(xy' + yx') - \lambda\nu(xz' + zx') - \mu\nu(yz' + zy') = 0 ;$$

la polaire du point A s'obtiendra en faisant dans cette équation y' et z' égaux à 0. On obtient

3) $$\lambda x - \mu y - \nu z = 0.$$

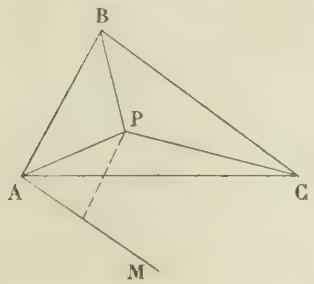
Il faut prendre l'enveloppe de cette droite, en tenant compte de la relation (2), et pour cela éliminer λ, μ, ν entre les équations (2), (3) et la suivante

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{x_0}{\lambda}}} = \frac{y}{-\sqrt{\frac{y_0}{\mu}}} = \frac{z}{-\sqrt{\frac{z_0}{\nu}}}.$$

En remplaçant dans l'équation (2) $\sqrt{\lambda}$ par $\frac{\sqrt{x_0}}{x}$, $\sqrt{\mu}$ par $-\frac{\sqrt{y_0}}{y}$ et $\sqrt{\nu}$ par $-\frac{\sqrt{z_0}}{z}$ on aura pour le lieu demandé $x_0 yz - y_0 xz - z_0 xy = 0$.

C'est une conique circonscrite au triangle ABC.

En B et C les tangentes à cette conique sont BP et CP. En A la tangente est AM conjuguée harmonique de AP par rapport aux droites AB et AC. Ceci résulte de l'examen des équations de ces tangentes.



En A, l'équation de la tangente est $\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 0$,

en B, $\frac{x}{x_0} + \frac{z}{z_0}$, et en C, $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0}$.

3. La polaire du point A est $\lambda x - \mu y - \nu z = 0$.

La droite qui va du point A au point de contact sur BC a pour équation $\mu y = \nu z$, et on a la relation $\sqrt{\lambda x_0} + \sqrt{\mu y_0} + \sqrt{\nu z_0} = 0$.

En éliminant λ, μ, ν entre ces trois équations on aura le lieu demandé. Les deux premières équations donnent $\frac{\lambda}{2yz} = \frac{\mu}{xz} = \frac{\nu}{xy}$.

En remplaçant dans la dernière équation λ par $2yz$, μ par xz, ν par xy on aura

$$\sqrt{2x_0 yz} + \sqrt{y_0 xz} + \sqrt{z_0 xy} = 0,$$

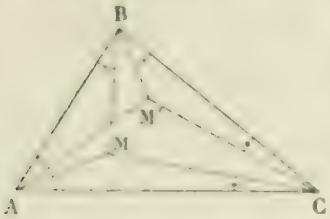
qui est l'équation cherchée.

C'est une quartique qui passe par les trois sommets du triangle ABC.

On peut écrire cette équation $\sqrt{\frac{2x_0}{x}} + \sqrt{\frac{y_0}{y}} + \sqrt{\frac{z_0}{z}} = 0$.

Si on pose $xX = yY = zZ$, on obtient la conique $\sqrt{2x_0 X} + \sqrt{y_0 Y} + \sqrt{z_0 Z} = 0$ qui est la courbe isogonale de la courbe cherchée. A chaque point de la conique correspond un point bien défini de la quartique. Cette conique est inscrite dans le triangle ABC.

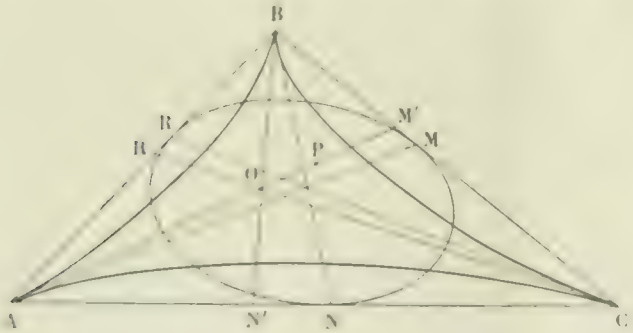
On sait que si l'on considère les coniques inscrites dans le triangle et telles que l'un des foyers parcoure la conique, l'autre foyer décrira la courbe isogonale, c'est-à-dire la quartique, de sorte qu'à tout point M de la conique correspondra un point M′ de la quartique tel que les angles BAM et CAM′ soient égaux, ainsi que les angles ABM et CBM′, ACM et BCM′.



Les points de la quartique qui sont à l'infini correspondent aux points de la conique qui seront sur le cercle circonscrit au triangle ABC et réciproquement les points de la conique à l'infini ont pour points isogonaux, des points sur le cercle circonscrit au triangle.

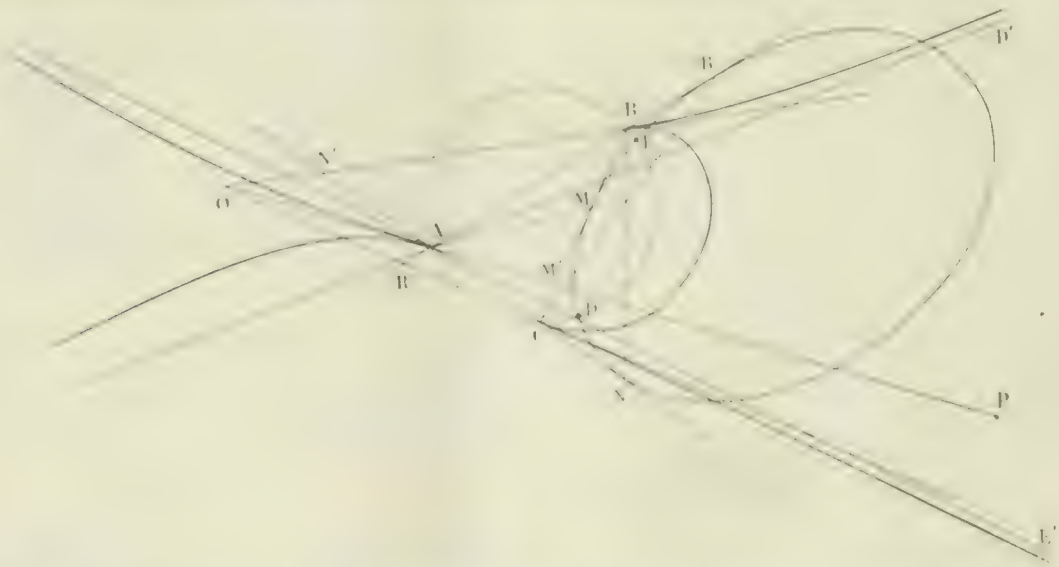
Il n'y a plus qu'à examiner la forme de la quartique suivant la nature et la position de la conique isogonale.

Supposons que la conique soit une ellipse dans l'intérieur du triangle ABC. La quartique sera aussi tout entière dans le triangle. Les points M, N, R étant les points de contact, AM aura pour équation $Yy_0 = Zz_0$; on voit que c'est la ligne isogonale de $\frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$ qui passe par le point P. Donc la ligne AP sera la tangente à la quartique au point A, avec point de rebroussement.



BN a pour équation $2x_0X = z_0Z$; BN′, l'isogonale qui sera la tangente au point B avec rebroussement aura pour équation $\frac{x}{2x_0} = \frac{z}{z_0}$; de même CR aura pour équation $\frac{x}{2x_0} = \frac{y}{y_0}$. Donc les points A, O, P, M, sont conjugués harmoniques. Il sera donc facile de trouver le point O, le point P étant donné.

Supposons maintenant que la conique soit encore une ellipse extérieure au triangle ABC.



Comme précédemment on obtiendra les tangentes AM, BN, CR aux sommets du triangle. Les points O, A, M, P sont conjugués harmoniques. Le cercle circonscrit au triangle ABC coupant forcément

la conique en deux points D, E, il y aura deux directions asymptotiques AD′ et AE′ isogonales de AD et AE.

L'ellipse n'ayant pas de points à l'infini, la quartique ne coupera point le cercle circonscrit au triangle.

Dans le cas d'une hyperbole, la courbe sera analogue, mais elle coupera le cercle circonscrit en deux points qu'on obtiendra en prenant les isogonales des directions asymptotiques de l'hyperbole. Le cercle ne pourra couper l'hyperbole qu'en deux points qui donneront naissance à deux directions asymptotiques.

Enfin, quand la conique sera une parabole, la quartique aura une forme analogue avec deux directions asymptotiques; mais comme la parabole n'a qu'une direction asymptotique la quartique sera tangente au cercle circonscrit au triangle ABC.

4. Pour avoir ce lieu, il faut éliminer λ, μ, ν entre les équations suivantes :

équation de AM $\mu y = \nu z$, équation de la conique $\sqrt{\lambda x} + \sqrt{\mu y} + \sqrt{\nu z} = 0$,

équation de condition $\sqrt{\lambda x_0} + \sqrt{\mu y_0} + \sqrt{\nu z_0} = 0$.

Des deux premières on tire $\dfrac{\lambda}{4yz} = \dfrac{\mu}{xz} = \dfrac{\nu}{xy}$ ou $\dfrac{\lambda}{\frac{4}{x}} = \dfrac{\mu}{\frac{1}{y}} = \dfrac{\nu}{\frac{1}{z}}$.

En portant les valeurs proportionnelles à λ, μ, ν, dans la troisième équation, on a pour le lieu

$$\sqrt{\frac{4x_0}{x}} + \sqrt{\frac{y_0}{y}} + \sqrt{\frac{z_0}{z}} = 0.$$

La courbe isogonale sera $\sqrt{4x_0X} + \sqrt{y_0Y} + \sqrt{z_0Z} = 0$, conique inscrite dans le triangle ABC.

La quartique sera analogue à la précédente, et tout ce qui a été dit s'applique de nouveau en remplaçant le point P par le point $2x_0$, y_0, z_0 qui est le point de concours des tangentes à la quartique aux sommets du triangle dans le problème précédent.

CANS.

Remarque. — Par une transformation homographique qui change les points B et C en les deux points cycliques, les coniques de l'énoncé deviennent des paraboles ayant un foyer commun, le point A (dans sa nouvelle position) et passant par un point donné P.

Nous laissons au lecteur le soin de développer cette méthode et d'édifier la solution correspondante.

Bonnes solutions : MM. J.-D. Dufaut, école primaire supérieure d'Aiguillon; C. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille; Pelvoisin.

---

917. — *Etant données deux quadriques C et C′ qui se coupent suivant deux courbes planes, P et Q, il est possible de leur circonscrire une infinité de quadriques S. Deux de ces quadriques S_1 et S_2 se coupent suivant deux courbes planes.*

1° *Les plans de ces deux courbes se coupent sur l'intersection de P, Q, et forment avec ces dernières un faisceau harmonique.*

2° *Par ces deux courbes passe une quadrique contenant la conique P et une contenant la conique Q.*

3° *Par ces deux courbes passent deux cônes du second degré. Ces cônes ont leurs sommets sur une droite fixe et restent circonscrits à une quadrique fixe, tangente aux plans P, Q et inscrite dans les deux cônes circonscrits à la fois aux deux quadriques données C et C′.*

Faisons une transformation homographique de la figure de manière que la conique Q se transforme

en le cercle de l'infini, les deux quadriques C et C' se transforment alors en deux sphères Γ et Γ', et la conique P devient le cercle Π situé dans le plan radical des deux sphères.

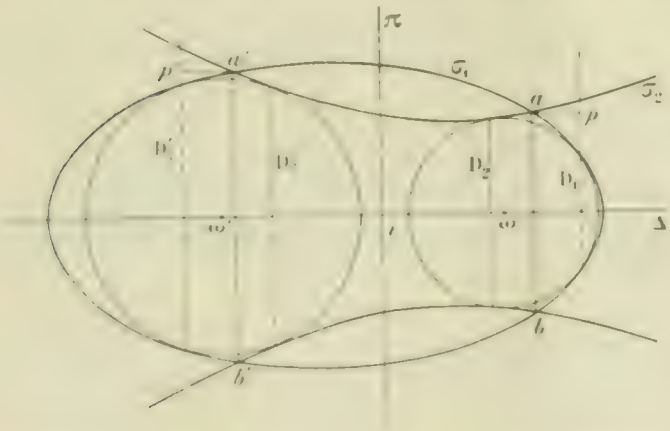
Il suffit alors de résoudre la question dans ce cas particulier, puisque les propriétés à démontrer se conservent dans une transformation homographique quelconque.

Toute quadrique Σ circonscrite à la fois aux deux sphères est de révolution autour de la droite Δ qui joint les centres ω et ω' des deux sphères ; deux de ces quadriques Σ_1 et Σ_2 se coupent suivant deux cercles C_1 et C_2 dont les centres sont sur la droite Δ et dont les plans sont perpendiculaires à Δ.

Coupons la figure par un plan passant par Δ : les sphères Γ, Γ' sont coupées suivant deux grands cercles γ, γ', le plan radical Π suivant une droite π, axe radical des cercles γ, γ', qui rencontre Δ au point i ; les quadriques Σ_1 et Σ_2 sont coupées suivant des coniques σ_1, σ_2 bitangentes aux cercles γ, γ', les cordes de contact étant D_1, D'_1 pour σ_1, D_2, D'_2 pour σ_2. Les coniques σ_1, σ_2 se coupent en quatre points a, b, a', b' symétriques deux à deux par rapport à Δ. Les droites ab, $a'b'$ sont des diamètres des cercles C_1 et C_2.

La conique σ_1 étant bitangente aux cercles γ et γ', les cordes de contact D_1 et D'_1 forment un faisceau harmonique avec l'axe radical π et la droite de l'infini, donc D_1 et D'_1 sont équidistantes de l'axe radical, il en est de même pour D_2 et D'_2.

1. Le cercle γ étant bitangent aux coniques σ_1 et σ_2, les cordes de contact D_1 et D_2 sont conjuguées harmoniques par rapport à ab et $a'b'$; de même ab et $a'b'$ forment un faisceau harmonique avec D_1 et D'_2. Comme D_1 et D'_1 d'une part, D_2 et D'_2 d'autre part sont équidistantes du point i, il en est de même de ab et $a'b'$. Par suite les plans des cercles C_1 et C_2 forment un faisceau harmonique avec le plan radical Π et le plan de l'infini.



2. Par les quatre points a, b, a', b' on peut faire passer un cercle ayant son centre sur Δ ; ce cercle en tournant autour de Δ engendre une sphère contenant les deux cercles C_1 et C_2. Cette sphère est la transformée homographique de la quadrique qui contient les coniques communes aux quadriques S_1 et S_2 et qui passe par la conique Q.

Soient c et d les points où l'axe radical π rencontre les cercles γ et γ'. Par les six points a, b, a', b', c, d on peut faire passer une seule conique ayant pour axe Δ. En tournant autour de Δ, cette conique engendre une quadrique contenant les cercles C_1, C_2 et le cercle commun aux sphères Γ et Γ'.

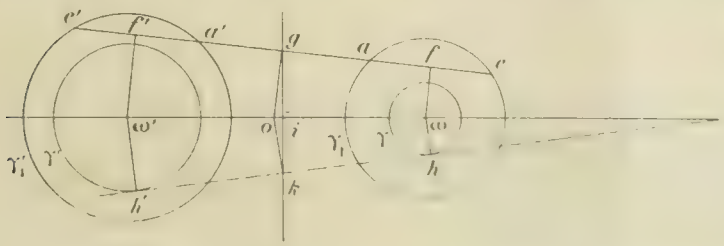
3. Par les cercles C et C' passent visiblement deux cônes de révolution ayant pour axe Δ et dont les sommets sont les points s_1 et s_2 où aa' et ab' rencontrent Δ.

Pour démontrer que ces cônes sont circonscrits à une quadrique fixe, il suffit d'établir que les droites aa' et ab' sont tangentes à une conique fixe ayant pour axe Δ.

Soient at, $a't'$ les tangentes menées des points a et a' respectivement aux cercles γ et γ', et ap, $a'p'$ les distances des mêmes points aux droites D_1 et D'_1. D'après une propriété bien connue des cercles focaux d'une conique, les rapports $\frac{at}{ap}$ et $\frac{a't'}{a'p'}$ sont égaux à l'excentricité de la conique. Comme $ap = a'p'$, on en conclut $at = a't'$. Donc les puissances des points a et a' par rapport aux cercles γ et γ' respectivement sont égales. Il en résulte immédiatement que les cercles γ_1 et γ'_1 qui ont pour

centres ω et ω' et qui passent par les points a et a' ont même axe radical que les cercles γ et γ'.

La droite aa' rencontre les cercles γ_1 et γ'_1 et l'axe radical πi aux points e, e', g. Comme on a $ga = ga'$ et $ga.ge = ga'.ge'$, on en conclut $ge = ge'$ et par suite $ae = ae'$. Si on abaisse ωf et $\omega' f'$ perpendiculaires sur aa', on a $gf = gf'$ et par suite la perpendiculaire menée par le point g à la droite aa' passe par le point o milieu de $\omega\omega'$.



Il en résulte que aa' est tangente à une parabole ayant pour foyer le point o et pour tangente au sommet ig. On verrait de même que ab' touche la même parabole. On en conclut que les deux cônes qui contiennent les cercles C et C′ sont circonscrits à un paraboloïde de révolution ayant pour foyer le point o et pour plan tangent au sommet le plan Π.

Il nous reste à démontrer que ce paraboloïde est également inscrit dans les cônes circonscrits aux deux sphères Γ et Γ'. Soit hh' une tangente commune aux deux cercles γ et γ', rencontrant ig au point k; comme ωh et $\omega' h'$ sont perpendiculaires à hh', ok l'est aussi, et par suite hh' touche la parabole de foyer o et de tangente au sommet ig.

Observons en terminant que si l'on revient à la première figure, le paraboloïde est la transformée d'une quadrique qui touche les plans P et Q.

On rapprochera avec intérêt cette solution de la solution géométrique de la question 898 (N° de juin 1900, p. 530).

---

918. — *Si un triangle varie en restant inscrit dans une conique* C *et circonscrit à une autre conique* C′, *la polaire de tout point de* C *par rapport au système des trois côtés du triangle passe par un point fixe.*

Prenons pour triangle de référence l'un des triangles indiqués et représentons par

$$yz + zx + xy = 0, \qquad avw + bwu + cuv = 0,$$

les équations ponctuelle et tangentielle des deux coniques C et C′. La seconde équation peut s'écrire

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} = 0,$$

et donne immédiatement, en fonction d'un paramètre λ,

$$\frac{a}{u} = \lambda, \qquad \frac{b}{v} = 1 - \lambda, \qquad \frac{c}{w} = -1;$$

par conséquent les coordonnées d'une tangente quelconque à la seconde conique s'expriment rationnellement en λ par les formules très simples

$$u = \frac{a}{\lambda}, \qquad v = \frac{b}{1-\lambda}, \qquad w = \frac{c}{-1}.$$

Nous pouvons démontrer en passant que le pôle de cette droite par rapport aux trois sommets du triangle choisi décrit une droite fixe liée à ce triangle : en effet, appelons u_0, v_0, w_0 les trois nombres précédents ; le pôle de la droite correspondante par rapport à la courbe impropre de troisième classe $uvw = 0$ a pour équation

$$uv_0w_0 + vw_0u_0 + wu_0v_0 = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{u}{u_0} + \frac{v}{v_0} + \frac{w}{w_0} = 0;$$

en remplaçant a, b, c par leurs valeurs, on obtient la série linéaire de points

$$\frac{ax}{a} + \frac{y(1-\lambda_1)}{b} - \frac{z}{c} = 0\,;$$

le lieu de ces points est la droite qui joint les deux points fixes

$$\frac{u}{a} - \frac{v}{b} = 0, \qquad \frac{v}{b} - \frac{w}{c} = 0,$$

droite dont les coordonnées sont a, b, c.

On démontrerait tout aussi aisément que la polaire d'un point quelconque de la conique C par rapport aux trois côtés du triangle de référence choisi passe par un point fixe.

Ces deux résultats nous donnent en passant deux propriétés corrélatives d'une conique inscrite dans un triangle et d'une conique circonscrite à un triangle.

Abordons maintenant la question posée. Désignons, à cet effet, par λ_1, λ_2, λ_3 les paramètres qui correspondent aux côtés d'un nouveau triangle quelconque satisfaisant aux conditions de l'énoncé et prenons ce triangle pour nouveau triangle de référence ; les formules de transformation seront :

$$u = \frac{aU}{\lambda_1} + \frac{aV}{\lambda_2} + \frac{aW}{\lambda_3}, \qquad X = \frac{ax}{\lambda_1} + \frac{by}{1-\lambda_1} - cz,$$

$$v = \frac{bU}{1-\lambda_1} + \frac{bV}{1-\lambda_2} + \frac{bW}{1-\lambda_3}, \qquad \text{puis :} \qquad Y = \frac{ax}{\lambda_2} + \frac{by}{1-\lambda_2} - cz,$$

$$w = -c(U + V + W), \qquad Z = \frac{ax}{\lambda_3} + \frac{by}{1-\lambda_3} - cz.$$

D'après ces formules, la seconde équation garde la même forme, et la première doit devenir

$$aYZ + bZX + cXY = 0\,;$$

nous aurons donc les relations qui lient les paramètres λ_1, λ_2, λ_3 en posant l'identité

$$aYZ + bZX + cXY = yz + zx + xy.$$

Cela nous donne d'abord trois relations qui se réduisent à deux, celles qu'on obtient en annulant les coefficients des carrés :

$$a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 0\,;$$

puis, les trois autres que voici :

$$\Sigma a\left(\frac{1}{1-\lambda_1} - \frac{1}{1-\lambda_2}\right) = -\frac{1}{bc}, \qquad \Sigma a\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = -\frac{1}{ac},$$

$$\Sigma a\left(\frac{1}{\lambda_1(1-\lambda_2)} - \frac{1}{\lambda_2(1-\lambda_1)}\right) = \frac{1}{ab}.$$

Ces trois nouvelles relations, rendues entières, développées et simplifiées à l'aide des deux premières, deviennent :

$$a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3 = a\,\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}{abc},$$

$$a\lambda_1\lambda_2 + b\lambda_2\lambda_3 + c\lambda_3\lambda_1 = b\,\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{abc},$$

$$a\lambda_1\lambda_2 + b\lambda_2\lambda_3 + c\lambda_3\lambda_1 = -\frac{\lambda_1\lambda_2(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}{abc}.$$

Nous en déduisons aisément

$$(1)\quad \begin{cases} (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3) = \dfrac{a}{c}, \qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \dfrac{b}{c}, \\[2ex] \lambda_1\lambda_2(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3) = \dfrac{1}{c}. \end{cases}$$

La dernière pouvant se remplacer par $\lambda_1 + ab = 0$

Cela posé, prenons un point fixe quelconque sur la conique (C), par exemple le point qui a pour coordonnées $0, 0, 1$ dans le premier système ; ses coordonnées seront $X_0 = Y_0 = Z_0 = c$ dans le nouveau système et sa polaire par rapport à la cubique impropre $XYZ = 0$ a pour équation

$$XY_0Z_0 + YZ_0X_0 + ZX_0Y_0 = 0,$$

ou

$$\frac{X}{X_0} + \frac{Y}{Y_0} + \frac{Z}{Z_0} = 0.$$

ou enfin

$$X + Y + Z = 0.$$

Dans le premier système, cette équation est

$$ax\Sigma\frac{1}{\lambda} + by\Sigma\frac{1}{1-\lambda} - 3cz = 0,$$

ou

$$ax\frac{\Sigma\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + by\frac{\Sigma(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)} - 3cz = 0.$$

Tenant compte alors des relations (1) et de $\frac{bc}{ab} = -1$ qui en découle, nous pouvons écrire cette équation ainsi

$$x\Sigma\lambda_1\lambda_2 + y\Sigma(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) - 3z = 0;$$

posons alors

$$\Sigma\lambda_1 = \rho, \qquad \Sigma\lambda_1\lambda_2 = \mu.$$

elle devient

$$\mu x + (3 - 2\rho + \mu)y + 3z = 0;$$

d'autre part, les deux premières relations (1) donnent, par addition et en se servant de $bc = -ab$,

$$1 - \rho + \mu - \frac{a+b}{c} = 0;$$

il n'y a plus qu'à tirer ρ de cette équation et à le porter dans l'équation de la droite pour mettre en évidence ce fait qu'elle passe par un point fixe, car on trouve ainsi

$$\mu x + \left(1 - \mu - 2\frac{a+b}{c}\right)y + 3z = 0,$$

et il est visible que cette droite passe par le point de rencontre des deux droites

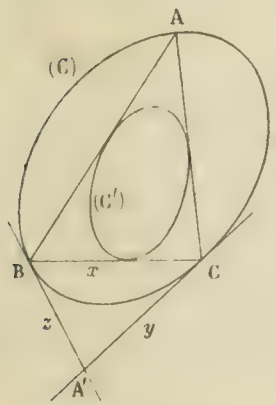
$$x = y \qquad \text{et} \qquad \left(1 - 2\frac{a+b}{c}\right)y + 3z = 0.$$

c'est-à-dire par le point dont les coordonnées sont

$$c, \qquad c, \qquad \frac{2}{3}(a+b-c).$$

Nous pouvons donner de cette propriété une deuxième démonstration qui n'exige aucune transformation de coordonnées. Soit ABC un des triangles indiqués ; menons à la conique (C) les deux tangentes en B et C et prenons le triangle ainsi formé, ABC, pour triangle de référence ; l'équation de la conique (C) sera $yz - x^2 = 0$ et celle de la conique (C') sera de la forme

$$Ay^2 + Az^2 - 2Byz - 2Bzx - 2Bxy = 0.$$



La première équation fournit immédiatement les coordonnées d'un point quelconque de (C) en fonction d'un paramètre, $x = t$, $y = t^2$, $z = 1$, et les coordonnées des trois points A, B, C, avec les valeurs des paramètres qui leur correspondent sont :

A	$1, 0, 1,$	$t = 0.$
B	$0, 1, 0,$	$t = \infty$
C	$0, 0, 1.$	$t = 0$

les équations de AC et de AB sont respectivement $0x - y = 0$, $x - 0z = 0$.

Il faut exprimer maintenant que ces droites sont tangentes à la conique (C), ce qui donne les deux relations

$$A - 2B\theta = 0, \qquad A\theta - 2B = 0,$$

c'est-à-dire

$$A = 2B\theta, \qquad A = \frac{2B}{\theta};$$

l'équation tangentielle de la conique (C) est donc finalement

$$B\theta u^2 - \frac{B}{\theta} v^2 + Bvw + Bwu + Buv = 0.$$

Cela posé, appelons t, t' et t'' les paramètres des sommets de l'un quelconque des triangles envisagés et exprimons que l'un des côtés de ce triangle, le côté (t, t'), par exemple, est tangent à (C); nous aurons d'abord, pour équation de ce côté,

$$t + t'v - \theta w + tt'u = 0,$$

puis la relation

$$B\theta - \frac{Bt^2t'^2}{\theta} - Bt't - Bt't' + Bt + Bt' = 0.$$

Cette équation, regardée comme étant du second degré en t, admet les deux racines t et t'; nous avons donc successivement

$$tt' = \frac{B\theta}{Bt} \qquad \text{et} \qquad t' + t'' = \frac{Bt - Bt^2 - B}{\frac{Bt}{\theta}\left(\theta - t\right)};$$

la première est symétrique et donne $tt't'' = -\frac{B\theta}{B'}$; la seconde se simplifie à l'aide de celle-ci et donne finalement

$$\Sigma t - \theta\Sigma t - \frac{B'}{B'} = 0.$$

Posons alors $\Sigma t = \lambda$, $\frac{B}{B'} = a$, $\frac{B'}{B'} = b$; nous voyons de suite que t, t' et t'' sont les racines de l'équation du troisième degré

$$t^3 - \lambda t^2 + \theta(\lambda - a)t + b\theta = 0.$$

A ce moment, désignons par

$$X = \theta - t'v + y + tt'z,$$
$$Y = \theta - t''v + y + t''z,$$
$$Z = \theta - tv + y + ttz,$$

les premiers membres des équations des trois côtés du triangle, par X_0, Y_0, Z_0 les nouvelles coordonnées du point E, $X_0 = Y_0 = Z_0 = 1$. L'équation de la polaire de ce point par rapport aux trois côtés du triangle est

$$X = Y = Z = 0, \qquad \text{ou} \qquad -2\theta\Sigma t + 3y + \Sigma tt'z = 0,$$

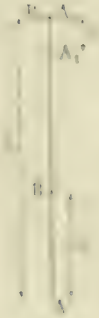
ou encore

$$2\theta\lambda - 3y - \lambda z = 0.$$

Cette équation ne contient le paramètre θ qu'au premier degré, donc elle représente une droite qui passe par un point fixe.

CONCOURS DE 1900 (Suite)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES. — Cours spéciaux.



Mécanique.

1. — On abandonne en chute libre, sans vitesse initiale, un point matériel pesant A_0; ce point, ayant parcouru un espace $A_0A_1 = d$, on laisse tomber sans vitesse initiale de la même position initiale A_0 un second point matériel pesant B.

Au bout d'un certain temps, les deux points occupent des positions A et B.

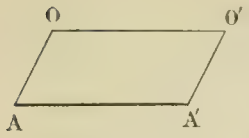
Calculer la distance $AB = D$ en fonction de d et de la hauteur de chute $A_0A = h$ du premier point.

Appliquer le résultat à l'exemple numérique suivant :

$d = 10$ centimètres,

$h = 100$ mètres.

II. — Une barre homogène pesante AA′ est attachée en ses extrémités A et A′ à deux fils inextensibles OA et O′A′ de même longueur et de poids négligeable ; ceux-ci sont fixés eux-mêmes en des points O et O′ situés sur une même horizontale et à une distance OO′ égale à la longueur de la barre AA′.

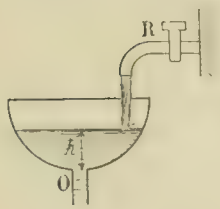


On demande le mouvement que prend la barre AA′ supposée lancée dans le plan vertical qui contient les points O et O′ de manière que les fils restent tendus.

Nota. — La solution de cette question est presque évidente (il suffit d'appliquer le théorème des forces vives, par exemple, au mouvement de la barre).

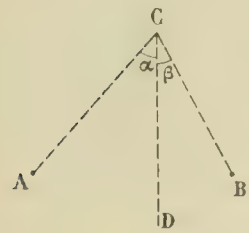
(*Durée, 1 heures.*)

Analyse et Trigonométrie.



I. — Un vase de forme hémisphérique et de rayon r est alimenté par un robinet R dont le débit constant est donné. Ce vase est percé à sa partie inférieure par un petit orifice O de section S qui laisse échapper le liquide avec une vitesse d'écoulement $\sqrt{2gh}$, h étant la hauteur du liquide dans le vase au-dessus de cet orifice, et g une constante représentant l'accélération due à la pesanteur.

On donne le niveau initial du liquide dans le vase (déterminé par la hauteur initiale h_0) et on demande de calculer en fonction du temps les variations de ce niveau.



II. — **977.** — Deux points A et B, séparés par une colline, sont à une même cote de $48^m,263$.

D'un point C, situé au sommet de cette colline et ayant pour cote $163^m,842$, on mesure les angles

$$\alpha = 61^\circ 32', \qquad \beta = 76^\circ 28',$$

que font les directions CA et CB avec la verticale CD, ainsi que l'angle des deux plans verticaux ACD et BCD ; ce dernier angle est de 117°16′.

Evaluer la distance AB.

(*Durée, 3 h. 1/2.*)

Épure de Perspective (feuille 1/2 grand-aigle).

Une pyramide régulière de 70^{mm} de hauteur a pour base un pentagone régulier de 50^{mm} de côté.

Un prisme droit a pour base un hexagone régulier de 40^{mm} de côté et une hauteur de 80^{mm}.

Ces deux solides reposent par leurs bases sur le géométral, et les centres de ces bases sont à 100^{mm} de distance.

On demande :

1° De les mettre en perspective en supposant le tableau placé d'une manière quelconque par rapport à eux ;

2° De chercher les ombres portées par les solides sur le géométral ou l'un sur l'autre. Le soleil sera choisi de manière à faire porter ombre par le prisme sur la pyramide.

La hauteur d'horizon $h = 50^{mm}$.

Nota. — MM. les candidats donneront sur une partie de leur feuille, *l'épure*, c'est-à-dire le plan et l'élévation des solides, et sur une autre partie *le tableau*.

Ce dernier sera amplifié dans un rapport laissé au choix de MM. les candidats. On devra le faire aussi grand que possible.

(*Durée, 3 h. 1/2.*)

Croquis et Dessin de machines.

Première partie : Croquis (feuille 1/8 grand-aigle quadrillée).

1° Sur une première feuille, faire au crayon, à main levée, le relevé géométral (plan, élévation et coupe) de l'un des objets placés dans la salle d'examen ;

2° Relever ses dimensions (en millimètres), et les inscrire sur le croquis.

On accordera 1 h. 1/2 pour cette première partie du travail, après quoi le modèle en relief sera retiré de la salle.

Deuxième partie : Mise au net (feuille 1/4 grand-aigle).

Sur une seconde feuille, mettre au net, à l'encre de Chine, à une échelle déterminée, le croquis précédent.

Nota. — L'échelle est laissée à l'arbitraire de MM. les candidats, elle devra être choisie assez grande pour que la feuille soit bien remplie.

L'échelle doit être dessinée dans une partie libre de cette feuille.

(*Durée, 1 heure.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

978. — 1° Étant donnée une équation du troisième degré à coefficients réels,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

calculer la fonction symétrique des racines

$$\Sigma(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2.$$

Montrer que, sauf le cas d'une racine triple, cette quantité n'est nulle que si l'équation a deux racines imaginaires conjuguées.

2° Désignant alors par α la racine réelle et par $\beta = u + iv$, $\gamma = u - iv$ les deux racines imaginaires conjuguées, trouver la relation qui existe entre α, u et v. Calculer u et v sachant que $\alpha = 1$ et que les modules des deux autres racines sont égaux à 1. Former l'équation du troisième degré correspondante.

E. H.

979. — On donne une ellipse (E) et une parabole (P) tangente aux axes de (E). Montrer que les normales à l'ellipse aux quatre points de contact des tangentes communes avec la parabole sont concourantes en un point M de la directrice de la parabole.

Trouver les courbes enveloppes de la polaire du centre de (E), de la tangente au sommet, de l'axe de la parabole (P); trouver les lieux du foyer F, du sommet de (P), et enfin l'enveloppe de la droite MF, lorsque la parabole P varie, le point M étant assujetti à rester sur un cercle concentrique à (E).

VASSIER.

980. — *Théorème à démontrer.* — Si l'on mène la normale en un point quelconque M d'une conique à centre, que l'on désigne par I son point de rencontre avec l'axe non focal et par F l'un des foyers, le rapport $\frac{FI}{FM}$ est constant et égal à l'excentricité de la conique.

(Communiqué à la *Revue* par M. D. ANDRÉ.)

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

925. — *a, b, c désignent les racines de l'équation*

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

que l'on suppose n'avoir que des racines simples. Calculer les valeurs de x, y, z qui vérifient le système

$$x + y + z = -\frac{C}{D}, \qquad ax + by + cz = 3, \qquad a^2x + b^2y + c^2z = -\frac{B}{A}.$$

Montrer que ce système n'est jamais impossible, même quand l'équation proposée a une racine multiple.

Supposons que les racines de l'équation donnée soient inégales.

Le déterminant des coefficients des trois inconnues x, y, z est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Il est, d'après l'hypothèse faite, différent de 0.

L'application de la règle de Cramer donne alors les valeurs des inconnues :

$$x = \frac{(b^2-c^2)\left(-\frac{C}{D}\right) - 3(c^2-b^2) + \left(-\frac{B}{A}\right)(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \qquad y = \frac{(ac^2-a^2c)\left(-\frac{C}{D}\right) - 3(c^2-a^2) + \left(-\frac{B}{A}\right)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$z = \frac{-(ab^2 - a^2b)\frac{C}{D} + 3(b^2 - a^2) - \frac{B}{A}(b - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)}.$$

Mais, on a

$$-\frac{C}{D} = \frac{ab + bc + ca}{abc}, \qquad -\frac{B}{A} = a + b - c;$$

et l'on trouve, en effectuant, pour valeur des inconnues

$$x = \frac{(b - c)^3 - bc(ab + bc + ca) + 3(b + c)abc - abc(a + b - c)}{abc(a - b)(b - c)(c - a)}$$

$$= \frac{-bc(b - c)(ab + ac - bc - a^2)}{abc(a - b)(b - c)(c - a)} = \frac{+bc(b - c)(c - a)(a - b)}{abc(a - b)(b - c)(c - a)},$$

ou (1) $$x = \frac{1}{a};$$

de même pour y et z

(2) $$y = \frac{1}{b} \qquad \text{et (3)} \qquad y = \frac{1}{c}.$$

On peut dès lors vérifier que même dans le cas d'une racine multiple, ces valeurs de x, y, z satisfont aux équations proposées ; alors le déterminant Δ étant nul, le système admet nécessairement une infinité de solutions.

Nous allons chercher une démonstration directe.

Supposons, par exemple, que l'on ait $b = c$; le déterminant Δ sera nul, et on pourra prendre pour déterminant principal

$$S = \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}.$$

Le seul déterminant caractéristique correspondant est :

$$S' = \begin{vmatrix} a & b & 3 \\ a^2 & b^2 & -\frac{B}{A} \\ 1 & 1 & -\frac{C}{D} \end{vmatrix}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & b & 3 \\ a^2 & b^2 & (a + b - c) \\ abc & abc & ab + bc - ca \end{vmatrix},$$

ou encore, en développant,

$$S' = \frac{1}{abc}[abc(-3b^2 + ab + b^2 + bc) - abc(a^2 + ab - ac - 3a^2 + ab + bc + ac) + (ab^2 - a^2b)$$

$$= \frac{1}{abc}[abc(-2b^2 + 2a^2 + bc - ac) + (ab + bc + ac)(ab^2 - a^2b)] = \frac{1}{c}(a - b)(b - c)(c - a) = 0.$$

Ce déterminant étant nul, on en conclut que le système des équations données est toujours possible, même dans le cas d'une racine double. Dans ce dernier cas d'ailleurs le nombre des solutions est infini, on les obtient toutes en donnant à l'une des inconnues z, par exemple, une valeur arbitraire k. On trouvera, pour chacune des deux autres,

$$x = \frac{1}{a}, \qquad y = \frac{2}{b} - k.$$

Enfin si l'on suppose qu'il y ait une racine triple, on remarque que les trois équations données se réduisent à une seule, $x + y + z = \frac{3}{a}$; par conséquent il y a une double infinité de solutions, on peut prendre arbitrairement deux des inconnues.

PELVOISIN.

Remarque. — En remplaçant $-\frac{C}{D}$ et $-\frac{B}{A}$ par $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et $a + b + c$, on remarque de suite que les équations peuvent s'écrire

$$x - \frac{1}{a} + y - \frac{1}{b} + z - \frac{1}{c} = 0, \qquad a\left(x - \frac{1}{a}\right) + b\left(y - \frac{1}{b}\right) + c\left(z - \frac{1}{c}\right) = 0,$$

$$a^2\left(x - \frac{1}{a}\right) + b^2\left(y - \frac{1}{b}\right) + c^2\left(z - \frac{1}{c}\right) = 0 :$$

par conséquent elles ont la solution évidente $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$. En posant $x = \frac{1}{a} + x'$, $y = \frac{1}{b} + y'$, $z = \frac{1}{c} + z'$, on est ramené à un système homogène très facile à étudier.

Solutions satisfaisantes : MM. F. Pedoriur, Bateman.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

914 — *On considère un cercle (C) et un point A sur ce cercle ; soit M un point du plan. Par le point A on mène des parallèles aux couples de droites conjuguées qui passent en M ; les cordes qui joignent deux à deux les extrémités de l'un de ces couples sur le cercle passent par un point fixe M'. Trouver les coordonnées de M' en fonction de celles de M et réciproquement.*

1° *Lorsque M' parcourt une droite (D), le point M se meut sur une conique (K). Trouver l'enveloppe des droites (D) pour lesquelles la conique (K) est un système de deux droites.*

2° *Trouver le lieu des foyers de la conique (K) quand la droite (D) tourne autour d'un point fixe. Examiner en particulier le cas où ce point fixe est sur le diamètre perpendiculaire à celui du point A.*

Nous prendrons pour axe des x la tangente en A au cercle (C) et pour axe des y la perpendiculaire à cette tangente en A, et nous désignerons par α et β les coordonnées du point considéré, M. Cela posé, le cercle donné a pour équation $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ et les deux droites conjuguées passant en M, $y - \beta = mx - \alpha$, $y - \beta = m'x - \alpha$. La polaire d'un point (x, y) par rapport au cercle est $Xx + Yy - x - ay = 0$, en l'identifiant avec la première droite, $Y - \beta = m(X - \alpha)$, nous avons les relations

$$\frac{x}{m} = \frac{a - y}{1} = \frac{ay}{m\alpha - \beta},$$

qui nous donnent les coordonnées du pôle de cette droite : ce calcul, très facile, fournit les valeurs des coordonnées du pôle

$$x = \frac{a^2 m}{a + m\alpha - \beta}, \qquad y = \frac{a(m\alpha - \beta)}{a + m\alpha - \beta};$$

en portant ces valeurs dans l'équation de la seconde droite, nous obtenons la relation qui existe entre les coefficients angulaires des deux droites conjuguées ; cette relation, développée, est :

$$(1) \qquad \alpha^2 - \alpha^2 mm' + \beta^2 - \beta(m + m') + \beta^2 - 2a\beta = 0.$$

Soit $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ l'équation de la droite qui joint les extrémités des cordes du cercle (C) menées par le point A parallèlement aux deux droites de coefficients angulaires m et m' ; les deux rayons qui joignent l'origine aux points de rencontre de cette droite avec le cercle ont pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ay(\alpha x + \beta y + \gamma) = 0,$$

leurs coefficients angulaires sont donnés par l'équation

$$(u - 2a\beta)u^2 + 2a\alpha u + \gamma = 0;$$

en exprimant que ces racines satisfont à l'équation (1), nous avons entre α, β, γ, la relation

$$\alpha^2 - \beta^2 \gamma - 2\alpha\beta\gamma + (\beta m - \beta^2 - 2a\beta)(\gamma - 2a\alpha) = 0,$$

ou

$$2\alpha\beta^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\gamma - 2\alpha\beta\gamma + (\beta^2 - 2a\beta)(\gamma - 2a\alpha) = 0.$$

Cette relation exprime que la droite $ux + vy + w = 0$ passe par un point fixe dont les coordonnées sont

$$(2) \qquad \alpha' = \frac{2a\alpha(\beta - a)}{\alpha^2 + \beta^2 - 2a\beta - a^2}, \qquad \beta' = \frac{2a\beta(\beta - 2a)}{\alpha^2 + \beta^2 - 2a\beta - a^2};$$

ce sont les coordonnées du point M′ en fonction de celles du point M.

Réciproquement, si nous nous donnons le point M′ (α', β'), nous voyons que le point M est donné par l'intersection des deux coniques

$$\alpha'(x^2 + y^2 - 2ay - a^2) - 2ax(y - a) = 0, \qquad \beta'(x^2 + y^2 - 2ay - a^2) - 2ay(y - 2a) = 0,$$

équations dans lesquelles nous avons mis x et y à la place de α et β. Il y a donc quatre points M qui correspondent au point M′ donné. Or les deux coniques précédentes, qui déterminent ces points, ont le même centre, le centre du cercle, $(0, a)$; en portant les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point, leurs équations deviennent

$$\alpha'(x^2 + y^2 - 2a^2) - 2axy = 0, \qquad \beta'(x^2 + y^2 - 2a^2) - 2ay^2 + 2a^3 = 0;$$

elles se coupent donc en quatre points, deux à deux symétriques par rapport à la nouvelle origine ; ces quatre points sont situés sur deux droites passant à la nouvelle origine et le problème qui les détermine est du second degré. Les deux droites dont nous venons de parler s'obtiennent aisément en éliminant la variable d'homogénéité entre les équations nouvelles des deux coniques ; elles ont pour équation

$$\alpha'(y^2 - x^2) - 2(\beta' - a)xy = 0;$$

ce sont deux droites rectangulaires ; par suite les quatre points M qui correspondent à un point M′ forment un losange. Le calcul des coordonnées de ces points se poursuivrait facilement.

1. Désignons maintenant par x et y les coordonnées du point M et exprimons que le point M′ parcourt une droite fixe (D), $ux + vy + w = 0$; nous aurons immédiatement l'équation de la conique (K),

$$(3) \qquad 2aux(y - a) + 2avy(y - 2a) + w(x^2 + y^2 - 2ay - a^2) = 0.$$

Cette conique a aussi pour centre le centre du cercle, $(0, a)$; en portant les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point, son équation devient

$$wx^2 + 2auxy + (w + 2av)y^2 - 2a^2w - av^2 = 0.$$

Elle se réduit à deux droites dans deux cas : ou bien quand le terme constant est nul, ce qui donne $w + av = 0$, condition qui exprime que la droite envisagée passe au point $(0, a)$, centre du cercle ; ou bien quand l'ensemble des termes du second degré forme un carré parfait, ce qui donne

$$w(w + 2av) - a^2u^2 = 0.$$

Cette relation, du second degré en u, v, w, montre que par tout point du plan il passe deux droites de l'espèce envisagée ; elles enveloppent donc une conique. Nous aurons l'enveloppe de ces droites en exprimant que par un point du plan il passe deux droites confondues. Soit (x, y) ce point, les deux équations qui déterminent les droites passant en ce point sont

$$ux + vy + w = 0, \qquad w(w + 2av) - a^2u^2 = 0;$$

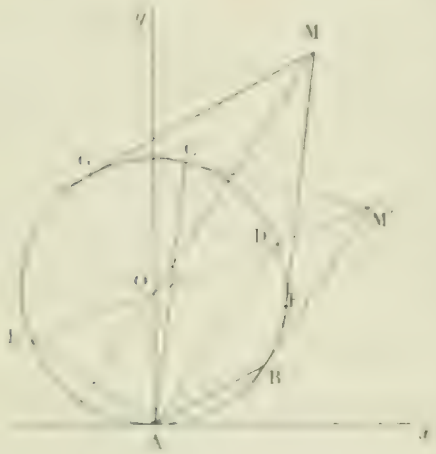
en éliminant v entre elles, nous avons une équation homogène en u et w qui détermine le rapport $\frac{u}{w}$ ou $\frac{w}{u}$ correspondant à ces droites ; cette équation est

$$a^2yu^2 + 2axuw + (2a - y)w^2 = 0;$$

écrivons qu'elle a une racine double et nous aurons l'enveloppe. Nous trouvons ainsi le cercle proposé

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

2. Pour traiter la troisième partie nous désignerons par α et β les coordonnées du point fixe, et nous aurons entre u, v, w la relation $u\alpha - v\beta - w = 0$; portant cette valeur de w dans l'équation de la conique (K), nous obtiendrons, avec un changement de signe,



$$u\alpha(x^2 + y^2 - 2ay - a^2) - 2ax(y - a)$$
$$+ v\beta(x^2 + y^2 - 2ay - a^2) - 2ay(y - 2a)] = 0.$$

Cette équation représente le faisceau linéaire des coniques qui passent aux quatre points M qui correspondent au point (α', β'); elle peut donc se simplifier considérablement. Prenons en effet pour axes les deux diagonales du losange formé par ces quatre points; désignons maintenant par a et b la demi-longueur des diagonales de ce losange; le faisceau des coniques passant aux quatre points pourra être défini par l'ellipse qui a pour sommets ces quatre points et par le couple $xy = 0$ qui représente les axes; l'équation générale des coniques du faisceau est donc alors

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2\lambda xy}{ab} - 1 = 0.$$

Les hyperboles focales qui correspondent à cette conique sont

$$\alpha^2 - \beta^2(1 - \lambda^2) + c^2 = 0, \qquad c^2 = a^2 - b^2, \qquad \alpha\beta(1 - \lambda^2) + \lambda ab = 0;$$

il n'y a plus qu'à éliminer λ entre ces deux équations; or, la première donne $1 - \lambda^2 = \dfrac{c^2}{\alpha^2 - \beta^2}$; puis, la seconde, $\lambda = -\dfrac{c^2\alpha\beta}{ab(\alpha^2 - \beta^2)}$; portant cette valeur de λ dans l'expression de $1 - \lambda^2$, nous avons l'équation du lieu du point (α, β) qui a été supposé foyer.

Le lieu demandé est

$$(x^2 - y^2)^2 - \frac{c^4}{a^2b^2}x^2y^2 - c^2(x^2 - y^2) = 0. \tag{5}$$

Quand le point fixe est situé sur le diamètre perpendiculaire à celui du point A, il n'y a pas de changement essentiel; seulement les nouveaux axes étant parallèles aux bissectrices des anciens, le changement de coordonnées indiqué est plus facile à effectuer.

G. FONTAINE, lycée Condorcet.

Remarques géométriques. — Les droites conjuguées qui passent en M décrivent un faisceau involutif dont les rayons doubles sont les tangentes, MF et MG, issues de ce point. Les parallèles menées par le point A décrivent aussi un faisceau involutif et l'on sait que les cordes relatives à ce faisceau passent par un point fixe; si l'on mène par le point A les parallèles à MF et à MG, AC et AB, les tangentes au cercle en C et B sont deux cordes particulières; elles se coupent au point M'; le point M' est encore sur le diamètre ED qui correspond aux deux bissectrices de l'angle FMG.

Réciproquement, si on se donne le point M', et que l'on mène par ce point les tangentes au cercle, M'B, M'C, le point M est sur l'une ou l'autre des tangentes parallèles à AB et sur l'une ou l'autre des tangentes parallèles à AC; il y a donc quatre positions de M qui sont les sommets d'un losange circonscrit au cercle. Les diagonales de ce losange sont parallèles aux bissectrices de l'angle BAC; ce sont donc, en direction, les droites qui joignent le point A aux extrémités du diamètre qui passe en M'.

Solution géométrique. — Les droites conjuguées passant par M sont confondues, lorsque l'une d'elles est tangente au cercle (C). Il en résulte que M est à l'intersection des tangentes au cercle en ses points de ren-

contre G, H avec les parallèles menées par A aux tangentes issues de M. A un point M correspond donc un seul point M'. Réciproquement, si M' est donné, les directions des tangentes issues de M sont seules déterminées, et les points M correspondants sont les quatre sommets d'un losange circonscrit au cercle (C).

1. Nous allons montrer que lorsque M' se déplace sur une droite (D), le lieu des sommets de ces losanges est une conique (K) concentrique au cercle (C). P et Q étant les points d'intersection de (C) et de (D), les différents couples de droites AG, AH sont conjugués par rapport à AP, AQ. Si l'on projette la figure de façon que les points à l'infini sur AP, AQ deviennent les points cycliques, le cercle (C) se transforme en une conique concentrique, et le problème revient à trouver le lieu des sommets des rectangles circonscrits à cette conique, lieu qui est un cercle. En revenant à la question proposée, on voit que le lieu des points M est une conique ayant pour asymptotes les parallèles menées à AP, AQ par le centre du cercle. On aperçoit facilement qu'elle rencontre le cercle (C) aux points de contact des tangentes parallèles à AP, AQ (M' venant en P ou en Q).

La conique (K) est un système de deux droites lorsque la droite (D) est tangente au cercle (C). P étant le point de contact, la conique (K) se décompose évidemment en les deux tangentes parallèles à AP.

2. La droite (D) tournant autour d'un point fixe F, un des losanges est fixe : c'est celui qui correspond au cas où M' est en F. Or le lieu des foyers des coniques circonscrites à un losange ou à un parallélogramme est, comme on sait, une courbe du quatrième ordre. On peut d'ailleurs le montrer par un raisonnement élémentaire. Si l'on se donne les axes de la conique circonscrite, celle-ci est déterminée, ce qui montre qu'il y a deux points du lieu des foyers sur toute droite passant par le centre O du parallélogramme. Pour que les foyers viennent en O, il faut que la conique se réduise aux diagonales du parallélogramme. Ce cas limite se présente lorsque les axes de la conique viennent se confondre avec les bissectrices de l'angle des diagonales du parallélogramme. La courbe, lieu des foyers, est donc une quartique qui a un point double réel en O.

VASNIER.

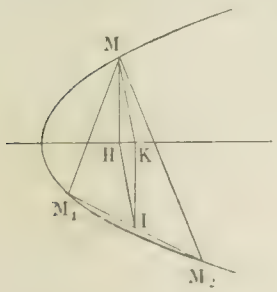
---

926. — *Par un point* M *d'une parabole donnée, on mène deux cordes* MM_1 *et* MM_2 *également inclinées sur l'axe de la parabole. Soient* I *le milieu de la corde* M_1M_2 *et* H, K *les projections de* M *et de* I *sur l'axe.*

1° *Montrer que la figure* MHIK *est un parallélogramme.*

2° *Trouver l'enveloppe de* M_1M_2 *et le lieu du point* I *quand la direction de* MM_1 *reste fixe et que le point* M *décrit la parabole donnée.*

1. Soit $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, et x_0, y_0 les coordonnées du point M. Nous avons $y_0^2 - 2px_0 = 0$.



Désignons par m et $-m$ les coefficients angulaires des cordes MM_1 et MM_2. L'équation de MM_1 est $y - y_0 = m(x - x_0)$: cette droite rencontre la parabole en deux points dont les ordonnées sont racines de l'équation $y - y_0 = m\left(\frac{y^2}{2p} - x_0\right)$ ou $y - y_0 = m\left(\frac{y^2}{2p} - \frac{y_0^2}{2p}\right)$.

Cette équation admet la racine $y - y_0$ correspondant au point M, et une autre racine $y_1 = -y_0 + \frac{2p}{m}$, ordonnée du point M_1.

L'ordonnée du point M_2 est alors $y_2 = -y_0 - \frac{2p}{m}$ et par suite, celle du point I, $\frac{y_1 + y_2}{2}$, est égale à $-y_0$.

Les points M et I ayant des ordonnées égales et de signes contraires la figure MHIK est un parallélogramme.

2. Soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite M_1M_2. Cette droite rencontre la parabole en deux points dont les ordonnées vérifient l'équation $uy^2 + 2pvy + 2pw = 0$.

Écrivons que cette équation admet pour racines $-y_0 + \frac{2p}{m}$ et $-y_0 - \frac{2p}{m}$, c'est-à-dire qu'elle est identique à l'équation $(y + y_0)^2 - \frac{4p^2}{m^2} = 0$.

Nous obtenons ainsi $\frac{u}{1} = \frac{pv}{y} = \frac{2pv}{y_0 - \frac{4p^2}{m^2}}$, par suite l'équation de M_1M_2 est

$$y - \frac{2pv}{p} \cdot \frac{y_0 - \frac{4p^2}{m^2}}{2p} = 0 \quad \text{ou} \quad (1) \quad 2px + 2yy_0 + y_0^2 - \frac{4p^2}{m^2} = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe de cette droite, nous écrirons que cette équation en y_0 a une racine double, ce qui donne

$$(2) \qquad y^2 - 2px + \frac{4p^2}{m^2} = 0,$$

équation d'une parabole égale à la parabole donnée et ayant même axe.

Le point I est déterminé par l'équation (1) et la suivante $y = -y_0$. L'équation du lieu de ce point s'obtient alors en remplaçant y_0 par $-y$ dans l'équation (1), nous obtenons la parabole (2).

Il en résulte que le point I est le point de contact de la droite M_1M_2 et de son enveloppe.

PELVOISIN.

Bonnes solutions : MM. J. D. Dufaur, école primaire supérieure d'Aiguillon; Lucien Maurin, institution Sainte-Marie, La Seyne-sur-Mer; P. Tuhiau; J. Weiss, lycée de Bar-le-Duc.

Solution géométrique. — **1.** La tangente en M et la corde M_1M_2 étant également inclinées sur l'axe de la parabole, les diamètres MX, M'X' de ces directions sont symétriques par rapport à l'axe. D'où il résulte MH = HK.

2 Supposons plus généralement que, M décrivant la parabole donnée, les cordes MM_1, MM_2 aient des directions fixes, d'ailleurs quelconques. Menons les diamètres m_1x_1, m_2x_2 des cordes MM_1, MM_2. Nous avons $M(M_1M'M_2X) = M'(M_1M'M_2X') = -1$, ce qui nous montre que MM' passe par les milieux n_1, n_2 des segments $m_1m'_1$, $m_2m'_2$. Comme, d'autre part, MI passe au milieu i de m_1m_2, in_1 et in_2, parallèles à MM_1 et MM_2, ont des directions fixes; et le triangle n_1in_2, dont les sommets se déplacent sur des diamètres fixes, reste de grandeur constante. $M'I = 2m'i$ étant par suite constant, le lieu de I est une parabole égale à la proposée, et ayant même axe. Comme d'ailleurs M_1M_2 est parallèle à la tangente en M' à la parabole donnée, l'enveloppe de la droite M_1M_2 coïncide avec le lieu du point I.

VASNIER.

CONCOURS DE 1900 (*Suite*).

ECOLE CENTRALE (**Deuxième Session.**)

Géométrie analytique.

981. — Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère la conique C qui a pour équation $y^2 - 2px = 0$, et un point P de son plan dont les coordonnées sont désignées par x, y.

1° Former l'équation de la ligne S qui limite la région du plan dans laquelle doit se trouver le point P, pour qu'il existe trois normales réelles et distinctes à la conique C, issues de ce point P. Tracer la ligne S.

2° Trouver le lieu S' du point P pour lequel l'une des normales PQ à la conique C passe par le milieu du segment intercepté sur l'axe Ox par les deux autres. Déduire graphiquement la ligne S' du tracé de S.

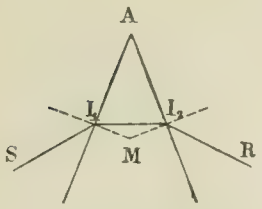
3° Les pieds de ces deux dernières normales étant M et N, trouver le lieu V du pôle de la corde MN, quand le point P parcourt la ligne S'.

4° Le pied de la troisième normale étant Q, trouver le lieu du pôle de chacune des cordes QM, QN.

5° Quel est le nombre des points P tels que deux des normales à C, issues de ce point, soient rectangulaires, et que l'une d'elles passe par le milieu du segment intercepté sur Ox par les deux autres? Construction graphique de ces points.

(*21 septembre, de 7 h. à 11 h.*)

Physique et Chimie.



I. — Décrire la méthode adoptée par Regnault pour déterminer la densité des gaz.

II. — **982**. — Démontrer que le rayon incident SI_1 et le rayon émergent I_2R sont équidistants du point M d'intersection des normales aux points d'incidence et d'émergence.

III. — Peroxyde de chlore.

IV. — **983**. — Calculer la chaleur de formation de l'acétylène en partant des éléments.

La chaleur de formation de l'anhydride carbonique est 94 calories 3.

La chaleur de formation de l'eau est 69 calories.

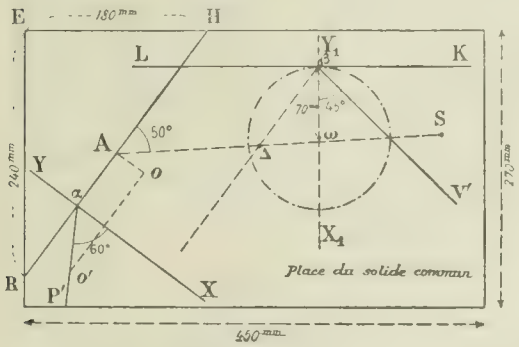
La chaleur de combustion de l'acétylène est 315 calories 7. *(21 septembre, de 2 h. à 5 h.)*

Épure.

INTERSECTION D'UN CÔNE ET D'UN CYLINDRE

984. — On demande de déterminer la *projection horizontale* de l'intersection d'un cône et d'un cylindre, les surfaces étant définies de la manière suivante :

1° Le cône a sa base contenue dans un plan donné par sa trace horizontale RH (R sur le côté gauche du cadre à 240mm du côté supérieur, H sur le côté supérieur à 180mm du côté gauche) et son angle $= 60°$ avec le plan horizontal, de manière que le rabattement de la ligne de plus grande pente soit $\alpha P'$.



La base de ce cône est un cercle tangent en A au plan horizontal (A milieu de RH), son rayon est de 65mm.

Le sommet du cône est le point S du plan horizontal (la droite SA fait un angle de 50° avec RH), la longueur $AS = 320^{mm}$.

2° Le cylindre a sa base contenue dans un plan donné par sa trace horizontale $L\beta K$ parallèle aux grands côtés du cadre et son angle $= 45°$ avec le plan horizontal. Cette base se projette horizontalement suivant un cercle $\omega\beta$ tangent en β à la droite LK, le rayon de ce cercle est de 70mm. Les génératrices du cylindre sont horizontales et parallèles à la droite RH; celle qui passe par β rencontre la droite AS au point Δ tel que $A\Delta = 140^{mm}$.

On représentera le cône *opaque* en supprimant de cette surface la portion comprise dans le cylindre, cette dernière surface étant enlevée. On limitera le cône au plan de la base donnée.

On construira ensuite à la place indiquée sur l'épure la projection horizontale du solide commun au cône et au cylindre en admettant la transparence des surfaces qui limitent ce solide.

Les constructions nécessaires à l'obtention d'un point courant et de sa tangente, ainsi que celles exécutées pour la recherche des contours apparents ou des points et tangentes remarquables seront tracées à l'encre rouge.

Cadre de 270mm sur 450mm. *Titre intérieur :* CÔNE ENTAILLÉ PAR UN CYLINDRE.

Titre extérieur : GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. | Reproduire sur l'épure les données numériques.

Trigonométrie.

CALCUL

I. — **985**. — Donner l'expression générale des angles x qui satisfont à l'équation

$$\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{2} = \sin^{-1}\alpha \,.\, \cos^{-1}\beta,$$

sachant que α est le plus petit des angles positifs tels que $\operatorname{cotg}^2\alpha = -0,354\,856\,8$, et que $\beta = 132°\,25'\,21'',11$.

PROBLÈME

II. — **986**. — On considère un triangle ABC et un point D pris sur BC.

1° Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABD, ACD soient respectivement proportionnels aux segments BD et DC.

2° Cette condition étant remplie, chercher celle qui doit être satisfaite pour que l'on puisse construire un triangle avec les données $AD = \alpha$, $BC = a$ et l'angle A.

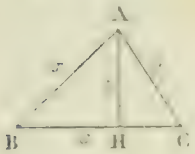
3° Construire graphiquement le triangle ABC, sachant que $a = 9^{cm}$, $\alpha = 6^{cm}$ et $A = 64°$.

(22 septembre, de 2 h. à 5 h.)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (Cours préparatoires).

Algèbre.

987. — Dans un triangle ABC, astreint à avoir les angles à la base B et C aigus, on donne la base $BC = a$, la hauteur $AH = h$ issue du sommet A et la somme $AB + AC = l$ des deux autres côtés.



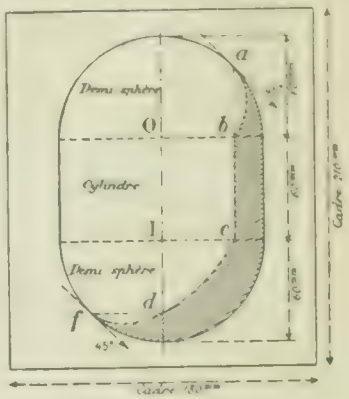
Calculer ces deux côtés $AB = x$ et $AC = y$.

Discuter et déduire de la discussion le maximum et le minimum de l en supposant qu'on fasse varier cette longueur en laissant a et h invariables.

Indiquer les formes du triangle qui correspondent au maximum et au minimum de l. (*Durée*, 3 h. 1/2.)

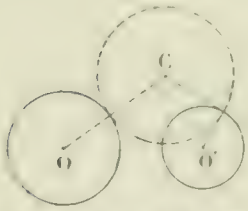
Lavis (feuille 1/8 grand-aigle).

Faire à l'encre de Chine et à teintes plates ou à teintes fondues, le lavis d'un cylindre terminé par deux demi-sphères. La surface du solide sera supposée dépolie. On ne passera pas de teinte sur le fond et on se conformera aux cotes indiquées en millimètres sur le croquis ci-contre. Les traits du cadre et les contours apparents du solide seront passés à l'encre avant de laver. Le rayon lumineux est le rayon ordinaire à 45°.



(*Durée*, 3 h. 1/2.)

Géométrie analytique.

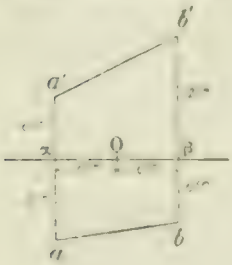


988. — Lieu du centre C d'un cercle qui touche un cercle donné O et coupe orthogonalement un second cercle également donné O'.

Épure (feuille 1/4 grand-aigle). (*Durée*, 3 h. 1/2.)

On donne les points (a, a') et (b, b') dont les lignes de rappel sont à des distances égales $O\alpha = O\beta = 6^{cm}$ du centre de la feuille, et dont les cotes et éloignements sont :

$$\alpha a' = 6^{cm}, \qquad \beta b' = 12^{cm}, \qquad \alpha a = 8^{cm}, \qquad \beta b = 6^{cm}.$$



Dans le plan qui passe par la droite $(ab, a'b')$ et qui fait, du côté droit de ab pour un observateur placé en a et regardant le point b, un angle de 45° avec le plan horizontal, on construit l'hexagone régulier dont $(ab, a'b')$ est la diagonale.

On construit ensuite les trois cercles ayant pour diamètres les diagonales de l'hexagone et dont les plans sont perpendiculaires à celui de cet hexagone, c'est-à-dire dont un diamètre est dirigé suivant la perpendiculaire à ce plan élevée par le centre de l'hexagone.

Par deux de ces cercles on peut faire passer un cylindre ayant ses génératrices parallèles à la diagonale qui sert de diamètre au troisième cercle. On définit ainsi trois cylindres.

Représenter le solide commun à ces trois cylindres.

Le contour apparent et les arêtes du solide obtenu seront dessinés en noir, les parties cachées étant en pointillé, les lignes de construction seront en rouge, les côtés de l'hexagone en bleu. (*Durée*, 3 h. 1/2.)

QUESTIONS PROPOSÉES

989. — Par un point fixe A de l'axe d'une parabole on mène un rayon variable AM qui rencontre la parabole en M ; on prend la projection H de ce point sur l'axe et le symétrique A_1 du point A par rapport à H.

Trouver les lieux de la projection de A sur MA_1, de la projection de A_1 sur MA et de l'orthocentre du triangle MAA_1.

Construire ces courbes quand le point A est au foyer. E.-N. Barisien.

990. — Les points A, B, C étant fixes, par BC on fait passer un cercle variable qui rencontre AB et AC en B et C. Trouver le lieu du pôle de BC par rapport à ce cercle.

Erreur. N° de septembre 1900, page 606, énoncé 967, au lieu de *perce le plan polaire du point* P, lire *perce le plan polaire du point* M.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

[illegible]

11e Année. N° 3. Décembre 1900.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE

de M. **Th. Leconte**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nantes.

Voici une application simple de la représentation paramétrique des points d'une conique. Il s'agit d'une solution de la question d'examen suivante :

Les génératrices d'un même système d'une quadrique tracent sur deux cercles parallèles de la quadrique des arcs semblables.

Soient deux coniques C et Γ tracées sur une quadrique. Une génératrice G les rencontre en M et μ. Si G varie en restant dans le même système, il y a entre les paramètres t et θ définissant les points M et μ une relation qui est homographique

$$(1) \qquad at\theta + bt + c\theta + d = 0.$$

Les deux coniques C et Γ ont deux points communs. On pourra, en opérant des transformations homographiques sur t et θ, faire que ces points communs soient obtenus sur les deux coniques par les mêmes valeurs, choisies arbitrairement, des paramètres. Ces deux valeurs seront alors racines de l'équation

$$at^2 + (b + c)t + d = 0,$$

et on pourra les prendre égales à 0 et ∞ si les points communs aux deux coniques sont réels, à $\pm i$ s'ils sont imaginaires. Dans le premier cas, la relation (1) prendra la forme

$$(2) \qquad \frac{t}{\theta} = C^{te}$$

et dans le second,

$$(3) \qquad \frac{t - \theta}{1 + t\theta} = C^{te}.$$

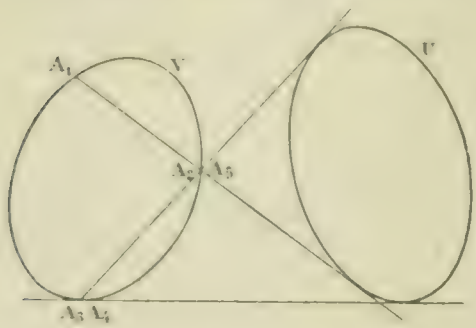
Supposons maintenant que C et Γ soient deux cercles parallèles. Rappelons que la représentation unicursale classique d'un point M d'un cercle de centre O consiste à prendre pour paramètre $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, φ étant l'angle AOM, A étant un point fixe quelconque du cercle. De plus, les points à l'infini du cercle sont donnés par les valeurs $\pm i$ de t.

Employons cette représentation pour les cercles C et Γ de manière que les origines A et α prises sur eux soient les traces d'une génératrice de même système que Mμ. Nous pourrons appliquer la relation (3) qui existera entre $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$. Mais comme pour $t = 0$ on aura $\theta = 0$, cela se ramènera à $t = \theta$ ou encore à $\varphi = \psi$.

La proposition est démontrée.

RECTIFICATION

Dans mon article du n° 1 de cette année, il y a une erreur qui ne change d'ailleurs rien au principe de la démonstration. Les sommets des polygones singuliers circonscrits à U et inscrits dans V ne sont pas tous confondus au point de contact d'une tangente commune. Si, en effet, du point A_1 (fig. 2 de l'article), on mène, comme tangente à U, la tangente commune, elle rencontre bien V en un point A_2 confondu avec A_1, mais ensuite, il faut de A_2 mener à U une tangente *différente* de la précédente, ce qui donne pour troisième sommet un point différent de A_1.



En conséquence, il faut supprimer les trois lignes 8,9,10 de la page 2, depuis les mots « Ce sont les *quatre points* » jusqu'aux mots « avec les points $A_2A_3 \ldots A_{p+1} \ldots$ » et les remplacer par ce qui suit :

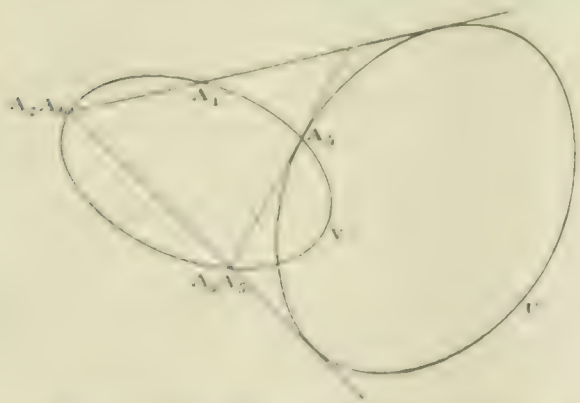
« Soit d'abord p impair $= 2p' - 1$ (sur la figure $p' = 3$).

Menons une tangente commune aux deux coniques ; appelons $A_{p'}$ son point de contact avec V. (Nous allons voir tout à l'heure la raison de cette notation.) De $A_{p'}$ menons à U la tangente autre que la précédente. Elle coupe V en $A_{p'-1}$. De $A_{p'-1}$ menons la tangente autre que la précédente ; elle coupe V en $A_{p'-2}$, et ainsi de suite jusqu'à un point A_1.

Si l'on part du point A_1, en menant à la conique U la tangente A_1A_2, ce qui donne un premier côté A_1A_2 d'un polygone, puis, du point A_2, la tangente A_2A_3, ce qui donne un second côté A_2A_3 d'un polygone et ainsi de suite, on arrive au côté $A_{p'-1}A_{p'}$. Arrivé à ce point de la construction, si l'on mène de $A_{p'}$ une tangente à U différente du côté $A_{p'-1}A_{p'}$, cette tangente n'est autre que la tangente commune, de sorte que $A_{p'+1}$ coïncide avec A_1. On voit alors immédiatement qu'en continuant la construction, on repasse aux sommets $A_{p'+1}$, $A_{p'+2}$,.... et qu'on revient en A_1 après $2p'-1$ opérations. On obtient ainsi un polygone de $2p'-1$ côtés inscrit à V et circonscrit à U, mais qui n'est pas un vrai polygone, puisque le $(p'+1)^{\text{ème}}$ sommet coïncide avec le $p'^{\text{ème}}$, le $(p'+2)^{\text{ème}}$ avec le $(p'-1)^{\text{ème}}$, et ainsi de suite.

Il faut d'ailleurs remarquer que si l'on partait d'un sommet de ce polygone autre que A_1, on ne trouverait pas un polygone de $2p'-1$ côtés inscrit dans V et circonscrit à U. Supposons en effet qu'on parte de A_2, il est évident qu'on y revient après $2p'-3$ opérations seulement.

Ainsi, à chaque tangente commune correspond un polygone singulier de $2p'-1$ côtés, et comme il y a quatre tangentes communes, il y a quatre de ces polygones.



Les explications que nous venons de donner dans le cas où p est impair nous permettront d'être plus brefs dans le cas où p est pair.

Soit $p = 2p'$ (sur la figure $p' = 3$). Prenons un point d'intersection des deux coniques, soit $A_{p'+1}$. En ce point menons la tangente à U. Elle coupe V en $A_{p'}$. De $A_{p'}$ menons à U la tangente autre que la précédente. Elle coupe V en $A_{p'-1}$, et ainsi de suite jusqu'à un point A_1. Si l'on part du point A_1, en menant à la conique U la tangente A_1A_2, on obtient, en continuant la construction, un polygone de $2p'$ côtés inscrit dans V et circonscrit à U, mais qui n'est pas un vrai polygone, parce que $A_{p'}$ coïncide avec $A_{p'+1}$, $A_{p'-1}$ avec $A_{p'+2}$, etc.

Il y a quatre de ces polygones puisqu'il y a quatre points d'intersection. »

Tout le reste de l'article subsiste sans modification. En résumé les quatre polygones singuliers dont les premiers sommets A_1 sont donnés par l'équation (2) sont moins simples que nous n'avions dit d'abord.

Monsieur Lebesgue, qui a bien voulu nous faire remarquer cette erreur, nous annonce qu'il fait paraître un article sur le même sujet dans l'« Enseignement Mathématique ».

E. CAHEN.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

923. — *On donne une ellipse* E *et une droite* D *dans son plan ; on considère les coniques* S *ayant pour axe la droite* D *et bitangentes à l'ellipse* E.

1° *Démontrer que la corde des contacts passe par un point fixe* P.

2° *Par un point* M *du plan passent deux coniques* S ; *pour quelles positions du point* M *les coefficients des équations de ces coniques sont-ils réels ?*

3° *Distinguer, suivant la position du point* M *dans le plan, le genre des coniques* S *qui passent par ce point.*

4° *Lorsque la droite* D *tourne autour d'un point* Q, *quel est le lieu du point* P ?

1. Prenons pour axe des x la droite D et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite, puis représentons par

$$E \equiv Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 + 2B'x + 2By + A'' = 0$$

l'ellipse donnée. L'une quelconque des coniques S aura alors pour équation

$$E + \lambda(ux + vy + w)^2 = 0,$$

à condition que nous exprimions qu'elle admet Ox pour axe de symétrie, c'est-à-dire que les termes du premier degré en y sont nuls ; ceci nous donne

$$B'' + \lambda uv = 0, \qquad B + \lambda vw = 0, \qquad \text{puis} \qquad Bu - B''w = 0.$$

La corde des contacts de la conique S avec la conique E passe donc par le point fixe dont les coordonnées sont $\frac{B}{B''}$ et 0 ; ce point est sur Ox et il est naturel alors de porter les axes en ce point, ou, ce qui revient au même, de supposer primitivement que B soit nul. Faisons alors $B = 0$, $w = 0$, $v = 1$, $u = -m$ dans l'équation de S, nous aurons la relation unique $B'' - \lambda m = 0$ qui détermine λ, $\lambda = \frac{B''}{m}$. L'équation générale des coniques S est donc

$$S \equiv mE(x, y) + B''(y - mx)^2 = 0.$$

Il est évident que cette conique est aussi doublement tangente à l'ellipse symétrique de E par rapport à Ox,

$$E_1 \equiv Ax^2 - 2B''xy + A'y^2 - 2B'x + A'' = 0 ;$$

mais ce résultat est facile à vérifier par le calcul, car on a $E - E_1 = 4B''xy$, et, par suite,

$$S \equiv mE_1(x, y) + B''(y + mx)^2 = 0.$$

2. Si nous nous donnons x, y, l'équation $S = 0$ est du second degré en m ; elle donne deux valeurs pour m ; il y a donc deux coniques S qui passent par un point quelconque du plan. Ces coniques seront à coefficients réels, si les deux valeurs de m sont réelles, c'est-à-dire si le discriminant de l'équation

$$B''m^2x^2 + (E - 2B''xy)m + B''y^2 = 0$$

est positif, ce qui donne

$$(E - 2B''xy)^2 - 4B''^2x^2y^2 > 0,$$

ou

$$E(E - 4B''xy) > 0, \qquad \text{ou enfin} \qquad EE_1 > 0.$$

Pour interpréter cette inégalité, nous allons nous placer dans un cas de figure déterminé : nous supposerons que l'ellipse E coupe l'axe des x en deux points réels et que l'ellipse E_1 rencontre E en deux points réels, naturellement symétriques par rapport à Ox et situés sur l'axe des y choisi. Alors, ces deux ellipses divisent le plan en six régions, comme le montre la figure 1 ; dans la région extérieure aux deux ellipses, E et E_1 ont toutes deux le signe de A, le produit EE_1 est positif, et par chaque point

de cette région il passe deux coniques S réelles : il en est de même dans la région intérieure aux deux ellipses, tandis que par les points des quatre régions hachurées il ne passe aucune conique S réelle ou simplement ayant une équation à coefficients réels. Par chaque point de l'ellipse E ou de l'ellipse E_1, il passe deux coniques S confondues, pour lesquelles la valeur de m est le coefficient angulaire de la droite qui joint le point O au point de contact avec E_1.

3. Cela posé, nous remarquons que les deux coefficients A et A′ peuvent être supposés positifs, puisque la conique E est une ellipse, et qu'il en est de même de B′, puisque les coniques E et E_1 jouent le même rôle ; d'ailleurs en changeant le sens positif de Oy, nous pouvons donner à B′ le signe que nous voulons. En outre, le coefficient de m dans l'équation du second degré qui détermine ce paramètre est

$$E_0 = Ax^2 + Ay^2 + 2B'x + A',$$

et l'équation $E_0 = 0$ représente une ellipse ayant Ox pour axe de symétrie et passant aux quatre points de rencontre de E avec E_1. Cette ellipse a été tracée en pointillé sur la figure et traverse les régions hachurées. Des deux régions conservées, l'une est intérieure à E_0, l'autre extérieure ; dans la première, on a $E_0 < 0$, les deux racines de l'équation en m sont positives ; dans l'autre, $E_0 > 0$, les deux racines sont négatives.

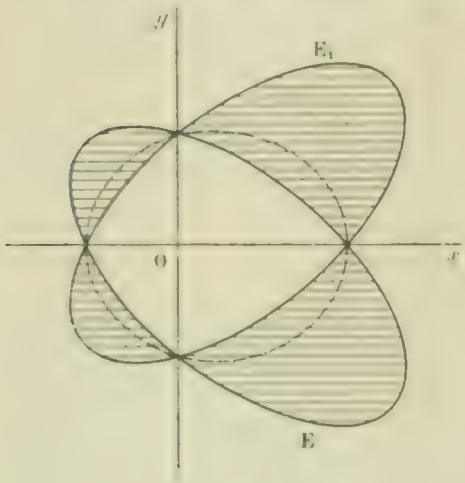


Fig. 1.

Développons maintenant les termes du second degré de la conique S et formons $\delta = AA' - B'^2$; nous aurons ici

$$\delta = m(A + Bm)(B' + A'm).$$

Dans la région intérieure commune à E et à E_1, les deux valeurs de m sont positives, les deux valeurs de δ sont positives aussi et les deux coniques S qui se coupent en un point quelconque de cette région sont toujours des ellipses.

Dans la région extérieure, les valeurs de m sont négatives et δ a le signe de

$$-(A + Bm)(B' + A'm);$$

par conséquent δ ne pourra changer de signe que quand m atteindra l'une des valeurs $-\frac{A}{B}$ ou $-\frac{B'}{A'}$. En portant ces deux nombres dans l'équation du second degré qui donne m, ou dans S, nous aurons les deux lieux sur lesquels seulement δ peut changer de signe à l'extérieur de E et de E_1 ; ce sont deux coniques S, deux paraboles du faisceau : l'une, celle qui correspond à $-\frac{A}{B}$, a pour équation

$$P = (Ax + By)^2 - AE_0(x, y) = 0,$$

ou

$$P = -(AA' - B'^2)y^2 - 2AB'x - AA' = 0;$$

elle est symétrique par rapport à Ox et facile à placer ; l'autre, celle qui correspond à $-\frac{B'}{A'}$, a pour équation

$$Q = (B'x + A'y)^2 - A'E_0(x, y) = 0,$$

ou

$$Q = -(AA' - B'^2)x^2 - 2AB'x - AA' = 0;$$

elle se compose de deux droites parallèles à Oy, ce sont deux des tangentes communes à E et à E_1 (*fig.* 2). Plaçons ces courbes et cherchons les signes de leurs premiers membres : comme $AA' - B'^2$ est positif, chacune d'elles admet pour région négative la région extérieure, les régions positives sont donc les

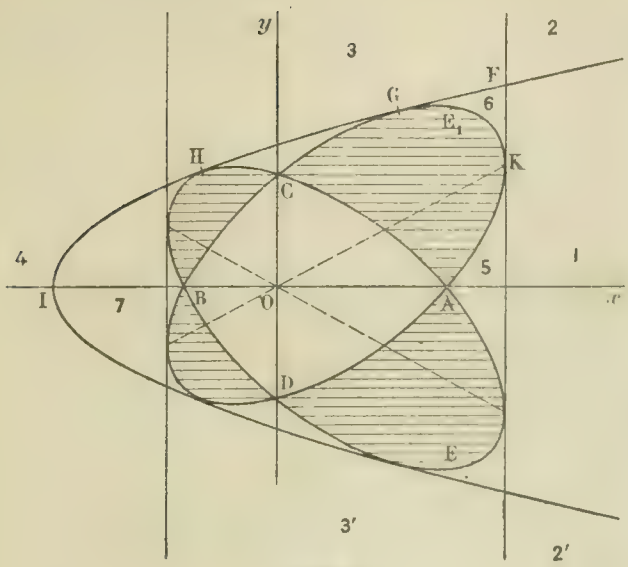


Fig. 2.

régions intérieures. Numérotons alors les régions découpées dans le plan par les quatre lignes que nous avons rencontrées et voyons ce qui se passe dans chacune d'elles : il nous suffira pour cela de placer les racines de l'équation du second degré en m par rapport aux deux nombres $-\frac{A}{B''}$ et $-\frac{B'}{A'}$ (le premier étant plus petit que le second).

Dans la région (1), P est positif et Q est négatif ; il y a donc une valeur de m entre $-\frac{A}{B'}$ et $-\frac{B''}{A'}$ et une entre $-\frac{B''}{A'}$ et 0 ; la première rend δ positif, et la seconde, δ négatif. Par chaque point de (1) il passe une ellipse et une hyperbole. Même chose dans la région (7).

Dans la région (2), P et Q sont négatifs ; l'une des valeurs de m est moindre que les deux nombres $-\frac{A}{B''}$ et $-\frac{B'}{A'}$; l'autre est plus grande ; les deux coniques correspondantes sont des hyperboles. Il en est de même dans les régions (4) et (2').

Dans la région (3), P est négatif, Q est positif ; il passe par chaque point une hyperbole et une ellipse. Même résultat dans la région (3').

Passons maintenant aux régions intérieures à la fois aux deux lignes P et Q, par exemple, à la région (5). Dans cette région, P et Q sont positifs, les valeurs de m sont toutes deux moindres que $-\frac{A}{B''}$ ou supérieures à $-\frac{B''}{A'}$ ou comprises entre $-\frac{A}{B''}$ et $-\frac{B}{A'}$, les deux coniques sont de même espèce. Pour savoir exactement ce qui se passe, nous nous appuierons sur la continuité de m et par suite de δ, et nous en conclurons que les résultats sont les mêmes en tous les points de la région étudiée ; or en un point de l'arc AK de l'ellipse E_1, les deux valeurs de $-m$ sont confondues avec le coefficient angulaire de la corde des contacts avec E_1 ; elles sont moindres que le coefficient angulaire du diamètre conjugué de Oy, c'est-à-dire que $\frac{B''}{A'}$; nous avons donc $m > -\frac{B'}{A'}$. Les deux coniques confondues sont des hyperboles. Ce sont donc des hyperboles pour tous les points de la région (5).

Dans la région (6), nous prendrons un point de l'arc GK et ce point nous montrera que $-m$ est alors compris entre $\frac{B''}{A'}$ et $\frac{A}{B''}$; donc m est compris entre les deux nombres $-\frac{A}{B}$ et $-\frac{B'}{A}$ et les deux coniques correspondantes sont des ellipses.

Nous ne poursuivrons pas cette discussion fastidieuse qu'il serait facile d'achever.

4. La deuxième partie est évidente. Le lieu du point P est le lieu du point de rencontre d'une droite qui tourne autour d'un point fixe avec le diamètre conjugué de la direction perpendiculaire à la droite. C'est l'hyperbole d'Apollonius du point fixe Q.

Remarque. — La première partie est évidente géométriquement, si on se rappelle que tout point de la corde des contacts a même polaire dans les deux coniques : car alors le point P où cette corde ren-

contre D est un point dont la polaire est perpendiculaire à D : c'est donc un point du diamètre des cordes perpendiculaires à D ; par conséquent ce point est fixe, il est le même pour toutes les coniques S.

Très bonne solution : M. Cans, à Versailles.
Bonne solution : M. J. Weiss, lycée de Bar-le-Duc.

---

924. — *On donne deux cercles* O *et* O′, *le cercle* O′ *ayant son centre sur le cercle* O, *et des extrémités* A *et* A′ *d'un diamètre du cercle* O *on mène au cercle* O′ *des tangentes qui peuvent former un quadrilatère* (Q).

1° *Montrer que les quatre sommets du quadrilatère* (Q) (*autres que* A *et* A′) *sont situés sur un cercle* Ω, *et que le cercle* Ω *est orthogonal au cercle* O.

2° *Le cercle* O′ *étant assujetti à couper* AA′ *sous un angle constant, trouver les courbes, lieux du point de concours* P *des deux diagonales* (*autres que* AA′) *du quadrilatère* (Q), *du centre du cercle* Ω *et des centres de similitude des cercles* O′ *et* Ω.

3° *Si le point* P *décrit une droite* Δ, *le centre du cercle* Ω *décrit une conique* S. *Trouver, lorsque la droite* Δ *tourne autour d'un point fixe, le lieu du centre et l'enveloppe des asymptotes de la conique* S.

Je prends pour axes le diamètre AA′ du cercle O et le diamètre perpendiculaire ; je désigne par a le rayon de ce cercle, son équation est alors $x^2+y^2-a^2=0$. D'autre part, les coordonnées x_0, y_0 du point O′ vérifient la relation

$$(1)\qquad x_0^2+y_0^2-a^2=0,$$

et l'équation du cercle O′ est $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-\rho^2=0$,

ou
$$x^2+y^2-2xx_0-2yy_0+a^2-\rho^2=0.$$

1. L'ensemble des tangentes menées du point A′$(a, 0)$ au cercle O′ a pour équation

$$[x(a-x_0)+yy_0-ax_0+a^2-\rho^2]^2-(x^2+y^2-2xx_0-2yy_0+a^2-\rho^2)(2a^2-2ax_0-\rho^2)=0,$$

ou, en simplifiant et en utilisant la relation (1),

$$(\rho^2-y_0^2)(x^2-2y_0(a-x_0)xy+(\rho^2-(a-x_0)^2)y^2-2a(y_0^2-\rho^2)x+2ay_0(a-x_0)y+a^2(\rho^2-y_0^2)=0.$$

En changeant a en $-a$, on obtient l'équation de l'ensemble des tangentes issues du point A

$$(\rho^2-y_0^2)(x^2+2y_0(a+x_0)xy+(\rho^2-(a+x_0)^2)y^2+2a(y_0^2-\rho^2)x+2ay_0(a+x_0)y+a^2(\rho^2-y_0^2)=0.$$

Tout revient à établir qu'on peut combiner linéairement ces deux équations de manière à obtenir l'équation d'un cercle. Eliminons pour cela le terme en xy en multipliant respectivement les deux équations par $a+x_0$, $a-x_0$ et en les ajoutant membre à membre ; nous obtenons

$$(\rho^2-y_0^2)(x^2+y^2)-2xx_0(\rho^2-y_0^2)-2yy_0+a^2(\rho^2-y_0^2)=0,$$

ou
$$x^2+y^2-2xx_0-2y\frac{y_0^2}{y_0^2-\rho^2}+a^2=0.$$

C'est l'équation du cercle Ω.

La puissance du point O par rapport à ce cercle est égale à a^2, donc les cercles O et Ω sont orthogonaux.

2. Soit θ l'angle constant sous lequel le cercle O′ coupe AA′, nous avons

$$(2)\qquad y_0=\rho\cos\theta.$$

Le point de concours P des diagonales du quadrilatère (Q) est le pôle de AA′ par rapport au cercle O′, il est donc facile d'avoir les coordonnées de ce point. On trouve

$$(3)\qquad x=x_0,\qquad y=\frac{y_0^2-\rho^2}{y_0}.$$

Le lieu du point P s'obtient en éliminant x_0, y_0, ρ entre les équations (1), (2) et (3). Nous avons $x_0 = x$; puis $y_0 = \sqrt{a^2 - x^2}$, $\rho = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\cos\theta}$, et en portant ces valeurs dans la deuxième équation (3), nous obtenons

$$x^2 + y^2 \operatorname{cotg}^4\theta - a^2 = 0.$$

Le lieu est une ellipse dont l'un des axes est AA′ et dont l'autre a pour longueur $a \operatorname{tg}^2\theta$.

Le centre du cercle Ω a pour coordonnées

$$(4) \qquad x = x_0, \qquad y = \frac{y_0^2}{y_0 - \rho}.$$

Nous aurons l'équation du lieu de ce point en éliminant x_0, y_0, ρ entre les équations (1), (2) et (4). Ce calcul est analogue au précédent et conduit à l'équation

$$x^2 - y^2 \operatorname{tg}^4\theta - a^2 = 0,$$

qui représente encore une ellipse dont l'un des axes est AA′.

Cherchons enfin le lieu des centres de similitude des cercles O′ et Ω. Le rayon du cercle Ω est égal à

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{y_0^2}{(y_0^2 - \rho^2)^2} - a^2}, \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{\frac{y_0^2}{(y_0^2 - \rho^2)^2} - y_0^2} \qquad \text{ou enfin à} \qquad \frac{2y_0\sqrt{2y_0^2 - \rho^2}}{y_0^2 - \rho^2}.$$

Désignons ce rayon par r. Les centres S de similitude des cercles O′ et Ω sont définis par l'égalité

$$\frac{S\Omega}{SO'} = \pm\frac{r}{\rho};$$

par suite, les coordonnées des deux points S sont

$$x = x_0 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\dfrac{y_0^2}{y_0 - \rho^2} \pm \dfrac{r}{\rho} y_0}{1 \pm \dfrac{r}{\rho}},$$

ou, en remplaçant r par sa valeur,

$$y = \frac{y_0^2 \pm y_0\sqrt{2y_0^2 - \rho^2}}{y_0 - \rho^2 \pm y_0\sqrt{2y_0^2 - \rho^2}},$$

les signes se correspondant.

Remplaçons ρ par $\frac{y_0}{\cos\theta}$, nous avons $y = Hy_0$, H désignant l'une ou l'autre des deux quantités

$$\frac{1 \pm \sqrt{2 - \dfrac{1}{\cos^2\theta}}}{1 - \dfrac{1}{\cos^2\theta} \pm \sqrt{2 - \dfrac{1}{\cos^2\theta}}}.$$

En opérant comme précédemment, on voit que le lieu des centres de similitude se compose des deux ellipses

$$x^2 + \frac{y^2}{H^2} - a^2 = 0.$$

3. Soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite Δ. Puisque le point P décrit cette droite, on a

$$(5) \qquad ux_0 + v\frac{y_0 - \rho^2}{y_0} + w = 0.$$

D'autre part, les coordonnées du point O′ sont

$$x = x_0, \qquad y = \frac{y_0^2}{y_0 - \rho^2},$$

et pour avoir le lieu de ce point, nous éliminons x_0, y_0, ρ entre ces trois dernières équations et la relation $x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$.

La tangente en β a pour

$$mx + x\frac{y}{y} + n = 0,$$

et en y remplaçant x par $\alpha^2 - x^2$, nous avons

$$xy - mxy - ny - ma^2 = 0,$$

c'est l'équation de la conique S.

Soit (α, β) le point fixe par lequel passe Δ, alors $(\alpha = m\alpha + n\beta)$ et l'équation de la conique devient

$$xy - mxy + m\alpha y + n\beta y - \alpha x = 0.$$

Son centre est défini par les équations

$$2x - my + \alpha = 0, \qquad -mx + m\alpha + n\beta = 0;$$

éliminons le rapport $\frac{y}{x}$ entre ces deux équations, nous avons l'équation du lieu du centre

$$2x^2 - 2\alpha x - \beta y = 0.$$

Cette équation représente une parabole dont l'axe est perpendiculaire à AA'.

La conique S a une asymptote perpendiculaire à AA'. L'autre a pour coefficient angulaire $\frac{\beta}{\alpha}$; par suite l'équation de cette seconde asymptote est

$$\beta x + \frac{\beta}{\alpha} \beta y = 0, \qquad \text{ou} \qquad \alpha x + \beta y = 0.$$

Pour avoir son enveloppe, nous écrivons que cette équation a une racine double en $\frac{y}{x}$, ce qui donne

$$(\alpha - \beta y)^2 - 4\beta y = 0$$

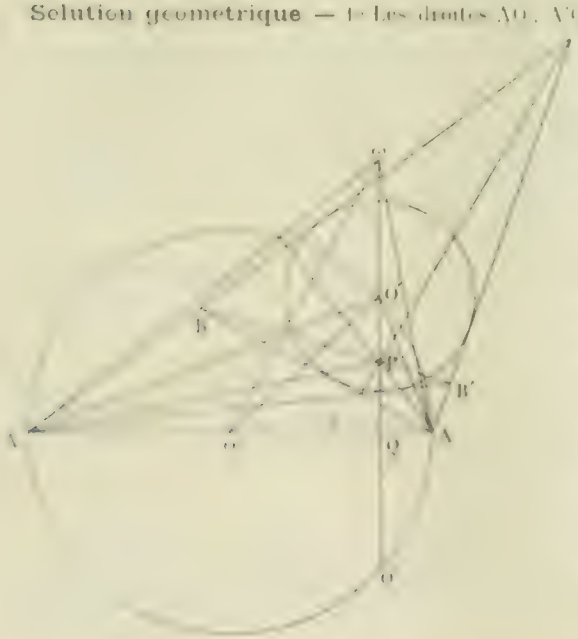
ou

$$(\alpha - \beta y)^2 = 4\beta y = (y - \beta)^2.$$

Cette enveloppe est une parabole qui a pour foyer le point (α, β) et pour directrice la droite $\beta - y = 0$.

F. A. G., à Caen.

Solution géométrique — 1° Les droites AO, A'O' bissectrices des angles BAB', BAB' étant rectangulaires le quadrilatère PQ' a ses côtés deux à deux également inclinés sur deux droites rectangulaires et est par suite inscriptible à un cercle ω.



Le cercle ω est conjugué par rapport au triangle APA'. Son centre est donc le point de concours ω des hauteurs de ce triangle, et on a, en appelant r son rayon,

$$\omega P . \omega Q = r^2.$$

Mais P est également le point d'intersection des polaires des points A et A' par rapport au cercle O. Le point P, pôle de AA' est sur la perpendiculaire abaissée de O sur AA'; on a, r' étant le rayon du cercle O',

$$OP . OQ = r'^2.$$

De plus, comme Q est le milieu du segment OO', dont les extrémités sont conjuguées par rapport à ωP, on a

$$\overline{OQ}^2 = PQ . \omega Q.$$

Cela posé la puissance du cercle ω par rapport au point O est

$$P = \overline{O\omega}^2 - r^2.$$

Or, dans les triangles rectangles $OQ\omega$, OQO', on a

$$\overline{O\omega}^2 - \overline{OO'}^2 = \overline{\omega Q}^2 - \overline{O'Q}^2 ; \qquad \text{d'où l'on déduit} \qquad P_0 = a^2 - r^2 + \overline{\omega Q}^2 - \overline{O'Q}^2.$$

Mais
$$\overline{\omega Q}^2 - \overline{O'Q}^2 = \omega Q(\omega Q - PQ) = \omega Q.\omega P = r^2;$$

d'où $P_0 = a^2$, c'est-à-dire le carré du rayon du cercle O, ce qui démontre l'orthogonalité des cercles O et Ω.

2° Si l'on désigne par θ l'angle constant sous lequel le cercle O′ coupe AA′, on a

$$O'Q = \rho \cos\theta.$$

On en tire
$$O'P = \frac{\rho^2}{O'Q} = \frac{O'Q}{\cos^2\theta}, \qquad \text{et par suite} \qquad PQ = O'Q\left(1 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right) = -O'Q\,\mathrm{tg}^2\,\theta.$$

Le lieu du point de concours P des diagonales du quadrilatère est donc une ellipse de sommets A et A′, obtenue en réduisant les ordonnées du cercle O dans le rapport de $-\mathrm{tg}^2\,\theta$ à 1.

Le lieu du point ω est une ellipse analogue. On a en effet

$$\omega Q = \frac{\overline{O'Q}^2}{PQ} = -O'Q\,\mathrm{cotg}^2\,\theta.$$

Il nous reste à chercher le lieu des centres de similitude des cercles O′ et Ω. Pour cela, calculons le rapport des rayons ; on a

$$\frac{r^2}{\rho^2} = \frac{\omega P.\omega Q}{O'P.O'Q} = \frac{(\omega Q - PQ)\omega Q}{(O'Q - PQ)O'Q} = \frac{-\mathrm{cotg}^2\,\theta(-\mathrm{cotg}^2\,\theta + \mathrm{tg}^2\,\theta)}{1 + \mathrm{tg}^2\,\theta} = \mathrm{cotg}^4\,\theta(1 - \mathrm{tg}^2\,\theta).$$

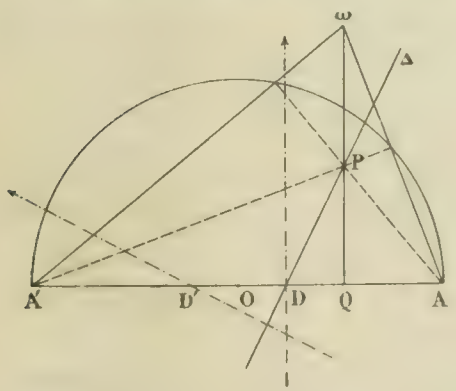
On voit en passant que le rapport des rayons reste constant. Soit M un des centres de similitude, sur la droite ωO′, on a

$$\frac{\omega M}{O'M} = \frac{\omega Q - MQ}{O'Q - MQ} = \pm\frac{r}{\rho}.$$

D'où l'on tire
$$MQ = \frac{\pm\frac{r}{\rho}O'Q - \omega Q}{\pm\frac{r}{\rho} - 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\,\theta}}{-\mathrm{tg}^2\,\theta \pm \sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\,\theta}}.$$

Le lieu des centres de similitude se compose donc de deux ellipses de sommets A et A′.

Nous allons chercher le lieu de ω lorsque le point P décrit une droite Δ.



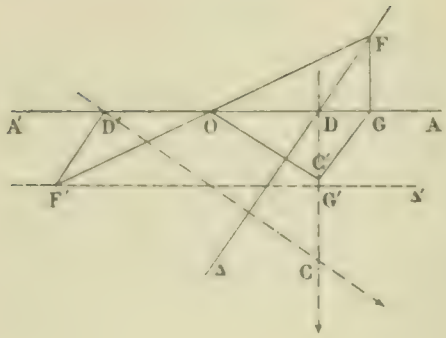
Les deux rayons Aω, A′ω forment des faisceaux homographiques. Si l'on se donne par exemple Aω, la perpendiculaire abaissée de A′ sur cette droite rencontre Δ en P : le rayon A′ω est la perpendiculaire à AP. Il résulte de là que le lieu de ω est une conique S passant par les points A et A′. On voit qu'elle passe aussi par les points de rencontre du cercle O et de la droite Δ. Lorsque P vient en D sur AA′, le point ω s'éloigne à l'infini. La perpendiculaire élevée en D à AA′ est donc une asymptote de la conique S. Lorsque P s'éloigne à l'infini sur la droite Δ, le point ω s'éloigne à l'infini dans la direction perpendiculaire à Δ, puisque A′ω est perpendiculaire à AP et que AP devient parallèle à Δ.

Du reste la deuxième asymptote de S coupe la corde AA′ en un point D′ tel que A′D′ = AD, c'est-à-dire au symétrique de D par rapport à O. La deuxième asymptote est donc la perpendiculaire à Δ menée par D′.

Supposons maintenant que la droite Δ passe par un point fixe F. Une des asymptotes de la conique S conserve une direction fixe. L'enveloppe de l'autre asymptote se trouve facilement. Menons par D′ la perpendiculaire à la deuxième asymptote ; elle rencontre OF au point F′ symétrique de F par rapport à O. Le point F′ est donc fixe et l'enveloppe de l'asymptote est la parabole ayant pour foyer F′ et pour tangente au sommet AA′.

Cherchons le lieu du centre C de la conique S, intersection des deux asymptotes. La perpendiculaire à Δ menée par O rencontre DC en son milieu C′. Or les deux triangles rectangles semblables ODC′ et FGD donnent

$$\frac{OD}{DC'} = \frac{FG}{DG},$$



ou $$OD.DG = FG.DC' = DG'.DC',$$

la droite F'G' étant parallèle à AA'. C' est donc le point de concours des hauteurs d'un triangle dont deux sommets O, G sont fixes, et dont l'autre G' se déplace sur une droite fixe Δ' parallèle à OG.

C'est un cas particulier d'un problème identique à celui qu'on a étudié plus haut. Le lieu de C' est une conique qui passe par les points O et G et qui a pour direction asymptotique double la perpendiculaire à AA'; c'est donc une parabole. Le lieu du centre C de la conique S qui s'obtient en doublant les ordonnées du lieu de C' à partir de AA', est une parabole d'axe perpendiculaire à AA' et qui passe par les points O et G.

VASNIER.

---

927. — *1° Trouver le lieu du sommet du cône passant par deux cercles d'une quadrique, l'un fixe, l'autre variable, situés dans des plans non parallèles.*

2° Suivant la position du centre de la quadrique par rapport au lieu trouvé et à ses asymptotes, reconnaître la nature de cette quadrique.

3° Trouver le lieu du symétrique du cercle variable par rapport au centre de la sphère passant par ce cercle variable et le cercle fixe, et faire voir comment la nature de ce lieu est liée à celle de la première quadrique, en s'appuyant sur le résultat obtenu dans la seconde partie.

1° Les deux cercles étant situés sur une même quadrique ont en commun deux points réels ou imaginaires conjugués, situés sur la droite d'intersection des deux plans de ces cercles. Prenons pour origine le centre du cercle fixe, pour axe des y une parallèle à la droite d'intersection des deux plans et pour axes des x et des z les diamètres des cercles perpendiculaires à Oy ou des parallèles à ces diamètres : nous aurons ainsi un système d'axes dans lequel un seul angle n'est pas droit, l'angle xOz que nous représenterons par θ.

Cela posé, en supposant que ce soit le plan du cercle fixe qui ait été pris pour plan des xy et en désignant par $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ l'équation de ce cercle, nous pourrons représenter la quadrique donnée par une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + 2axz + 2bz = 0;$$

les deux cercles de l'énoncé sont alors les sections de cette surface par les plans $z = 0$ et $x - \lambda = 0$.

Toute quadrique et, en particulier, l'un des cônes passant par ces deux cercles, a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + 2axz + 2bz + 2\mu z(x - \lambda) = 0,$$

ou, en changeant les paramètres,

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + 2\lambda xz + 2\mu z = 0.$$

Nous aurons le lieu du sommet de ce cône en annulant les quatre dérivées partielles et éliminant entre elles λ et μ; ce calcul donne successivement

$$x + \lambda z = 0, \qquad y = 0, \qquad z + \lambda x + \mu = 0 \qquad \text{et} \qquad \mu z - R^2 = 0;$$

entre ces équations, l'élimination de λ et μ est immédiate et l'on trouve pour équations du lieu

$$y = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 - z^2 - R^2 = 0,$$

ce qui représente, dans le plan des xz, une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les bissectrices de Ox et Oz.

2° Revenons à la quadrique initiale et désignons par α, β et γ les coordonnées de son centre ; nous

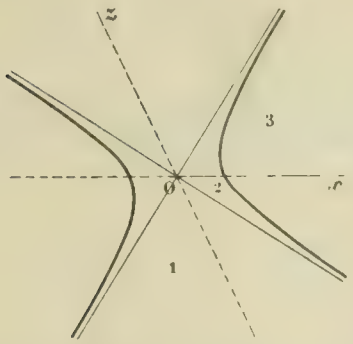
aurons de suite $\alpha + a\gamma = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma + a\alpha + b = 0$; d'où $a = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $b = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\gamma}$. Décomposons le premier membre de l'équation de cette quadrique en carrés et remplaçons $-y$, a et b par leurs valeurs en fonction de α, β, γ, nous aurons sans peine

$$(\gamma x - \alpha z)^2 + \gamma^2 y^2 + (\gamma^2 - \alpha^2)(z - \gamma)^2 + \gamma^2(\alpha^2 - \gamma^2 - R^2) = 0.$$

Or, en égalant à 0 les deux seuls coefficients de cette équation qui puissent changer de signe, nous obtenons

$$\alpha^2 - \gamma^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha^2 - \gamma^2 - R^2 = 0,$$

qui, dans le plan des xz, représentent les asymptotes de l'hyperbole trouvée antérieurement et cette courbe elle-même.



Figurons ces lignes : elles divisent le plan en 6 régions, les régions 1, 2 et 3 et les régions symétriques, où les mêmes faits se reproduisent.

Dans la région 1, les deux coefficients, tels qu'ils ont été écrits plus haut, sont négatifs ; alors la quadrique est un ellipsoïde. Dans la région 2, le premier coefficient a le signe contraire au précédent, et la quadrique est un hyperboloïde à une nappe ; enfin, dans la région 3, cette quadrique est un hyperboloïde à deux nappes. Sur les asymptotes, c'est un cylindre elliptique ; sur l'hyperbole elle-même, un cône, comme on devait s'y attendre.

3° La sphère considérée est l'une des quadriques passant par les deux cercles envisagés ; elle a donc une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + 2axz + 2bz + 2\mu z(x - \lambda) = 0,$$

dans laquelle il suffit d'exprimer que le coefficient de $2xz$ est égal à $\cos\theta$; ceci donne $a + \mu = \cos\theta$ ou $\mu = \cos\theta - a$; par conséquent l'équation de la sphère est définitivement

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + 2xz\cos\theta + 2(b + a\lambda - \lambda\cos\theta)z = 0.$$

Les coordonnées du centre sont fournies par les équations

$$x + z\cos\theta = 0, \qquad y = 0 \qquad \text{et} \qquad x\cos\theta + z - b + a\lambda - \lambda\cos\theta = 0;$$

de là nous déduisons immédiatement

$$\frac{x}{-\cos\theta} = \frac{z}{1} = \frac{\lambda\cos\theta - a\lambda - b}{\sin^2\theta};$$

par conséquent l'x du plan symétrique de celui du cercle par rapport au centre de la sphère est fourni par l'équation

$$x - \lambda = \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}(b + a\lambda - \lambda\cos\theta).$$

Cette équation, jointe à celle de la sphère, définit le cercle dont on demande le lieu ; il n'y a plus qu'à éliminer λ entre les deux équations ; ce calcul facile donne immédiatement l'équation du lieu

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - 2Axz + 2Bz = 0$$

avec $$A = \frac{a(1 + \cos^2\theta) - 2\cos\theta}{2a\cos\theta - 1 - \cos^2\theta}, \qquad B = \frac{-b\sin^2\theta}{2a\cos\theta - 1 - \cos^2\theta}.$$

Nous voyons que c'est l'une des surfaces déjà étudiées et rien n'est plus aisé que d'en trouver la nature.

928. — *Lieu des centres et lieu des sommets des triangles équilatéraux conjugués à une ellipse.*

Pour exprimer qu'un triangle conjugué à une ellipse est en même temps équilatéral, nous exprimerons que le cercle circonscrit à ce triangle a même centre que le cercle conjugué : or nous savons que le centre de ce dernier cercle coïncide avec le point de concours des hauteurs et que le carré de son rayon, ρ^2, est égal au produit commun des segments compris sur chaque hauteur entre le point de concours de ces droites, puis respectivement le sommet et le côté opposé. Il résulte de là que, en désignant par R le rayon du cercle circonscrit, nous avons ici $\rho^2 = -\frac{R^2}{2}$, ou $R^2 = -2\rho^2$; le cercle conjugué étant représenté par $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \rho^2 = 0$, le cercle circonscrit sera représenté par

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2\rho^2 = 0.$$

Cela posé, considérons le faisceau linéaire des coniques

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \rho^2 = 0;$$

nous trouverons les coordonnées des sommets du triangle en cherchant les points doubles des coniques impropres de ce système, c'est-à-dire en annulant les dérivées du premier membre ; ceci nous donne

$$\frac{\lambda x}{a^2} + x - \alpha = 0,$$

$$\frac{\lambda y}{b^2} + y - \beta = 0,$$

$$-\lambda + (x-\alpha)(x-\alpha) + (y-\beta)(y-\beta) - \rho^2 = 0.$$

Des deux premières, nous déduirons $x = \frac{a^2\alpha}{a^2+\lambda}$, $y = \frac{b^2\beta}{b^2+\lambda}$; puis, $x-\alpha = \frac{-\lambda\alpha}{a^2+\lambda}$, $y-\beta = -\frac{\lambda\beta}{b^2+\lambda}$, et la deuxième devient alors

$$(1) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \frac{\beta^2}{b^2+\lambda} - \frac{\rho^2}{\lambda} - 1 = 0;$$

elle fournit les trois valeurs de λ qui correspondent aux coniques impropres du faisceau linéaire, et chacune de ces valeurs donne un sommet du triangle conjugué dont les coordonnées ont été calculées avant la formation de cette équation du troisième degré. Pour écrire que le triangle est équilatéral, nous avons à exprimer que ces trois sommets sont sur le cercle $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2\rho^2 = 0$; ce calcul nous fournit une équation du quatrième degré en λ,

$$(2) \qquad \frac{\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{\beta^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{2\rho^2}{\lambda^2} = 0,$$

qui doit avoir trois racines communes avec la précédente.

Pour exprimer ce dernier fait, nous rendrons les deux équations entières par rapport à λ, et nous écrirons ensuite que le premier membre de (2) ne diffère de celui de (1) que par un facteur linéaire ; si nous désignons par H le coefficient de λ^4 dans la seconde équation et par h la racine non commune, nous aurons l'identité

$$\frac{H\lambda(\lambda-h)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\lambda}\left(\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \frac{\beta^2}{b^2+\lambda} - \frac{\rho^2}{\lambda} - 1\right) = \frac{\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{\beta^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{2\rho^2}{\lambda^2},$$

dans laquelle $H = \alpha^2 + \beta^2 + 2\rho^2$, et où l'on a conservé les dénominateurs pour simplifier l'écriture. Cette identité entraîne quatre relations que nous obtiendrons en multipliant successivement les deux membres par $(a^2+\lambda)^2$, $(b^2+\lambda)^2$, λ^2, et faisant ensuite $\lambda = -a^2$, $\lambda = -b^2$, $\lambda = 0$, puis en égalant les coefficients de λ^3 dans les deux membres rendus entiers ; voici ces relations :

$$\frac{H(h-a^2)}{a^2} = \alpha^2, \qquad \frac{-H(h-b^2)}{b^2} = \beta^2, \qquad \frac{Hh}{a^2b^2} = 2.$$

et $$-\mathrm{H}k - \mathrm{H}(\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 - a^2 - b^2) = 2\,b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 + 2(a^2 + b^2)\rho^2\,.$$

En ajoutant les deux premières relations, on retrouve la troisième ; il n'y a donc en tout que trois relations distinctes entre lesquelles il faudra éliminer ρ^2 et k ; or on trouve immédiatement

$$\mathrm{H}k = -2a^2b^2, \qquad \mathrm{H} = a^2 + b^2,$$

la dernière relation donne ensuite

$$2a^2b^2 - (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 - a^2 - b^2) = 2\,b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) + 4\rho^2(a^2 + b^2),$$

et, comme, de $\mathrm{H} = a^2 + b^2$, on déduit de suite $\rho^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2}$, on a sans peine l'équation du lieu du centre

(3) $$4(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2) - (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2) = 0.$$

Cette équation représente une conique qui fait partie du faisceau linéaire déterminé par l'ellipse et son cercle orthoptique.

Nous aurons le lieu des sommets du triangle en nous servant du lieu du point (α, β) et revenant aux équations qui existent entre α, β, x, y, λ et ρ^2

$$\frac{\lambda x}{a^2} + x - \alpha = 0, \qquad \frac{\lambda y}{b^2} + y - \beta = 0,$$

$$-\lambda - \alpha(x - \alpha) - \beta(y - \beta) - \rho^2 = 0, \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - 2\rho^2 = 0.$$

Elles donnent d'abord

$$\alpha = \frac{\lambda + a^2}{a^2}x, \qquad \beta = \frac{\lambda + b^2}{b^2}y, \qquad x - \alpha = -\frac{\lambda x}{a^2}, \qquad y - \beta = -\frac{\lambda y}{b^2}\,;$$

puis, en portant ces valeurs dans les deux dernières équations,

$$\lambda(a^2 + \lambda)\frac{x^2}{a^4} + \lambda(b^2 + \lambda)\frac{y^2}{b^4} - \lambda - \rho^2 = 0, \qquad \lambda^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) - 2\rho^2 = 0\,;$$

en combinant ces deux dernières équations et posant $\mathrm{E} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$, $\mathrm{F} = \dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4}$, nous obtenons

$$\lambda\mathrm{E} - 3\rho^2 = 0, \qquad \lambda^2\mathrm{F} + 2\rho^2 = 0, \qquad \frac{\lambda\mathrm{F}}{\mathrm{E}} = -\frac{2}{3}\,;$$

par suite, $$\lambda = -\frac{2\mathrm{E}}{3\mathrm{F}},$$

et $$\alpha = x - \frac{2\mathrm{E}}{3\mathrm{F}}\,\frac{x}{a^2}, \qquad \beta = y - \frac{2\mathrm{E}}{3\mathrm{F}}\,\frac{y}{b^2}.$$

Portons cette valeur de λ dans l'une ou l'autre des équations qui précèdent, remplaçons ρ^2 par $\dfrac{a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2}$ et, dans cette expression, α et β par les valeurs que nous venons de trouver, nous aurons de suite pour équation du lieu

$$4(\mathrm{E}^2 + \mathrm{E}) - 3\mathrm{CF} = 0,$$

où nous représentons par C le premier membre de l'équation du cercle orthoptique, $x^2 + y^2 - a^2 - b^2$. Cette équation développée s'écrit

(4) $$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 - 3c^4x^2y^2 + b^2(3b^2 - a^2)x^2 + a^2(3a^2 - b^2)y^2 = 0\,;$$

elle représente une quartique ayant pour axes de symétrie les axes de l'ellipse et ayant un point double à l'origine.

Le discriminant du trinome des termes du quatrième degré est $3c^4 - 3a^2 - b^2(a^2 - 2b^2)$, il en résulte que si a est $< b\sqrt{3}$, tous les termes du premier membre de l'équation de la courbe sont positifs, la quartique est

imaginaire. Si $a = b\sqrt{3}$, elle se décompose en deux coniques à coefficients imaginaires. Il reste donc le cas où a est $> b\sqrt{3}$. Nous construirons la quartique au moyen des coordonnées polaires.

On peut écrire l'équation transformée ainsi

$$z = k\sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2\omega \cdot \operatorname{tg}^2\omega_0 - \operatorname{tg}^2\omega}{(\operatorname{tg}^2\omega - \operatorname{tg}^2\omega_1)(\operatorname{tg}^2\omega - \operatorname{tg}^2\omega_2)}};$$

en posant $3x^2 - b^2 = k^2$, $\dfrac{b^2(a^2 - 3b^2)}{a^2(3a^2 - b^2)} = \operatorname{tg}^2\omega_0$, et $\operatorname{tg}^2\omega_1$, $\operatorname{tg}^2\omega_2$ étant les racines de l'équation $a^2\operatorname{tg}^4\omega + (2a^2b^2 - 3c^4)\operatorname{tg}^2\omega + b^4 = 0$.

On ne prendra devant le radical que le signe $+$, et on fera varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ce qui revient à construire le quart de la courbe. On trouve

$$\frac{dz}{d\omega} = h\,\frac{\operatorname{tg}\omega\,(1 + \operatorname{tg}^2\omega_0 \cdot \operatorname{tg}^2\omega_3 - \operatorname{tg}^2\omega\,(\operatorname{tg}^2\omega_4 + \operatorname{tg}^2\omega)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\omega_0 \cdot \operatorname{tg}^2\omega_0 - \operatorname{tg}^2\omega}\,(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}^2\omega_1)(\operatorname{tg}^2\omega - \operatorname{tg}^2\omega_2)},$$

en posant

$$h = \frac{4c^2(3a^2 - 4b^2)}{a^2k^2},$$

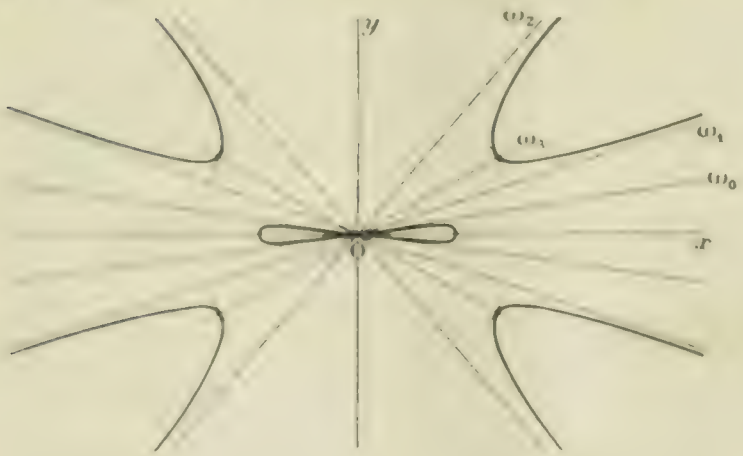
$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2\omega_3 = \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{2c^2\sqrt{3} + ab}{3a^2 - 4b^2} \\[2ex] \operatorname{tg}^2\omega_4 = \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{2c^2\sqrt{3} - ab}{3a^2 - 4b^2}. \end{cases}$$

De plus, on vérifie facilement qu'en supposant toujours $a^2 - 3b^2 > 0$, les quantités ci-dessous sont rangées par ordre de grandeurs croissantes

$$\operatorname{tg}^2\omega_0, \qquad \operatorname{tg}^2\omega_1, \qquad \operatorname{tg}^2\omega_3, \qquad \operatorname{tg}^2\omega_2.$$

La discussion est alors très facile, et on obtient les résultats suivants :

ω	0		ω_0		ω_1		ω_3		ω_2		$+\frac{\pi}{2}$
z	k	décroît	0		∞	décroît	(*min.*)	croît	∞		
$\frac{dz}{d\omega}$	0	$-$	∞		∞	$-$	0	$+$	∞		



Il suffit, pour avoir la courbe entière, de la compléter par symétrie. Les tangentes au point double O sont les droites

$$\omega = \pm\,\omega_0;$$

et les asymptotes, les droites

$$\omega = \pm\,\omega_1,$$

$$\omega = \pm\,\omega_2.$$

Nous avons reçu de M. Vasnier une excellente solution qui a été toutefois considérablement modifiée ; mais tout ce qui est relatif à la construction de la courbe a été intégralement conservé.

QUESTIONS PROPOSÉES

991. — Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un tétraèdre (T) circonscrit à une quadrique (Q) soit tel que les perpendiculaires abaissées des sommets de ce tétraèdre sur leurs plans polaires par rapport à (Q) soient concourantes en un point H est que les normales à (Q) aux points de contact des faces de (T) soient concourantes en un point H'. Il existe un seul tétraèdre (T) relatif à un point H ; ce tétraèdre est inscrit dans une quadrique (Q_1) ayant les mêmes plans principaux que (Q). Quelle relation existe-t-il entre les longueurs des axes ou les paramètres des sections principales des quadriques (Q) et (Q_1) ?

Dans tout ce qui va suivre, on supposera que la quadrique (Q) est un paraboloïde donné.

1° Il existe cinq tétraèdres (T) relatifs à un point H' donné. Les cinq droites joignant les points H de ces tétraèdres respectivement aux pieds des cinquièmes normales menées de H' à (Q) sont sur une surface du second ordre. Quel lieu doit décrire le point H' pour que cette surface soit un paraboloïde, un cône ? Dans ce dernier cas, les cinq droites sont concourantes, trouver leur point de concours.

2° Lorsque le point H est dans un certain plan (P), les paraboloïdes (Q) et (Q_1) sont égaux.

Montrer que dans ce cas les normales à (Q_1) aux sommets de (T) sont concourantes. Le tétraèdre (T_1) formé par les plans tangents à (Q_1) aux sommets de (T), jouit par rapport à (Q_1) de la même propriété que (T) par rapport à (Q). Trouver le lieu du point H_1 analogue à H. Montrer qu'on a alors une série de tétraèdres (T), (T_1)..... (T_n) se déduisant les uns des autres de la même façon, et jouissant de la même propriété.

3° Les quatre droites qui joignent les sommets du tétraèdre (T) aux points de contact des faces opposées sont comme on sait sur une surface du second degré. Dans quel cas cette surface est-elle un cône ? Montrer que le point de concours I des quatre droites est sur la cubique aux pieds des normales menées de H au paraboloïde (Q), et trouver le lieu du point H ainsi que celui du point I.

VASNIER.

992. — On donne dans un plan deux coniques (S) et (S') et un point R. Soient P,Q et P',Q' les points de contact des tangentes menées de R respectivement aux coniques (S) et (S').

1° Montrer que les droites PP', PQ', P'Q et QQ' et les quatre tangentes communes aux coniques (S) et (S') sont tangentes à une même conique Σ. P_1, Q_1, et P'_1, Q'_1 étant les points de contact des tangentes menées d'un point R_1 à (S) et à (S'), montrer qu'il existe une infinité de points R_1 tels que les droites $P_1P'_1$, $P_1Q'_1$, $Q_1P'_1$, $Q_1Q'_1$ soient tangentes à Σ et trouver le lieu des points R_1.

2° La conique (S) et le point R étant supposés fixes, trouver l'enveloppe de la polaire de R par rapport à Σ, lorsque (S') varie en restant inscrite à un quadrilatère circonscrit à (S), ou circonscrite à un quadrilatère inscrit à (S).

VASNIER.

993. — On considère un triangle OAB rectangle en O et le cercle circonscrit à ce triangle. Soit C un point variable sur ce cercle. On demande l'équation de la conique passant aux quatre points O, A, B, C et ayant pour centre le milieu de OA.

1° Trouver le lieu du pôle de OB par rapport à cette conique.

2° Trouver le lieu du point de rencontre de la droite AC avec la droite qui joint les points de rencontre de OA avec BC et de OC avec BA.

3° Trouver le lieu des sommets de cette conique et construire ce lieu. E. H.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

921. — *On donne une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet et un point* H *sur cette tangente. On mène par le sommet* O *une sécante variable* OM *qui :*

1° *Equation du cercle qui passe par les trois points* O, H, M ;

2° *Equation de la seconde corde commune au cercle et à la parabole. Construire cette corde* PQ *pour*

une valeur donnée de m et trouver son enveloppe ; discuter la nature des points de rencontre P *et* Q *situés sur cette corde, suivant la valeur de m. Lieu du point de rencontre des cordes* OM *et* PQ ;

3° *Vérifier ce dernier résultat en cherchant directement le lieu des centres des sécantes communes à la parabole et à un cercle variable passant par* O *et* H.

4° *Former l'équation de la seconde parabole qui passe par les quatre points* O, M, P, Q *et trouver le lieu du sommet et le lieu du foyer de cette parabole, quand m varie.*

1. Les quatre points O, M, P, Q étant les points de rencontre de la parabole donnée et d'un cercle, les droites OM et PQ sont également inclinées sur l'axe de la parabole, et comme celui-ci est pris pour axe des x, le coefficient angulaire de PQ est $-m$. Soit $y + mx + n = 0$ l'équation de PQ ; l'équation générale des coniques passant par les quatre points O, M, P, Q est

$$\lambda(y^2 - 2px) + (y - mx)(y + mx + n) = 0.$$

Pour que cette conique soit un cercle, il faut qu'on ait $\lambda = -(1 + m^2)$, et pour que le cercle passe par le point H $(0, h)$, on doit avoir $n = hm^2$.

L'équation du cercle est alors

$$-(m^2 + 1)(y^2 - 2px) + (y - mx)(y + mx + hm^2) = 0,$$

ou

$$m^2(x^2 + y^2) - x(2p(1 + m^2) - hm) + hm^2y = 0.$$

2. L'équation de la corde PQ est $y + mx + hm^2 = 0$.

Soit OM′ la droite symétrique de OM par rapport à Ox, la corde PQ est parallèle à OM′. De plus, PQ rencontre Ox au point A d'abscisse $-hm$. Or ce point est situé sur la perpendiculaire à OM′ menée par le point H. On déduit de là la construction de la corde PQ.

Pour avoir l'enveloppe de cette corde, il suffit d'écrire que l'équation du deuxième degré en m, $y + mx + hm^2 = 0$, a une racine double, ce qui donne

$$x^2 - 4hy = 0,$$

cette équation représente une parabole.

Les ordonnées des points de rencontre P et Q de la droite PQ et de la parabole sont racines de l'équation

$$my^2 + 2py + 2phm^2 = 0.$$

Pour que ces racines soient réelles, il faut qu'on ait

$$m^2 \leqq \frac{p}{2h}.$$

C'est la condition pour que les points P et Q soient réels et distincts. Si l'on a $m^2 < \frac{p}{2h}$, les points P et Q sont imaginaires, enfin si $m^2 = \frac{p}{2h}$, la droite PQ est tangente à la parabole.

Le lieu du point de rencontre de OM et de PQ s'obtient en éliminant m entre les équations

$$y - mx = 0, \qquad y + mx + hm^2 = 0.$$

On trouve

$$y(2x^2 + hy) = 0.$$

Le facteur y ne convient évidemment pas ; il a été introduit parce que pour $m = 0$ les droites OM et PQ sont confondues avec Ox. Dans ce cas le cercle se réduit à l'axe Oy.

Le véritable lieu est la parabole $2x^2 + hy = 0$.

3. L'équation d'un cercle variable passant par les points O et H est

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - hy = 0;$$

toute conique passant par l'intersection de la parabole et de ce cercle a une équation de la forme

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 2\alpha x - hy + \lambda(y^2 - 2px) = 0.$$

Les points doubles de ce faisceau sont déterminés par les équations

$$\frac{1}{2}F'_x = x - \alpha - p\lambda = 0, \qquad \frac{1}{2}F'_y = y - \frac{h}{2} + \lambda y = 0, \qquad \frac{1}{2}F'_\lambda = -\alpha x - \frac{h}{2}y - \lambda px = 0.$$

Nous aurons le lieu cherché en éliminant α et λ entre ces trois équations. Il suffit d'éliminer $\alpha + p\lambda$ entre la première et la troisième, et on obtient immédiatement la parabole $2x^2 + hy = 0$.

4. La seconde parabole qui passe par les quatre points O, M, P, Q a ses axes perpendiculaires à Ox; son équation est $$y^2 - 2px - (y - mx)(y + mx + hm^2) = 0,$$
ou (P) $$m^2x^2 - (2p - hm^3)x - hm^2y = 0.$$
Son axe a pour équation $$2m^2x - (2p - hm^3) = 0.$$

Eliminons entre ces deux équations le rapport $\dfrac{2p - hm^3}{m^2}$, nous avons pour équation du lieu des sommets $$x^2 + hy = 0,$$
qui représente une parabole.

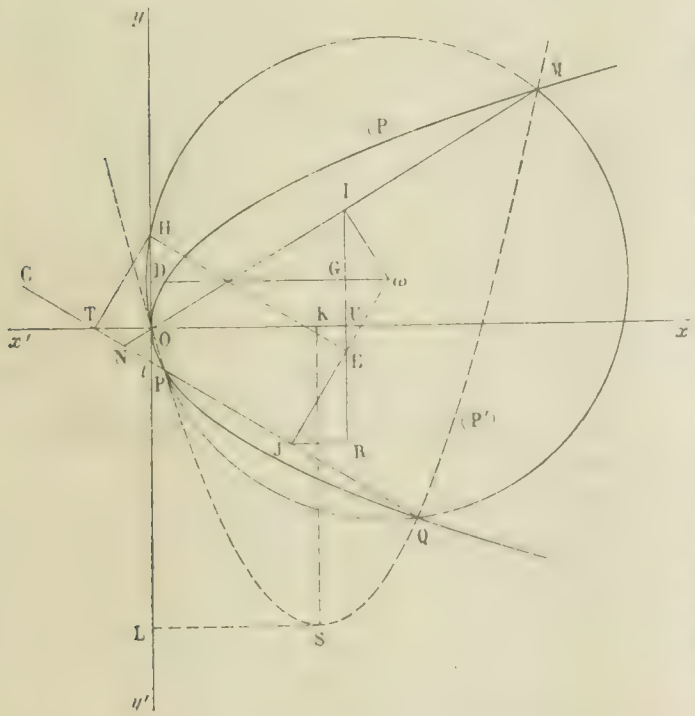
Enfin, le foyer de la parabole (P) est déterminé par les deux équations
$$4hm^4y + (2p - hm^3)^2 - h^2m^4 = 0, \qquad 2m^2x - (2p - hm^3) = 0.$$

Eliminons $\dfrac{2p - hm^3}{m^2}$ entre ces deux équations, nous avons le lieu du foyer
$$4x^2 + 4hy - h^2 = 0,$$
cette équation représente encore une parabole.

J.-D. DUFAUT, à Aiguillon.

Bonnes solutions : MM. E.-N. Barisien, G. Fontaine, lycée Condorcet; Mollon, pensionnat Valbenoite, à Saint-Etienne; Pelvoisin, Jules Rongier, lycée de Clermont; P. Valot.

Remarques géométriques. — Le centre ω du cercle OHM est au point de rencontre des perpendiculaires élevées au milieu des cordes OH, OM, PQ. Si l'on mène la symétrique HE de la droite OM par rapport à $D\omega$, HE est parallèle à PQ, et comme les points I, J, situés sur les diamètres de cordes également inclinées sur l'axe Ox, sont également distants de cet axe, on a
$$RE = RI - EI = 2UI - 2GI = 2UG = OH.$$



Il en résulte immédiatement que la projection T du point H sur PQ est sur l'axe Ox. L'enveloppe de la droite PQ est donc la parabole qui a son sommet en O et son foyer en H. Etant donné m, c'est-à-dire la corde OM, on en déduit la corde PQ au moyen du point T qu'on a immédiatement.

La parabole donnée (P) et la parabole enveloppe de PQ ont trois tangentes communes, dont une seule réelle, de coefficient angulaire $-m'$. Il est clair que les points d'intersection P, Q des tangentes à la deuxième parabole avec la première sont imaginaires lorsque m est compris entre $+m'$ et $+\infty$. Dans tous les autres cas, ils sont réels.

N étant le point de rencontre de OM, PQ, et C le point de contact de PQ avec son enveloppe, on a $TC = CT$. On en déduit entre les coordonnées (x, y), (x', y') des points C, N les relations $x = 4x'$, $y = -2y'$; ce qui montre que le lieu du point N est une parabole de sommet O, dont l'axe est dirigé suivant Oy'.

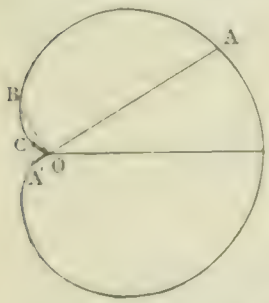
Considérons maintenant la seconde parabole (P') passant aux points O, M, P, Q. Les paraboles (P) et (P') ayant leurs axes rectangulaires, la distance $\dfrac{OH}{2}$ du centre ω du cercle à l'axe Ox de (P) est, comme on sait, égale au paramètre de la parabole (P

Cette parabole, de grandeur constante, passe par le point fixe O. Le lieu de son sommet S est évidemment une parabole de sommet O, égale à la parabole variable P', et dont l'axe est dirigé suivant Oy'. Pour une même abscisse, en effet, OL = SK, les ordonnées sont égales LS = KO. Le lieu du foyer F de P' est la parabole précédente, à laquelle on a fait subir une translation, parallèlement à Oy, d'amplitude $SF = \frac{OH}{4}$.

VASNIER.

---

929. — *Étant donnée une cardioïde dont le point de rebroussement est* O, *soient* OA *un rayon vecteur quelconque,* OB *un vecteur perpendiculaire à* OA, OC, *un vecteur ayant la même inclinaison que* OA *sur l'axe de la cardioïde et dont la longueur est différente de celle de* OA *et* OA' *le vecteur qui prolonge* OA :



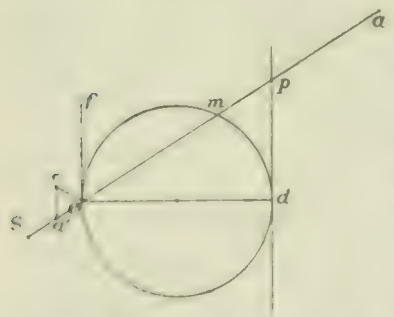
1° *Le lieu du centre de similitude externe des cercles de diamètre* OA *et* OA' *est une cissoïde droite ;*

2° *Le lieu des centres de similitude des cercles de diamètres* OA *et* OC *se compose de deux lignes droites ;*

3° *Construire les courbes lieu des centres de similitude des cercles de diamètres* OA *et* OB ;

4° *Le lieu du centre de similitude externe du cercle de diamètre* AA' *avec le cercle de centre* A *et de rayon* AO *est une cissoïde droite.*

1. Les centres a et a' des cercles de diamètre OA et OA' sont situés sur une cardioïde (γ'), homothétique de la cardioïde donnée, le centre d'homothétie étant le point O. Cette cardioïde (γ) est la conchoïde d'un cercle de diamètre Od, et les points a et a' sont situés sur un rayon vecteur Om de ce cercle, de telle manière que $ma = ma' = Od$.

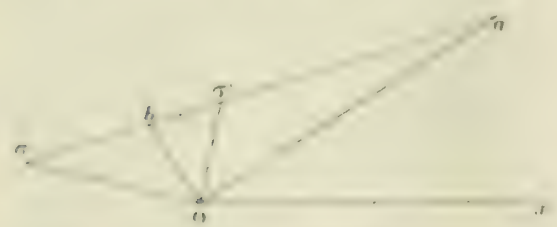


Comme le point O est le centre de similitude interne des deux cercles de diamètre OA et OA', le centre de similitude externe S est le conjugué harmonique de O par rapport à a et a'. Nous avons donc, puisque m est le milieu de aa', $mO.mS = \overline{ma}^2 = \overline{Od}^2$.

Or p désignant le point de rencontre de Om et de la tangente en d au cercle Od, on a $mO.Op = \overline{Od}^2$, donc $mS = Op$, par suite $mp = OS$, ce qui montre que le lieu du point S est une cissoïde droite dont le point de rebroussement est le point O et dont l'asymptote est la symétrique de la droite dp par rapport au point O.

2. Le centre c du cercle de diamètre OC est symétrique de a par rapport à Od. Comme les centres de similitude des cercles de diamètre OA et OC divisent la droite ca dans le rapport $\frac{Oc}{Oa}$, ces centres sont situés sur les bissectrices de l'angle cOa. Or, ces bissectrices sont la droite Od et la perpendiculaire Of; ces deux droites constituent le lieu cherché.

3. Les centres a et b des cercles de diamètre OA et OB sont situés sur la cardioïde (γ). Les centres de similitude σ et σ' de ces deux cercles sont les points de rencontre de ab et des bissectrices de l'angle aOb.



Prenons pour axe polaire la droite Od, et soit

$$\rho = a(1 - \cos\omega)$$

l'équation de la cardioïde (γ).

Cherchons d'abord le lieu du point σ, centre de similitude externe. Si on désigne par ρ et ω les coordonnées polaires de ce point, les angles polaires des points a et b sont respectivement

$\omega - \frac{3\pi}{4}$ et $\omega - \frac{\pi}{4}$, et les rayons vecteurs Oa et Ob sont

$$Oa = a\left[1 + \cos\left(\omega - \frac{3\pi}{4}\right)\right] = a\left(1 - \frac{\cos\omega}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\omega}{\sqrt{2}}\right),$$

$$Ob = a\left[1 + \cos\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)\right] = a\left(1 + \frac{\cos\omega}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\omega}{\sqrt{2}}\right).$$

Pour avoir une relation entre ρ et ω, nous écrirons que l'aire du triangle σOa est égale à la somme des aires des triangles σOb et bOa, ce qui donne

$$O\sigma . Oa \sin\frac{3\pi}{4} = O\sigma . Ob \sin\frac{\pi}{4} + Oa . Ob, \qquad \text{d'où} \qquad O\sigma = \frac{Oa . Ob\sqrt{2}}{Oa - Ob}.$$

Or on a

$$Oa . Ob = a^2\left(1 - \frac{\cos\omega}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\omega}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{\cos\omega}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\omega}{\sqrt{2}}\right) = a^2\left[\left(1 + \frac{\sin\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{\cos^2\omega}{2}\right] = \frac{a^2}{2}(1 + \sqrt{2}\sin\omega)^2$$

$$Oa - Ob = -a\sqrt{2}\cos\omega, \qquad O\sigma = \rho,$$

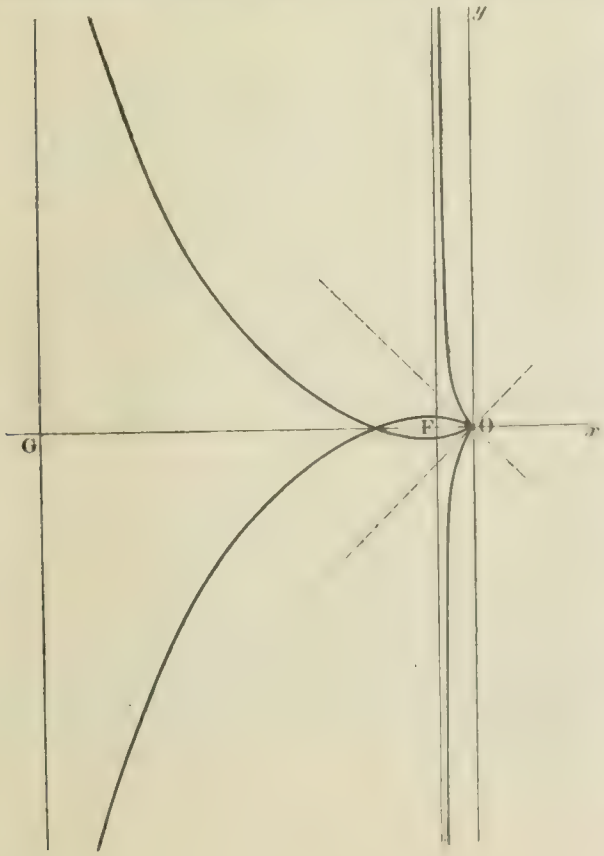
par suite, l'équation du lieu est $\rho = -\frac{a(1 + \sqrt{2}\sin\omega)^2}{2\cos\omega}$.

En changeant ω en $\pi - \omega$, ρ change de signe, donc la courbe est symétrique par rapport à Ox ; nous en obtiendrons la moitié en faisant varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

La dérivée de ρ par rapport à ω est

$$\rho' = \frac{a}{2} \cdot \frac{(1 + \sqrt{2}\sin\omega)(\sqrt{2}\sin^2\omega - \sin\omega - 2\sqrt{2})}{\cos^2\omega}.$$

Le trinome $\sqrt{2}\sin^2\omega - \sin\omega - 2\sqrt{2}$ a ses racines réelles de signes contraires et supérieures à 1 en valeur absolue, donc ce trinome est négatif pour toutes les valeurs de ω, et la dérivée a le signe de $-(1 + \sqrt{2}\sin\omega)$, elle est donc positive quand ω varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{4}$, et négative si ω varie de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{2}$. On peut donc dresser le tableau de variation suivant



ω	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{2}$
ρ'							
ρ	$-\infty$	croit	0	décroit	$-\frac{a}{2}$	décroit	$-\infty$

La courbe admet deux asymptotes parallèles à Oy : l'une correspondant à $\omega = -\frac{\pi}{2}$ a pour abscisse $-\frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)^2$, l'autre correspondant à $\omega = +\frac{\pi}{2}$ a pour abscisse $-\frac{a}{2}(\sqrt{2} + 1)^2$.

Cherchons maintenant le lieu du point σ' ; désignons encore par ρ et ω les coordonnées de ce point. Alors les angles polaires des points

et b sont $\omega - \frac{\pi}{4}$ et $\omega + \frac{\pi}{4}$ leurs rayons vecteurs

$$Oa = a\left[1 - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)\right] = a\left(1 + \frac{\cos\omega}{\sqrt{2}} - \frac{\sin\omega}{\sqrt{2}}\right),$$

$$Ob = a\left[1 - \cos\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)\right] = a\left(1 + \frac{\cos\omega}{\sqrt{2}} - \frac{\sin\omega}{\sqrt{2}}\right).$$

D'autre part, $Oa.Ob = Oa.Oz'\sin\frac{\pi}{4} + Ob.Oz'\sin\frac{\pi}{4}$, d'où $Oz' = \frac{Oa.Ob\sqrt{2}}{Oa + Ob}$,

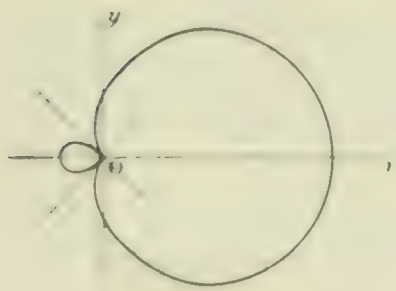
et, en remplaçant Oa, Ob par leurs valeurs, Oz' par ρ, on trouve

$$\rho = \frac{a(1 + \sqrt{2}\cos\omega)^2}{2(\sqrt{2} + \cos\omega)}.$$

En changeant ω en $-\omega$, ρ ne change pas, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire ; il suffit de faire varier ω de 0 à π.

Nous avons $$\rho = -\frac{a(1 + \sqrt{2}\cos\omega)(3 - \sqrt{2}\cos\omega)}{2(\sqrt{2} + \cos\omega)}.$$

Le facteur $(3 - \sqrt{2}\cos\omega)$ est toujours positif, ρ est de signe contraire à $(1 + \sqrt{2}\cos\omega)$.



On aura donc le tableau suivant

ω	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
ρ		$-$		$+$	
ρ	$\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$	décroît	0	croît	$\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$

On en déduit aisément la forme de la courbe. Les tangentes aux points où la courbe rencontre l'axe polaire sont perpendiculaires à cet axe.

4. Revenons à la cardioïde donnée ; soit OD le diamètre du cercle dont elle est la conchoïde et OM le rayon vecteur de ce cercle sur lesquels sont situés les points A et A'. Nous avons $MA = MA' = OD$, par suite le point M est le centre du cercle qui a pour diamètre AA'. Le centre de similitude externe N des cercles considérés dans l'énoncé est situé sur AA' en dehors de AM, et l'on a

$$\frac{NM}{NA} = \frac{MA}{OA}, \quad \text{ou} \quad \frac{NM}{NA - NM} = \frac{MA}{OA - MA},$$

ou encore $$\frac{NM}{MA} = \frac{MA}{OM}.$$

On en déduit $OM.NM = OD^2$, et en raisonnant comme dans la première partie, on voit que le lieu du point N est une cissoïde qui a pour point double le point O et pour asymptote la droite symétrique par rapport au point O de la tangente en D au cercle de diamètre OD.

PELVOISIN.

930. — *On considère deux axes rectangulaires Ox et Oy et, sur Ox, deux points A et B dont les abscisses sont a et $-a$; puis, en outre, le faisceau des cercles orthogonaux au cercle ayant le point A pour centre et passant en O et tangent en un point P de Oy à la droite qui joint ce point P au point B; et on demande :*

1° *L'équation générale de ces cercles en fonction de l'ordonnée du point P; le lieu des centres de l'enveloppe de ces cercles;*

2° ***Le lieu du milieu de la corde de contact de chaque cercle avec son enveloppe;***

3° *Les coordonnées du second point de rencontre de la polaire de B par rapport à l'un de ces cercles et le lieu de ce point. Construire ce dernier lieu.*

1° Appelons λ l'ordonnée du point P; l'équation de la droite BP s'écrira alors $\lambda x - ay + a\lambda = 0$. Le cercle cherché fait partie du faisceau linéaire de cercles déterminé par le cercle de rayon nul, ayant son centre au point P et par la droite BP; il a donc pour équation

$$x^2 + y^2 - \lambda^2 + 2\mu\lambda x - ay + a\lambda = 0,$$

μ étant déterminé en fonction de λ par la condition que ce cercle soit orthogonal au cercle indiqué, AO, dont l'équation est

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Cette condition d'orthogonalité est

$$-2a\mu\lambda - \lambda^2 - 2a\lambda\mu = 0,$$

elle donne $\mu = -\frac{\lambda}{4a}$, et l'équation générale des cercles du système cherché est, toutes réductions faites,

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - \frac{\lambda^2}{2a}x - \frac{3\lambda}{2}y - \frac{\lambda^2}{2} = 0.$$

Les coordonnées du centre sont $x = -\frac{\lambda^2}{4a}$, $y = -\frac{3\lambda}{4}$. L'élimination de λ entre ces deux relations est immédiate et nous avons de suite le lieu du centre

$$(2) \qquad 4y^2 - 9ax = 0.$$

Ce lieu est une parabole rapportée à son axe Ox et à sa tangente au sommet Oy; le paramètre de cette parabole est égal à $\frac{9a}{8}$.

L'enveloppe du cercle (1) s'obtient aisément aussi : il n'y a qu'à exprimer que cette équation (1), regardée comme étant du second degré en λ, a une racine double. Ce calcul donne immédiatement l'équation de l'enveloppe

$$(3) \qquad 8(x^2 + y^2) - 9ax = 0.$$

Cette courbe est facile à construire : c'est une cubique circulaire ayant pour point double l'origine; les tangentes en ce point sont les droites $y = \pm 2x\sqrt{2}$; de plus, l'asymptote réelle est parallèle à Oy et a pour équation $x = -\frac{a}{8}$; ajoutons qu'il y a symétrie par rapport à Ox et que le sommet de la courbe, sur cet axe, a pour abscisse a; nous en aurons dit assez.

2° Chaque cercle λ touche son enveloppe en deux points qui s'obtiennent en combinant l'équation du cercle avec la dérivée de cette équation par rapport à λ. La corde des contacts de ce cercle a donc pour équation

$$C \quad 2\lambda x - a - 3ay = 0.$$

le milieu de cette corde s'obtient en abaissant du centre du cercle λ une perpendiculaire sur cette droite

$$3a\left(x - \frac{\lambda^2}{4a}\right) - 2\lambda\left(y - \frac{3\lambda}{4}\right) = 0,$$

ou

$$3ax - 2\lambda y + \frac{3\lambda^2}{4} = 0.$$

L'équation du lieu de ce milieu est le résultat de l'élimination de λ entre cette équation et la précédente ; on trouve ainsi

$$(4) \qquad 16(x - a)^2(x - a) + y^2 + 9ay^2 = 0.$$

Cette équation représente encore une cubique circulaire ayant l'axe des x pour axe de symétrie, dont le sommet est l'origine des coordonnées et qui a un point double isolé au point $(a, 0)$; l'asymptote réelle, parallèle à Oy, a pour équation $16x - 7a = 0$. Ces remarques suffisent pour tracer la courbe.

3° Pour obtenir le second point de rencontre de la polaire du point B avec le cercle λ, il faut d'abord chercher les coordonnées du symétrique de P par rapport à la droite qui joint le point B au centre du cercle λ et éliminer le paramètre λ entre les équations qui donnent ces deux coordonnées. Or la droite qui joint le point B au centre du cercle λ a pour équation

$$3a\lambda(x + a) - (\lambda^2 + 4a^2)y = 0 ;$$

si alors on désigne par α et β les coordonnées du symétrique de $P(0, \lambda)$, il faudra exprimer que le milieu du segment formé par les deux points est sur cette droite et que la droite qui les joint lui est perpendiculaire ; ceci donne

$$3a\lambda(\alpha + 2a) - (\lambda^2 + 4a^2)(\beta + \lambda) = 0, \qquad (\lambda^2 + 4a^2)\alpha + 3a\lambda(\beta - \lambda) = 0.$$

De la seconde de ces équations, on déduit

$$\frac{\alpha}{3a\lambda} = \frac{\beta - \lambda}{-(\lambda^2 + 4a^2)},$$

et, en tenant compte de la première,

$$\frac{\alpha}{3a\lambda} = \frac{\beta - \lambda}{-(\lambda^2 + 4a^2)} = \frac{2\lambda^2 + 2a^2\lambda}{(\lambda^2 + 4a^2)^2 - 9a^2\lambda^2}.$$

Le dernier rapport peut se simplifier, il est divisible haut et bas par $\lambda^2 + a^2$, et l'on trouve définitivement

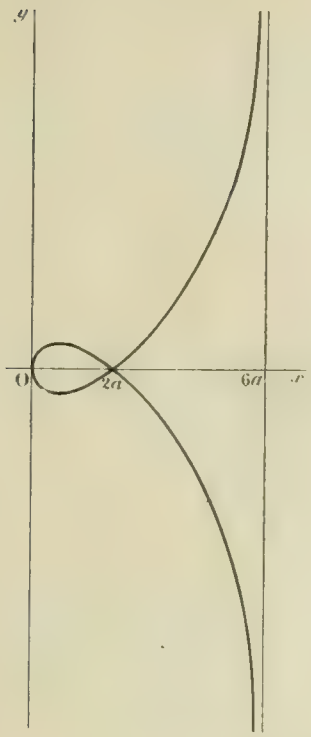
$$\alpha = \frac{6a\lambda^2}{\lambda^2 + 16a^2}, \qquad \beta = \frac{8a^2\lambda - \lambda^3}{\lambda^2 + 16a^2} ;$$

posant enfin $\lambda = 4at$, on obtient

$$(5) \qquad \alpha \text{ ou } x = \frac{6at^2}{t^2 + 1}, \qquad \beta \text{ ou } y = 2a\frac{t - 2t^3}{t^2 + 1} ;$$

ce sont les deux équations de la courbe exprimées à l'aide d'un paramètre t ; il est facile d'en déduire l'équation cartésienne ordinaire.

Pour construire cette ligne, remarquons d'abord que le changement de t en $-t$ laisse x invariable et change simplement le signe de y, cette simple remarque manifeste une symétrie par rapport à Ox et montre qu'il suffit de faire varier t de 0 à $+\infty$. Pour $t = 0$, x et y sont nuls, $\frac{y}{x}$ de-



vient infini, l'arc considéré part de l'origine tangentiellement à Oy, et, comme x et y sont positifs pour t infiniment petit, il est facile de figurer la portion de cet arc qui avoisine l'origine ; y devient nul pour $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. x est alors égal à $2a$; enfin, pour $t = +\infty$, $x = 6a$, $y = -\infty$. On peut maintenant figurer l'arc décrit de cette façon. On vérifierait d'ailleurs sans peine que y a un maximum dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. La courbe s'achève par symétrie.

Il reste à voir à quoi correspondent les deux solutions supprimées $\lambda^2 + a^2 = 0$.

Pour $\lambda = ai$, le cercle devient

$$x^2 + y^2 - \frac{ax}{2} - \frac{3ai}{2} y - \frac{a^2}{2} = 0,$$

ou

$$\left(x - iy - \frac{a}{2}\right)(x + iy + a) = 0 ;$$

il se décompose en deux droites isotropes dont l'une passe au point B, $x + iy + a = 0$; la polaire du point B par rapport à ce cercle particulier coïncide avec cette droite, qui dès lors fait tout entière partie du lieu ; de même la droite $x - iy + a = 0$ fait aussi partie du lieu total à titre exceptionnel.

On vérifie aisément que ce cercle exceptionnel a son centre sur le cercle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ et on s'explique alors sans peine comment il est orthogonal à celui-ci.

J. D. DUFAUT, à Aiguillon.

Bonnes solutions : MM. Pelvoisin ; F. A. G., à Caen.

CHIMIE

890. — *Dans un eudiomètre gradué placé sur la cuve à mercure et contenant* 145^{cc} *d'oxygène, on fait arriver les gaz qui se dégagent de deux ballons contenant, l'un des morceaux de sodium, l'autre des fragments de carbure de calcium, dans lesquels on verse, à froid, avec précaution, de l'eau en excès. Le volume total occupé maintenant par le mélange gazeux dans l'eudiomètre est* 256^{cc},5.

On excite l'étincelle. Après l'explosion, on laisse refroidir et on constate que le volume du résidu est 89^{cc},2. *Il est d'ailleurs complètement absorbable par la potasse.*

On demande d'expliquer les réactions, de les formuler et de calculer les poids de sodium et de carbure de calcium mis en expérience.

Pour simplifier, on supposera les gaz purs, secs et mesurés dans les conditions normales de température et de pression.

(*École centrale, deuxième session de 1899.*)

Prenons pour inconnues et désignons par x et y les fractions de masses moléculaires de sodium

et de carbure de calcium mises en œuvre. Les premières réactions seront représentées par les équations

$$x\,Na^2 + 2H^2O = 2NaOH + H^2,$$

$$y\,C^2Ca + 2H^2O = CaOH^2 + C^2H^2.$$

Puisque le résidu est complètement absorbable par la potasse, il se compose exclusivement de gaz carbonique, et il n'y a d'excès ni d'oxygène, ni d'hydrogène, ni d'acétylène. Les combustions seront donc représentées par les équations

$$x\left[H^2 + \frac{1}{2}O^2 = H^2O\right],$$

$$y\left[C^2H^2 + \frac{5}{2}O^2 = H^2O + 2CO^2\right].$$

Supposons le volume moléculaire égal à $22^{lit},3$, valeur généralement adoptée dans ces sortes de problèmes, et exprimons les volumes en fonction de x et y d'une part, des données d'autre part, nous aurons

Volume d'oxygène : $\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y\right)22,3 = 0,145.$

Volume des gaz : $x + y\,22,3 = 0,2565 - 0,145 = 0,1115.$

Volume du résidu : $2y.22,3 = 0,0892.$

Les données sont donc surabondantes, mais ces trois équations à deux inconnues sont heureusement compatibles et donnent

$$x = 0,003, \qquad y = 0,002.$$

On en déduit pour les poids demandés :

Sodium $x\,Na^2 = 0,003 \times 46 = 0^{gr},138.$

Carbure de calcium $y\,C^2Ca = 0,002 \times 64 = 0^{gr},128.$

QUESTIONS PROPOSÉES

994. — Montrer que toute équation du troisième degré

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

peut se mettre de deux façons sous la forme $(x+\alpha)(x-\beta)^2 = h$, α, β et h étant certaines constantes.

Dans quel cas le nombre α de la première forme est-il égal au nombre β de la seconde ? Calculer alors les valeurs de α, β et h et résoudre l'équation du troisième degré.

E. H.

995. — On considère un diamètre fixe AB dans un cercle donné. Soient M un point variable du cercle, P sa projection sur AB et A' le symétrique de A par rapport à P ; soit aussi Q la projection de A sur MA'.

1° Trouver le lieu de l'orthocentre du triangle AMA'.

2° Trouver l'enveloppe de la droite MA' et le lieu du point Q. Construire ces courbes.

E.-N. Barisien.

996. — Démontrer que si l'on fait tourner un système de deux miroirs plans angulaires autour de leur intersection, les images d'ordre pair, c'est-à-dire produites par un nombre pair de réflexions, restent immobiles. Application à la chambre claire.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC, IMP. COMTE-JACQUET.

11e Année. N° 4. Janvier 1901.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES LIEUX DES FOYERS DE CERTAINS RÉSEAUX DE CONIQUES OU DE QUADRIQUES

par M. **B. Cluzeau**, élève de Mathématiques spéciales au collège Stanislas.

Etant donné un réseau tangentiel

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0,$$

on sait qu'il existe une infinité de systèmes de deux points qui en font partie : ce sont les ombilics des coniques non évanouissantes du réseau prises deux à deux ; leur lieu est une courbe du quatrième degré en général. Il est clair, par suite, que si on considère le réseau défini par deux coniques $C_1(f_1 = 0)$, $C_2(f_2 = 0)$ et un point double $O(f_3 = 0)$, le lieu des ombilics du réseau est le même que le lieu des points de contact des tangentes menées du point O aux coniques du faisceau

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0.$$

Particularisons encore ce réseau ; supposons que la conique C_2 soit constituée par les points cycliques, le réseau contient alors :

les coniques homofocales à C_1 ;

les cercles de centre O ;

les coniques du faisceau déterminé par une des coniques homofocales à C_1 et un des cercles de centre O.

De ce qui précède, on déduit que le lieu des ombilics du réseau est le lieu des points de contact des tangentes issues de O aux coniques homofocales à C_1, c'est-à-dire en général une strophoïde. Donc, si on donne un cercle et une conique,

1° les faisceaux tangentiels déterminés par une quelconque des coniques homofocales à la proposée et l'un quelconque des cercles concentriques au cercle donné ont même lieu de foyers ;

2° ce lieu est le même que celui des points de contact des tangentes issues du centre du cercle donné aux coniques homofocales à la conique donnée.

Dans le cas général, ce lieu est une strophoïde ; si la conique donnée est une parabole, le lieu se décompose en une droite et une parabole ; si c'est un cercle, le lieu se confond avec celui des points de contact des tangentes aux cercles concentriques à l'un menées par le centre de l'autre ; c'est donc le cercle décrit sur la ligne des centres comme diamètre.

La considération d'un réseau tangentiel de quadriques

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

fournit des résultats analogues dans l'espace.

Dans le cas particulier où $f_3 = 0$ représente l'ombilicale et $f_2 = 0$ un point double, on voit que le lieu des focales du faisceau déterminé par une sphère (S) et une quadrique (Q) est le même que le lieu des courbes de contact des cônes ayant pour sommet le centre de (S) et circonscrits aux qua-

driques homofocales à (Q) ; ce lieu reste par suite le même quand on remplace (S) par une sphère concentrique et (Q) par une surface homofocale.

Les résultats précédents permettent de résoudre d'une manière simple le problème suivant proposé en 1892 au concours général (*) :

Soient (Q) une quadrique circonscrite à un ellipsoïde donné et A le pôle par rapport à l'ellipsoïde du plan P de la courbe de contact des deux surfaces.

1° Démontrer qu'il y a, en général, trois quadriques (Q_1), (Q_2), (Q_3) homofocales avec l'ellipsoïde et telles que les plans polaires P_1, P_2, P_3 du point A par rapport aux quadriques (Q_1), (Q_2), (Q_3) passent par le centre de la quadrique (Q).

2° Les plans P_1, P_2, P_3 sont les plans principaux de la quadrique (Q) et les coniques C_1, C_2, C_3 intersections des surfaces (P_1,Q_1), (P_2,Q_2), (P_3,Q_3) sont les focales de cette quadrique.

3° Les projections orthogonales des coniques C_1, C_2, C_3 sur les plans principaux de l'ellipsoïde (E) sont des coniques homofocales.

On projettera en particulier les coniques sur le plan principal qui contient l'axe majeur et l'axe moyen de l'ellipsoïde et l'on cherchera le lieu des foyers des coniques projetées quand la quadrique (Q) varie en restant circonscrite à l'ellipsoïde, le plan P de la courbe de contact ne changeant pas.

Considérons le réseau tangentiel déterminé par le point A, l'ellipsoïde (E) et l'ombilicale ; nous voyons que la quadrique (Q) en fait partie et comme d'après les résultats précédents, les focales du réseau ne sont autres que les courbes de contact des cones de sommet A circonscrits aux quadriques homofocales à (E), il existe trois de ces dernières (Q_1), (Q_2), (Q_3), admettant pour plans polaires de A les plans principaux, P_1, P_2, P_3, de la surface (Q), et pour sections par ces plans les focales de (Q).

Si on projette les coniques C_1, C_2, C_3 sur un plan quelconque, les coniques ainsi obtenues et le contour apparent de (Q) sur le même plan sont homofocales, puisque ce théorème est vrai pour les contours apparents de deux surfaces homofocales quelconques E ; en particulier, projetons sur l'un des plans principaux de (E) : le lieu cherché est, d'après ce que nous venons de dire, le lieu des foyers des contours apparents des quadriques Q sur ce plan ; le plan P ne changeant pas, ces contours apparents sont bitangents à la section principale de (E), le pole de la corde des contacts étant le point a, projection de A, le lieu cherché est donc le lieu des points de contact des tangentes issues de a aux coniques homofocales à la section principale de (E), c'est la strophoïde déjà signalée. La démonstration subsiste quelque soit le plan sur lequel on projette ; il suffit de remplacer la section principale par le contour apparent de (E) sur le plan choisi.

SUR DES APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES ENVELOPPES

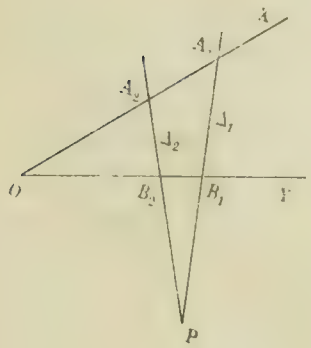
par M. **H. Michel**, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Douai

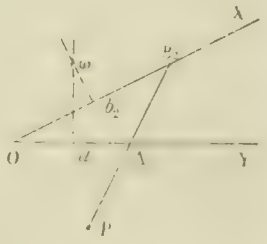
Lorsque, dans la recherche des éléments d'une courbe et du lieu de ces éléments, on assujettit la courbe à passer par un point P, il est quelquefois avantageux de l'assujettir à être tangente à deux droites arbitraires issues de P, puis de faire tendre l'une des droites vers l'autre ; de même, si on veut astreindre une courbe à être tangente à une droite donnée, on peut commencer par la faire passer par deux points quelconques de la droite, puis faire tendre l'un de ces points vers l'autre.

Ces simples remarques peuvent être utiles dans de nombreux problèmes, et je me propose de le montrer dans les quelques exemples suivants :

(*) Voir *Revue*, N° 4, octobre et novembre 1892.

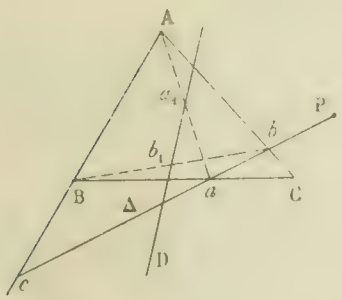
I. — *Lieu des foyers des paraboles tangentes à deux droites* OX, OY *et passant par un point* P.

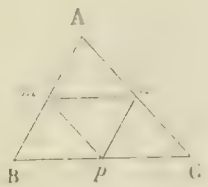




Je mène par P les deux droites Δ_1, Δ_2, arbitraires, et je considère la parabole tangente aux quatre droites OX, OY, Δ_1, Δ_2. D'après un théorème connu, son foyer est le second point commun aux cercles circonscrits aux triangles OA_1B_1, OA_2B_2. Faisons tendre Δ_1 vers Δ_2. La parabole, à la limite, est tangente en P à Δ_2 et son foyer est le point où le cercle circonscrit au triangle OA_2B_2 touche son enveloppe. Il en résulte que le lieu des foyers n'est autre que l'enveloppe du cercle (OA_2B_2), A_2B_2 pivotant autour de P. On sait que si un cercle passe par un point fixe O, son centre décrivant une courbe Γ, l'enveloppe du cercle est la podaire par rapport à O d'une courbe homothétique à Γ, O étant le centre et $\frac{1}{2}$ le rapport d'homothétie. Le centre ω du cercle (OA_2B_2) décrit visiblement une hyperbole Σ dont les directions asymptotiques sont perpendiculaires aux droites données OX, OY; Σ passe par O; le lieu des foyers étant la podaire d'une hyperbole passant en O, par rapport à ce point, est une quartique bicirculaire admettant en O un point de rebroussement, la tangente en O étant la normale en ce point à Σ.

II. — *Lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle* ABC *et passant par un point donné* P.

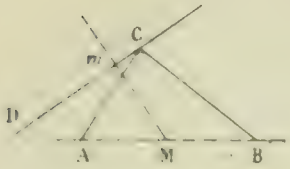




On sait que le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est la droite joignant les milieux des diagonales. Appliquant la méthode précédemment exposée, on voit que le problème est ramené au suivant : On mène par P une droite variable Δ, qui coupe en a, b, c les trois côtés du triangle donné et l'on considère la droite D qui joint les milieux de deux des diagonales du quadrilatère complet formé par Δ et les côtés du triangle ; trouver l'enveloppe de D. Le milieu a_1 de Aa décrit la droite mn joignant les milieux des côtés AB, AC. De même, le milieu b_1 décrit la droite mp. On voit sans peine que a_1, b_1 décrivent sur mn, mp des divisions homographiques. Donc D enveloppe une conique Γ inscrite dans le triangle mnp formé par les milieux des côtés du triangle proposé. Γ est le lieu demandé. De plus, comme les coniques lieux de centres qui correspondent aux positions du point P dans le plan ne dépendent que de deux paramètres des coordonnées de P, on voit qu'une conique quelconque Γ inscrite dans le triangle mnp peut être considérée comme étant le lieu des centres des coniques inscrites dans ABC et passant par un point P parfaitement déterminé dès que Γ l'est.

III. — *Lieu des centres des hyperboles équilatères passant par deux points donnés et tangentes à une droite donnée.*

Soient A, B les points donnés, D la droite à laquelle les hyperboles sont tangentes ; en faisant



passer ces hyperboles par deux points distincts de D, puis passant à la limite, on voit de suite qu'on est ramené au problème suivant : Deux sommets A, B d'un triangle étant fixes, le troisième, C, se déplaçant sur une droite AB, trouver l'enveloppe du cercle des neuf points du triangle. Ce cercle passe par le point M, milieu de AB; on voit aisément que le centre ω du cercle des neuf points décrit une conique admettant la perpendiculaire M*m* abaissée de M sur D pour axe de symétrie ; cette conique est une parabole dans le cas où AB est parallèle à D. Il en résulte que le lieu cherché est la podaire d'une conique par rapport à M, c'est-à-dire en général une quartique bicirculaire admettant M*m* pour axe de symétrie et M pour point double. La podaire se réduit à une cubique circulaire dans le cas où AB est parallèle à D.

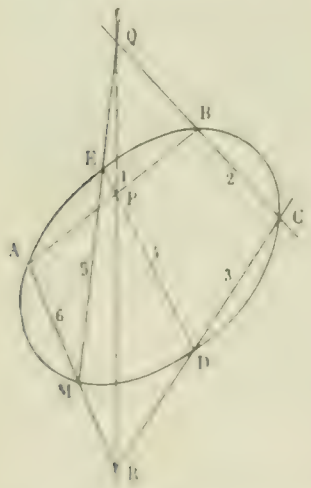
La méthode peut s'appliquer également au lieu des foyers des coniques dont on donne un foyer, qui sont tangentes à une droite donnée et qui passent par un point donné, etc.....

Elle est surtout avantageuse pour les coniques quand celles-ci sont assujetties à trois conditions tangentielles et une ponctuelle, ou trois ponctuelles et une tangentielle, et comme les lieux sont obtenus par la théorie des enveloppes, elle met souvent en évidence certains détails intéressants au point de vue tangentiel sur les courbes trouvées, et qui ne sont pas toujours visibles *a priori*.

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE L'HEXAGONE DE PASCAL

par M. **J. Thébes** élève au lycée de Montpellier

Théorème. — *Étant donnés* 5 *points d'une conique* A, B, C, D, E, *si l'on joint un point mobile de cette conique* M *aux points* A *et* E *et qu'on prenne l'intersection* Q *de* ME *avec* BC, *puis l'intersection* R *de* MA *avec* CD, *la droite* QR *passe par un point fixe.*



En effet, quand le point M se déplace sur la conique, les droites MA, ME engendrent deux faisceaux homographiques de sommets A et E. Si l'on coupe ces faisceaux par les droites CD, CB on obtient sur ces deux bases deux divisions homographiques engendrées par les points R et Q.

D'autre part, si l'on amène M en C, les points R et Q sont confondus avec C ; par suite, ces deux divisions homographiques à bases distinctes ont deux points homologues confondus. On sait que dans ce cas la droite RQ, qui joint deux points correspondants, passe par un point fixe.

Corollaire — Hexagone de Pascal. — Considérons l'hexagone de Pascal ABCDEM. Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6 les côtés consécutifs ; il faut prouver que les points de rencontre, P de (1, 4), Q de (2, 5), R de (3, 6) sont en ligne droite.

Considérons M comme mobile sur la conique. D'après le théorème précédent, QR passe par un point fixe. Cherchons ce point fixe. Pour cela donnons à M deux positions particulières.

1° M est en B, alors Q est en B. R est sur AB, donc RQ a la position AB.

2° M est en D ; alors R est en D. Q est sur DE, donc RQ coïncide avec ED ; par suite, le point d'intersection P de AB avec ED est le point fixe cherché. P, Q, R sont donc en ligne droite.

GÉOMÉTRIE

918(*). — *Si un triangle varie en restant inscrit dans une conique* C *et circonscrit à une autre conique* C′, *la polaire de tout point de* C *par rapport au système des trois côtés du triangle passe par un point fixe.*

Nous chercherons à démontrer la propriété corrélative qui s'énonce ainsi :

Etant données deux coniques C et C′ telles qu'il existe une infinité de triangles $\alpha\beta\gamma$ inscrits dans C et circonscrits à C′, le pôle trilinéaire par rapport à chacun de ces triangles d'une droite D tangente à C′ décrit une droite fixe.

Pour démontrer cette proposition, désignons par I et J les points de rencontre de la droite D avec la conique C et faisons une transformation homographique de façon que I et J deviennent les points cycliques. La conique C devient un cercle et C′ une parabole ; les triangles $\alpha\beta\gamma$ sont alors les triangles inscrits dans le cercle et circonscrits à la parabole. Les pôles trilinéaires en question deviennent les centres de gravité des triangles $\alpha\beta\gamma$ puisque D est maintenant la droite de l'infini.

Or les orthocentres des triangles $\alpha\beta\gamma$ décrivent une droite fixe, directrice de la parabole C′ et le centre du cercle circonscrit à chacun d'eux est fixe : c'est le centre du cercle C. Donc le centre de gravité de chacun de ces triangles, qui est le milieu de la droite joignant le centre du cercle circonscrit à l'orthocentre, décrit aussi une droite, parallèle à la directrice de C′.

En revenant à la figure primitive, nous voyons bien que les pôles trilinéaires en question sont en ligne droite.

G. LAPOINTE.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1900)

Mathématiques (Paris et Départements).

Solution de M. **Galbrun** (prix d'honneur), élève à l'Ecole normale supérieure.

931. — *On considère les paraboloïdes* Π *représentés, en coordonnées rectangulaires, par l'équation*

$$\frac{y^2}{p+\lambda}+\frac{z^2}{q+\lambda}-2x-\lambda=0,$$

dans laquelle p, q *sont des constantes et* λ *un paramètre variable, et l'on propose d'étudier la surface* Σ, *enveloppe des plans polaires* P, *par rapport aux paraboloïdes* Π, *d'un point donné* A.

1° *La surface* Σ *est de la troisième classe et chaque plan polaire touche cette surface en tous les points d'une droite* G.

2° *Les droites* G *sont tangentes à une courbe gauche* Γ *du troisième ordre ; elles admettent un cône directeur* C *du second degré.*

3° *La section de la surface* Σ *par un plan tangent, c'est-à-dire par un plan polaire* P, *se compose d'une droite* G *et d'une conique. — Déduire de là le degré de la surface* Σ.

4° *Chaque droite* G *est le lieu des pôles d'un plan* Q *par rapport aux paraboloïdes* Π.

Chaque plan Q *est perpendiculaire à la droite* G *à laquelle il correspond.*

5° *Trouver l'enveloppe* C_1 *des plans* Q *qui correspondent aux diverses droites* G.

On indiquera les relations qui lient l'enveloppe C_1 *avec les paraboloïdes* Π *et avec le cône* C.

Les surfaces Π représentées par l'équation

$$\frac{y^2}{p+\lambda}+\frac{z^2}{q+\lambda}-2x-\lambda=0,$$

(*) Voir une solution analytique de cette question dans le n° de novembre 1900 de la *Revue*.

où p et q sont des constantes et λ un paramètre variable forment une famille de paraboloïdes homofocaux. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A ; le plan polaire de ce point par rapport à la surface Π qui correspond à la valeur λ du paramètre a pour équation

$$(P) \qquad x - \frac{yy_0}{p+\lambda} - \frac{zz_0}{q+\lambda} + x_0 + \lambda = 0.$$

Cette équation, si l'on y fait varier λ, représente une famille de plans dépendant d'un seul paramètre : ces plans enveloppent donc une surface développable Σ. D'autre part, l'équation (P) étant du troisième degré en λ, par un point de l'espace passent trois plans tangents à Σ, qui est par suite de la troisième classe.

Si nous désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les racines de l'équation (P), en résolvant le système des trois équations linéaires

$$\left\{\begin{aligned} x - \frac{yy_0}{p+\lambda_1} - \frac{zz_0}{q+\lambda_1} + x_0 + \lambda_1 &= 0, \\ x - \frac{yy_0}{p+\lambda_2} - \frac{zz_0}{q+\lambda_2} + x_0 + \lambda_2 &= 0, \\ x - \frac{yy_0}{p+\lambda_3} - \frac{zz_0}{q+\lambda_3} + x_0 + \lambda_3 &= 0, \end{aligned}\right.$$

nous aurons les expressions des coordonnées x, y, z du point par lequel passent les trois plans qui correspondent aux valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ du paramètre, en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ce sont

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= -(p+q+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+x_0), \\ y &= -\frac{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)(p+\lambda_3)}{y_0(p-q)}, \\ z &= \frac{(q+\lambda_1)(q+\lambda_2)(q+\lambda_3)}{z_0(p-q)}. \end{aligned}\right.$$

Si dans les expressions (1) je fais $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et $\lambda_3 = \rho$, j'obtiens les expressions des coordonnées d'un point quelconque de la surface lieu des points par lesquelles passent deux plans P confondus, c'est-à-dire de la surface Σ, en fonction des deux paramètres λ et ρ. Ce sont

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= -(p+q+2\lambda+\rho+x_0), \\ y &= -\frac{(p+\lambda)^2(p+\rho)}{y_0(p-q)}, \\ z &= \frac{(q+\lambda)^2(q+\rho)}{z_0(p-q)}. \end{aligned}\right.$$

Si dans les expressions (2) je considère λ comme fixe et ρ comme variable, je vois que le point (x, y, z) décrit une droite G, génératrice de la surface, intersection des deux plans P infiniment voisins correspondant l'un à la valeur λ du paramètre, l'autre à une valeur infiniment voisine. Le plan P correspondant à la valeur λ du paramètre est donc tangent à la surface le long de G.

Si dans les expressions (2) je fais $\rho = \lambda$, elles deviennent

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= -(p+q+3\lambda+x_0), \\ y &= -\frac{(p+\lambda)^3}{y_0(p-q)}, \\ z &= \frac{(q+\lambda)^3}{z_0(p-q)}. \end{aligned}\right.$$

Le point (x, y, z) décrit alors une cubique gauche, lieu des points d'où l'on peut mener à la surface Σ trois plans tangents confondus ; cette courbe est donc l'arête de rebroussement de la surface, à laquelle les génératrices G sont tangentes.

Les expressions des coordonnées d'un point quelconque d'une parallèle menée par l'origine à une génératrice de la surface Σ sont

$$\begin{cases} x = -\rho, \\ y = -\dfrac{p + \lambda^2 \rho}{y_0(p - q)}, \\ z = \dfrac{(q + \lambda^2 \rho)}{z_0(p - q)}. \end{cases}$$

En éliminant ρ, on voit que les équations de ces droites sont

$$\lambda^2 x + 2\lambda q x + q^2 x - z z_0 (p - q) = 0,$$

$$\lambda^2 x + 2\lambda p x + p^2 x - y y_0 (p - q) = 0.$$

En éliminant λ, il vient

$$\text{(C)} \qquad (y y_0 + z z_0)^2 + x^2 (p - q)^2 - 2 (p - q) x (y_0 - z z_0) = 0.$$

Cette équation représente un cône du second degré qui est le cône directeur de la surface Σ.

Revenons aux expressions (2) des coordonnées d'un point quelconque de la surface Σ. Si dans ces expressions je considère ρ comme constant et λ comme variable, le point (x, y, z) décrit une parabole située sur la surface Σ et dans le plan P correspondant à la valeur ρ du paramètre. Tout plan P est donc tangent à la surface suivant une génératrice G et la coupe suivant une parabole. Toute droite située dans un plan P coupe la surface Σ en quatre points dont deux sont à l'intersection de cette droite et de la parabole, et dont les deux autres sont confondus avec le point d'intersection de cette droite et de la génératrice.

La surface Σ est donc du quatrième degré.

On peut d'ailleurs apercevoir autrement ce résultat. Considérons la droite représentée par les équations

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + h_1 = 0,$$

$$u_2 x + v_2 y + w_2 z + h_2 = 0.$$

Les λ et ρ de ses points de rencontre avec la surface sont donnés par les solutions communes aux deux équations

$$-u_1(p + q + 2\lambda - \rho - x_0) - v_1 \frac{(p + \lambda^2)(p + \rho)}{y_0(p - q)} + w_1 \frac{(q + \lambda^2)(q + \rho)}{z_0(p - q)} + h_1 = 0,$$

$$-u_2(p + q + 2\lambda - \rho - x_0) - v_2 \frac{(p + \lambda^2)(p + \rho)}{y_0(p - q)} + w_2 \frac{(q + \lambda^2)(q + \rho)}{z_0(p - q)} + h_2 = 0.$$

Si dans ces équations je considère λ et ρ comme les coordonnées d'un point d'un plan, elles représentent deux cubiques de ce plan ; or, elles ont à l'infini un point simple commun dans la direction $\rho = 0$, et un point double dans la direction $\lambda = 0$. Elles ont donc quatre points communs à distance finie auxquels correspondent quatre systèmes de valeurs finies de λ et de ρ satisfaisant à ces deux équations ; la droite rencontre la surface Σ aux quatre points correspondants.

Soit

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation d'un plan Q ; pour trouver le lieu des pôles de ce plan par rapport aux paraboloïdes H, j'identifie son équation avec celle du plan polaire d'un point (x, y, z), qui est

$$X - \frac{Yq}{p + \rho} - \frac{Zz}{q + \rho} + \ldots = 0.$$

Il vient ainsi
$$\frac{u}{1} = \frac{v}{\dfrac{-y}{p+\rho}} = \frac{w}{\dfrac{-z}{q+\rho}} = \frac{h}{x+\rho}$$

ou
$$x = \frac{h}{u} - \rho, \qquad y = -\frac{v}{u}(p+\rho), \qquad z = -\frac{w}{u}(q+\rho).$$

Ce lieu est donc une droite.

En posant
$$\frac{h}{u} = -(p+q+x_0+2\lambda), \qquad \frac{v}{u} = \frac{p+\lambda^2}{y_0(p-q)}, \qquad \frac{w}{u} = -\frac{q+\lambda^2}{z_0(p-q)},$$
les expressions des coordonnées du point courant de cette droite deviennent
$$x = -(p+q+2\lambda+\rho+x_0),$$
$$y = -\frac{(p+\lambda^2)(p+\rho)}{y_0(p-q)},$$
$$z = \frac{(q+\lambda^2)(q+\rho)}{z_0(p-q)}.$$

C'est donc une génératrice G de la surface Σ et cette génératrice est le lieu des pôles du plan Q qui a pour équation
$$x + \frac{(p+\lambda^2)y}{y_0(p-q)} - \frac{(q+\lambda^2)z}{z_0(p-q)} - (p+q+x_0+2\lambda) = 0,$$
plan qui lui est évidemment perpendiculaire.

L'équation de ce plan peut s'écrire
$$\lambda^2\left[\frac{y}{y_0(p-q)} - \frac{z}{z_0(p-q)}\right] + 2\lambda\left[\frac{py}{y_0(p-q)} - \frac{qz}{z_0(p-q)} - 1\right] + x + \frac{p^2y}{y_0(p-q)} - \frac{q^2z}{z_0(p-q)} - (p+q+x_0) = 0.$$

L'enveloppe de ce plan a pour équation
$$\left[\frac{py}{y_0(p-q)} - \frac{qz}{z_0(p-q)} - 1\right]^2 - \left[\frac{y}{y_0(p-q)} - \frac{z}{z_0(p-q)}\right]\left[x + \frac{p^2y}{y_0(p-q)} - \frac{q^2z}{z_0(p-q)} - p - q - x_0\right] = 0,$$
ou, en transportant l'origine des coordonnées au point A (x_0, y_0, z_0),
$$\left[\frac{py}{y_0(p-q)} - \frac{qz}{z_0(p-q)}\right]^2 - \left(\frac{y}{y_0(p-q)} - \frac{z}{z_0(p-q)}\right)\left(x - \frac{p^2y}{y_0(p-q)} - \frac{q^2z}{z_0(p-q)}\right) = 0,$$
ou enfin
$$(C_0) \qquad x\,y_0z_0(y_0z_0 - z_0y_0) + yz(p-q)^2 = 0.$$

L'enveloppe des plans Q est donc un cône du deuxième degré, de sommet (x_0, y_0, z_0) et qui n'est autre, puisque ces plans Q sont perpendiculaires aux droites G, que le cône réciproque de C.

Nous avons de plus démontré que le lieu des pôles d'un plan par rapport aux surfaces H est une droite perpendiculaire à ce plan. Si je considère un plan P, la droite lieu de ses pôles est la perpendiculaire abaissée du point A sur ce plan; mais ce plan P est lui-même parallèle à un plan tangent au cône directeur C de la surface Σ, la droite lieu de ces pôles est donc une génératrice de C_1.

En outre, cette génératrice est aussi une normale à la surface H tangente au plan P correspondant; le cône C_1 est donc le lieu des normales aux paraboloïdes H passant par A.

On peut établir ce résultat par le calcul.

Une normale à une surface H a pour équations
$$\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{\dfrac{y}{p-q}} = \frac{Z-z}{\dfrac{z}{q-p}} = \rho.$$

Elle passe en A si l'on a

$$\frac{x_0 - x}{1} = \frac{y_0 - y}{\dfrac{-y}{p+\lambda}} = \frac{z_0 - z}{\dfrac{-z}{q+\lambda}} = \rho.$$

On a donc $\qquad x = x_0 - \rho, \qquad y = \dfrac{y_0(p+\lambda)}{p+\lambda-\rho}, \qquad z = \dfrac{z_0(q+\lambda)}{q+\lambda-\rho}.$

Mais comme $\dfrac{x_0 + \mu x}{1+\mu}, \dfrac{y_0 + \mu y}{1+\mu}, \dfrac{z_0 + \mu z}{1+\mu}$ sont les coordonnées du point courant d'une droite passant par A, pour obtenir l'équation du cône des normales, je n'ai qu'à éliminer μ et ρ entre

$$\frac{x_0 - \mu x}{1-\mu} = x_0 - \rho, \qquad \frac{y_0 - \mu y}{1-\mu} = \frac{y_0(p+\lambda)}{p+\lambda-\rho}, \qquad \frac{z_0 - \mu z}{1-\mu} = \frac{z_0(q+\lambda)}{q+\lambda-\rho}.$$

ou

$$\mu(x - x_0) - \rho + \rho\mu = 0,$$

$$\mu(y - y_0)(p+\lambda) - \rho y_0 + \rho\mu y_0 = 0,$$

$$\mu(z - z_0)(q+\lambda) - \rho z_0 + \rho\mu z_0 = 0.$$

Il vient

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & 1 & 1 \\ (y - y_0)(p+\lambda) & -y_0 & -y \\ (z - z_0)(q+\lambda) & -z_0 & -z \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(x - x_0)(y_0 z - z_0 y) - (y - y_0)(z - z_0)(p+\lambda) - (y - y_0)(z - z_0)(q+\lambda) = 0.$$

et, en transportant l'origine en A,

$$x_0 y_0 z - z_0 y + yz(p - q) = 0.$$

Cette équation est bien celle du cône C_1.

Solution géométrique. — Les paraboloïdes Π forment un faisceau tangentiel de quadriques ; pour étudier les propriétés de la surface Σ, l'enveloppe des plans polaires d'un point A par rapport à ces paraboloïdes, je vais d'abord établir certaines propriétés communes à tous les faisceaux tangentiels de quadriques.

Il est évident que le lieu des pôles d'un plan par rapport aux quadriques d'un faisceau tangentiel est une droite ; dans le cas des surfaces homofocales, cette droite contient le point du plan de l'infini pôle de la droite de l'infini du plan donné par rapport au cercle imaginaire de l'infini Γ ; elle est donc perpendiculaire à ce plan.

Ceci posé, considérons un plan P_1 et la droite Δ_1 lieu des pôles de ce plan par rapport aux quadriques d'un faisceau tangentiel ; supposons que le plan P_1 tourne autour d'une droite D_1 et cherchons le lieu de Δ_1 ; soient D'_1 et D'_2 les conjuguées de D_1 par rapport à deux quadriques quelconques mais fixes du faisceau ; quand P_1 tourne autour de D_1, la droite Δ_1 trace sur D'_1 et D'_2 deux divisions homographiques et engendre une surface réglée du second degré.

L'un des systèmes de génératrices de cette surface est formé par les droites Δ_1, l'autre par les droites D'_1 conjuguées de D_1 par rapport aux quadriques du faisceau, puisque je puis prendre pour quadriques de base deux quadriques quelconques du faisceau.

Cette surface du second degré, dans le cas des quadriques homofocales, est un paraboloïde hyperbolique ; car je puis prendre pour quadrique de base de ce faisceau le cercle de l'infini Γ, et la conjuguée de D_1 par rapport à Γ n'est autre que la polaire du point à l'infini de D_1, c'est-à-dire une droite réelle du plan de l'infini.

Ainsi, si l'on considère un faisceau tangentiel de quadriques, à toute droite D_1 correspond une surface réglée du second degré S_1 dont l'un des systèmes de génératrices est formé par les conjuguées de D_1 et l'autre par les droites Δ_1, lieux des pôles d'un plan P_1 tournant autour de D_1.

Ceci posé, considérons un point A défini comme l'intersection de deux droites D_1 et D_2 ; son plan polaire par rapport à une quadrique du faisceau passe par les conjuguées de D_1 et D_2 par rapport à cette quadrique ; il est donc tangent aux deux quadriques S_1 et S_2 correspondant à D_1 et D_2. On voit donc que le plan polaire d'un point A par rapport aux quadriques d'un faisceau considéré enveloppe la développable circonscrite à S_1 et S_2.

Cette développable Σ est d'ailleurs de troisième classe car les quadriques S_1 et S_2 ont une génératrice commune, la droite Δ_1, lieu des pôles du plan de D_1 et D_2.

La développable Σ qui leur est circonscrite peut dès lors être considérée comme la transformée par polaires réciproques de la cubique d'intersection des deux quadriques transformées de S_1 et S_2 ayant une génératrice commune ; elle est donc de troisième classe.

L'arête de rebroussement de la surface Σ n'est autre que la transformée par polaires réciproques de la surface enveloppée par le plan osculateur à la cubique d'intersection de S_1 et S_2 transformées de S_1 et S_2. Or, par tout point de l'espace non situé sur une tangente à la cubique, c'est-à-dire non situé sur la surface, on peut mener à la cubique trois plans osculateurs, puisque de ce point elle se projette sur un plan suivant une cubique à point double ayant trois points d'inflexions : la surface enveloppée par le plan osculateur à la cubique est donc de troisième classe et sa transformée, arête de rebroussement de Σ, est du troisième ordre.

De même, à tout point de Σ situé dans un plan P tangent à Σ suivant une génératrice G correspond dans la transformation par polaires réciproques un plan contenant le point p de la cubique transformée de Σ correspondant au plan P et tangent à cette cubique.

Or, ces plans se divisent en deux groupes : l'un est l'ensemble des plans tangents au cône du second degré projetant la cubique du point p ; l'autre est l'ensemble des plans passant par la tangente en p à la cubique ; on voit de plus que par la tangente en p à la cubique et qui n'est autre qu'une génératrice du cône, on ne peut mener à ce cône que deux plans tangents confondus avec le plan osculateur en p à la cubique.

Il s'ensuit évidemment que le plan P coupe la surface Σ suivant une génératrice G le long de laquelle il est tangent, et qui n'est autre que la transformée de la tangente en p à la cubique, et suivant une conique transformée du cône ; de plus cette conique est tangente à G au point où G rencontre l'arête de rebroussement de Σ.

En résumé, nous voyons que l'enveloppe des plans polaires d'un point A par rapport aux quadriques d'un faisceau tangentiel est une surface développable de troisième classe Σ. Cette surface Σ est circonscrite à une infinité de quadriques S, lieu des conjuguées des droites D passant par A par rapport aux quadriques du faisceau. Dans le cas des quadriques homofocales, les quadriques S sont des paraboloïdes hyperboliques.

L'arête de rebroussement de la surface Σ est du troisième ordre.

Un plan tangent la coupe suivant la génératrice de contact et une conique tangente à la génératrice au point où l'arête de rebroussement est tangente à la génératrice.

Dans le cas des surfaces homofocales, le plan de l'infini tangent aux paraboloïdes S est tangent à Σ. Les points à l'infini de Σ sont alors situés sur une droite et une conique. Les divers points de la conique sont les traces sur le plan de l'infini des génératrices de Σ non situées dans ce plan et cette surface admet un cône directeur du second degré.

Ce dernier résultat est évident, car si l'on revient à la transformation par polaires réciproques de la surface Σ, à un point situé sur la conique d'intersection de cette surface et d'un de ses plans tangents P, correspond un plan tangent à la cubique transformée de Σ, passant par p et contenant une tangente à la cubique. Mais la transformée de cette tangente est la génératrice de Σ passant par le point considéré.

Dans le cas des surfaces homofocales, on voit que les points à l'infini de la conique d'intersection d'un plan tangent à Σ avec la surface Σ sont confondus avec le point d'intersection de ce plan et de la génératrice à l'infini de Σ : cette conique est donc une parabole.

Si maintenant je considère un plan tangent à la surface Σ, ce plan est un plan osculateur à son arête de rebroussement ; on voit dès lors que les plans parallèles à ces plans menés par un point O de l'espace enveloppent le cône directeur de la surface Σ qui a son sommet en ce point.

Or le lieu des pôles d'un plan P tangents à Σ par rapport au faisceau de quadriques homofocales considérées est la droite Δ perpendiculaire à ce plan passant par A. Le plan tangent P infiniment voisin de P donne une droite Δ' infiniment voisine de Δ, et le plan Q, qui passe par Δ et Δ' et est tangent suivant Δ au cône réciproque du cône directeur de la surface Σ de sommet A, a pour droite lieu de ses pôles la génératrice G de Σ, intersection de P et de P'.

Toute génératrice G de Σ est donc le lieu des pôles d'un plan Q et ce plan enveloppe le cône C_1 réciproque du cône C directeur de la surface Σ.

De plus le point où la génératrice Δ rencontre P est le point où la surface homofocale du faisceau tangente à P touche ce plan ; la génératrice Δ est donc une normale à cette surface passant par A. Le cône C_1 est le lieu des normales issues du point A aux surfaces homofocales considérées.

[illegible] M. [illegible] Vouillon, au Havre.
[illegible] M. [illegible], [illegible]

Physique (Paris).

Solution de M. **A. Joly** (1er prix), élève au lycée Henri IV.

932. — *Pour un prisme donné et une radiation donnée, à chaque angle d'incidence correspond en général un angle de déviation déterminé. Prenant les déviations comme abscisses et les incidences comme ordonnées, la relation entre ces quantités peut être représentée par une courbe dont l'équation serait très compliquée, mais facile à tracer par points. Supposons que pour le prisme en question on ait tracé ainsi les courbes relatives à un certain nombre de radiations. Chacune d'elles en particulier et leur ensemble présentent un certain nombre de propriétés générales que les principes fondamentaux du prisme permettent de mettre facilement en évidence et qu'on demande de trouver. En particulier :*

1° *Comment sont placés sur la courbe les points relatifs à un angle donné d'incidence et à un angle d'émergence correspondant ?*

2° *Comment est placé le point qui correspond au minimum de déviation ? Quelle conclusion peut-on tirer de 1° et de 2° relativement à la forme générale de la courbe ?*

3° *Quel est le lieu des points qui, sur les différentes courbes, correspondent au minimum de déviation ?*

4° *Relation de ce lieu avec la droite qui joint sur une même courbe deux points correspondants d'incidence et d'émergence.*

5° *Lieu des points d'émergence correspondant à une même valeur de l'angle d'incidence.*

6° *Lieu des points formant en haut et en bas les extrémités de la partie réelle de chaque courbe.*

7° *Comment variera l'ensemble des courbes quand, l'angle du prisme restant constant, on fera varier la nature de la substance qui le compose ?*

8° *Comment varie la courbe relative à une radiation donnée quand on fait varier l'angle du prisme de zéro à la valeur limite au delà de laquelle le prisme n'est plus traversé par aucun rayon ?*

L'angle d'incidence i et la déviation Δ sont liés entre eux par les quatre formules du prisme

$$\sin i = n \sin r, \qquad \sin i' = n \sin r',$$
$$r + r' = A, \qquad \Delta = i + i' - A.$$

L'équation de la courbe considérée s'obtiendrait donc en éliminant r, r' et i' entre ces quatre équations.

1° On voit que ces formules sont réciproques en i et i', r et r' : si l'on prend i' pour angle d'incidence, l'angle d'émergence est i et on trouve la même déviation Δ ; on obtient ainsi deux points de la courbe ayant même abscisse. Les points relatifs à un angle donné d'incidence et à un angle d'émergence correspondant se trouvent donc sur une même parallèle à Oy.

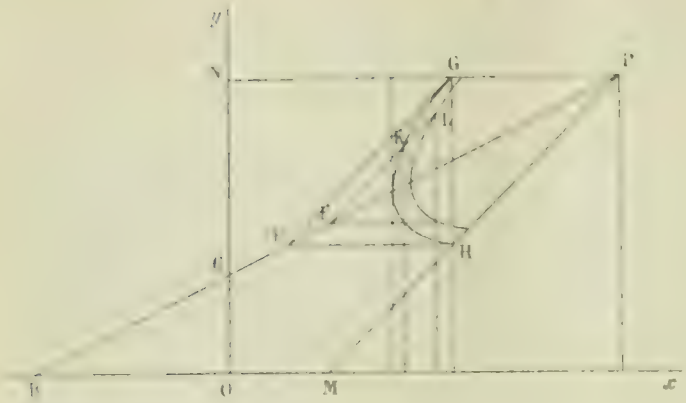
2° Au minimum de déviation, on a $i = i'$, donc les deux points dont l'abscisse correspond à cette valeur de Δ sont confondus. La tangente en ce point est donc parallèle à Oy.

On arrive d'ailleurs à résultat en différentiant les formules du prisme :

$$\cos i\, di = n \cos r\, dr, \qquad \cos i'\, di' = n \cos r'\, dr',$$
$$dr + dr' = 0, \qquad d\Delta = di + di',$$

d'où
$$d\Delta = di\left(1 - \frac{\cos i' \cos r}{\cos i \cos r'}\right).$$

Au minimum de déviation, on a $\frac{d\Delta}{di} = 0$; donc le coefficient angulaire de la tangente à la



courbe au point correspondant est infini et cette tangente est parallèle à Oy.

La courbe a par conséquent une allure parabolique, l'ouverture étant tournée vers les x positifs.

3° Au minimum de déviation, on a, quel que soit n, $\Delta = 2i - A$. Cette équation, qu'on peut écrire

$$(1) \qquad x = 2y - A,$$

représente une droite BC de coefficient angulaire $\frac{1}{2}$.

4° En rapprochant cette équation (1) de l'expression générale de Δ, on voit que, pour une valeur déterminée de x, l'ordonnée de la droite est la moyenne des deux ordonnées de la courbe. Le point de rencontre de la droite avec une corde de la courbe parallèle à Oy est donc au milieu de cette corde et le lieu trouvé au § 3 est le diamètre conjugué de la direction Oy dans toutes les courbes relatives à un prisme donné.

5° L'angle i étant constant et i' variable, l'équation générale $\Delta = i + i' - A$ peut s'écrire

$$(2) \qquad x = i - y - A;$$

elle représente une droite KL inclinée à 45° sur les axes. Cette droite rencontre évidemment le lieu BC en un point E d'ordonnée i.

6° La plus grande valeur que peut prendre l'angle d'incidence est $\frac{\pi}{2}$. Donc le lieu du point d'arrêt supérieur des courbes est la droite $y = \frac{\pi}{2}$, soit PN.

Il y a de même un point d'arrêt lorsque l'angle d'émergence devient égal à $\frac{\pi}{2}$; le lieu du point correspondant représentatif de l'angle d'incidence sera, d'après le § 5, la droite $x = y + \frac{\pi}{2} - A$, soit PM.

Considérons les deux points d'arrêt d'une même courbe. Au point d'arrêt supérieur, G, on a $i = \frac{\pi}{2}$; on en conclut que $\frac{d\Delta}{di} = 1$; la tangente à la courbe en ce point est parallèle à la première bissectrice de l'angle des axes. Au point d'arrêt inférieur, H, $i' = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\Delta}{di}$ est infini; donc la tangente à la courbe en ce point est parallèle à Oy. Ces deux points ont d'ailleurs même abscisse. La partie utile de chaque courbe est donc enfermée dans un parallélogramme FGPH dont deux côtés PM et PN sont fixes pour ce prisme donné, les deux autres se déplacent parallèlement à eux-mêmes; leur point de rencontre décrivant la droite BC.

7° Pour une même valeur de i, si n augmente, Δ croît; les courbes, toujours limitées aux droites PM et PN, reculent vers le point P.

8° Supposons n fixe et A variable. Si A croît, pour une même valeur de i, Δ croît, et la courbe se déplace vers les x positifs. En même temps, la droite PM se déplace vers les x négatifs. La courbe se rétrécit donc et, à un certain moment, se réduit à un point; on a alors $i = i' = \frac{\pi}{2}$; par suite, $\sin i = \sin i' = \frac{1}{n}$ et $A = 2\alpha$; donc $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{n}$. On est ainsi conduit naturellement à la valeur de l'angle limite.

Si, au contraire, A tend vers 0, la droite PM se déplace vers les x positifs. La droite BC en fait autant, passe à la limite par l'origine et les courbes se réduisent alors à l'axe des y, car Δ est nul quelle que soit l'incidence.

Nota. — Les propriétés géométriques qui précèdent ont fait l'objet de vérifications expérimentales de la part de M. A. de Gramont, ce qui fournit une nouvelle démonstration indirecte de la loi de Descartes, point de départ de tous ces calculs. Les deux courbes reproduites sur la figure se rapportent à un prisme de 60° et à deux radiations (pour lesquelles les indices sont respectivement 1,6447 (raie C) et 1,6872 (raie réfrangible du doublet violet de l'aluminium). (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome 130, p. 403, 12 février 1900.)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

934. — *On considère deux coniques Σ et Σ' situées dans un même plan, et d'un point M de ce plan on leur mène des tangentes : soient T_1 et T_2 les tangentes à la première conique, T'_1 et T'_2 les tangentes à la seconde. On sait que le lieu des points M pour lesquels T_1 et T_2 sont conjuguées harmoniques par rapport à T'_1 et T'_2 est une conique F.*

Cela posé, on demande :

1° *de déterminer les rayons doubles de l'involution déterminée par les couples de droites T_1 et T_2, T'_1 et T'_2, et de déterminer leur enveloppe lorsque le point M décrit la conique F ;*

2° *d'examiner les cas particuliers suivants :*

a) F est réductible,

b) la conique Σ' est réductible à un système de deux points,

c) les deux points précédents sont conjugués par rapport à Σ,

d) Σ est une ellipse et Σ' est l'ensemble des points cycliques du plan.

Prenons pour triangle de référence le triangle conjugué commun aux coniques Σ et Σ', et désignons par $\Sigma \equiv au^2 + bv^2 + cw^2 = 0$, $\Sigma' \equiv a'u^2 + b'v^2 + c'w^2 = 0$ les équations tangentielles de ces courbes.

Cherchons maintenant l'équation ponctuelle de la conique F. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point M de cette conique ; les équations de l'ensemble des tangentes T_1, T_2 et T'_1, T'_2 issues du point M aux coniques Σ et Σ' sont respectivement

$$a(yz_0 - zy_0)^2 + b(zx_0 - xz_0)^2 + c(xy_0 - yx_0)^2 = 0,$$
$$a'(yz_0 - zy_0)^2 + b'(zx_0 - xz_0)^2 + c'(xy_0 - yx_0)^2 = 0.$$

Pour écrire que T_1, T_2 sont conjuguées harmoniques par rapport à T'_1, T'_2, nous coupons ces quatre droites par le côté $z = 0$ du triangle de référence ; les points de rencontre sont définis par les équations $ay^2z_0^2 + bx^2z_0^2 + c(xy_0 - yx_0)^2 = 0$, $a'y^2z_0^2 + b'x^2z_0^2 + c'(xy_0 - yx_0)^2 = 0$

$$(bz_0^2 + cy_0^2)x^2 - 2cx_0y_0xy + (az_0^2 + cx_0^2)y^2 = 0, \qquad (b'z_0^2 + c'y_0^2)x^2 - 2c'x_0y_0xy + (a'z_0^2 + c'x_0^2)y^2 = 0$$

et nous égalons à zéro l'invariant harmonique de ces deux trinomes. Nous avons ainsi

$$bz_0^2 + cy_0^2)(a'z_0^2 + c'x_0^2) + (az_0^2 + cx_0^2)(b'z_0^2 + c'y_0^2) - 2cc'x_0y_0 = 0,$$

ou, en supprimant le facteur z_0^2, que nous avons implicitement supposé différent de zéro

$$(1) \qquad (bc' + cb')x_0^2 + (ca' + ac')y_0^2 + (ab' + ba')z_0^2 = 0.$$

On voit ainsi que la conique F a pour équation ponctuelle

$$F \equiv (bc' + cb')x^2 + (ca' + ac')y^2 + (ab' + ba')z^2 = 0$$

elle est conjuguée par rapport au triangle de référence.

1. Les rayons doubles de l'involution définie par les couples de droites T_1, T_2 et T_3, T_4 sont les tangentes au point M aux coniques du faisceau tangentiel $\Sigma + \lambda\Sigma' = 0$ qui passe par ce point.

Les valeurs de λ relatives à ces deux coniques sont racines de l'équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a + \lambda a'} + \frac{y^2}{b + \lambda b'} + \frac{z^2}{c + \lambda c'} = 0,$$

et la tangente au point M à l'une de ces coniques a pour équation

$$\frac{xx_0}{a + \lambda a'} + \frac{yy_0}{b + \lambda b'} + \frac{zz_0}{c + \lambda c'} = 0.$$

En remplaçant dans cette équation λ successivement par les racines de l'équation (2), nous aurons les équations des rayons doubles demandés.

Nous allons chercher l'équation tangentielle de leur enveloppe quand le point M décrit la conique F, c'est-à-dire quand on a la relation (1).

Soient u, v, w les coordonnées d'un de ces rayons doubles ; nous avons

$$\theta u = \frac{x_0}{a + \lambda a'}, \qquad \theta v = \frac{y_0}{b + \lambda b'}, \qquad \theta w = \frac{z_0}{c + \lambda c'},$$

nous en tirons $\quad x_0 = \theta u(a + \lambda a'), \qquad y_0 = \theta v(b + \lambda b'), \qquad z_0 = \theta w(c + \lambda c'),$

et en portant ces valeurs dans la relation (2), nous obtenons

$$u^2(a + \lambda a') + v^2(b + \lambda b') + w^2(c + \lambda c') = 0,$$

d'où $\lambda = -\dfrac{\Sigma}{\Sigma'}$, et par suite

$$x_0 = \frac{\theta u(a\Sigma' - a'\Sigma)}{\Sigma'}, \qquad y_0 = \frac{\theta v(b\Sigma' - b'\Sigma)}{\Sigma'}, \qquad z_0 = \frac{\theta w(c\Sigma' - c'\Sigma)}{\Sigma'}.$$

Il ne nous reste plus pour avoir l'équation de l'enveloppe qu'à porter ces valeurs dans la relation (1), ce qui donne

$$(bc' + cb')u^2(a\Sigma' - a'\Sigma)^2 + (ca' + ac')v^2(b\Sigma' - b'\Sigma)^2 + (ab' + ba')w^2(c\Sigma' - c'\Sigma)^2 = 0$$

$$C \equiv (bc' + cb')u^2(ab' - ba')v^2 + (ca' + ac')w^2(ca' + ac')v^2(bc' + cb')w^2 + (ab' + ba')u^2(ab' + ba')w^2(ca' + ac')u^2 - (bc' + cb')v^2 = 0.$$

L'enveloppe est une courbe (C) de sixième classe.

2. *a*) Pour que la conique F se décompose, il faut et il suffit que dans son équation, l'un des coefficients de x^2, de y^2 ou de z^2 soit nul. Supposons par exemple $ab' - ba' = 0$. L'équation de l'enveloppe s'écrit alors

$$(bc' + cb')u^2(ab' - ba')v^2 - (ca' + ac')w^2(ca' + ac')v^2(bc' + cb')w^2 + (ab' + ba')u^2(ab' + ba')w^2(ca' + ac')u^2 - (bc' + cb')v^2 = 0,$$

la courbe (C) se décompose en deux courbes de troisième classe ayant pour équations tangentielles

$$\sqrt{bc' + cb'}\,u(ab' - ba')v^2 + (ca' + ac')w^2 + \sqrt{(ca' + ac')}\,v(bc' + cb')w^2 + (ab' + ba')u^2 = 0$$

b) Supposons $c' = 0$ et pour simplifier l'écriture, posons $a' = b' = 1$; nous avons alors $\Sigma' = u^2 + v^2$.

L'équation de la courbe (C) s'écrit

$$u^2(a\Sigma' - \Sigma)^2 + v^2(b\Sigma' - \Sigma)^2 + (a + b)w^2\Sigma'^2 = 0,$$

ou

$$\Sigma'^2(a^2u^2 + b^2v^2 + (a + b)w^2) - 2\Sigma\Sigma'(au^2 + bv^2) + \Sigma^2(u^2 + v^2) = 0.$$

On peut alors mettre Σ' en facteur, et on obtient après un calcul facile

$$\Sigma'(a^2u^2 + b^2v^2 + (a + b)w^2)u^2 + v^2 + (a + b)^2u^2v^2 = 0.$$

L'enveloppe se compose dans ce cas de deux points Σ' et d'une courbe de quatrième classe (1).

c) Pour que les deux points $u^2 + v^2 = 0$ soient conjugués par rapport à Σ, il faut que l'on ait $a = b = 0$. La courbe F se réduit alors à deux coniques ayant pour équations tangentielles

$$v^2w^2 + 2uvw = 0.$$

d) C'est un cas particulier du paragraphe b_1. Revenons aux notations habituelles. Soit $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$ l'équation tangentielle de l'ellipse Σ rapportée à ses axes, l'ensemble des points cycliques a pour équation $u^2 + v^2 = 0$. L'enveloppe est, outre les points cycliques, une courbe de quatrième classe ayant pour équation tangentielle $w^4 - (a^2 + b^2)(w^2 - u^2 + v^2) + (a^2 - b^2)^2u^2v^2 = 0$,
ou, en posant $c^2 = a^2 - b^2$, $w^4 - (a^2 + b^2 - w^2 - u^2 - v^2) + c^2u^2v^2 = 0$.

Cette courbe est l'enveloppe des bissectrices des angles droits circonscrits à l'ellipse. Elle est symétrique par rapport aux deux axes.

Pour la construire, nous écrivons son équation tangentielle de la manière suivante :

$$c^2u^2 - (a^2 - b^2 - w^2)^2 = c^2v^2 - (a^2 - b^2 - w^2)^2 = 4a^2b^2w^2.$$

d'où nous tirons $c^2u^2 - (a^2 - b^2 - w^2) = 2abtw$, $c^2v^2 - (a^2 - b^2 - w^2) = \frac{2ab}{t}w$,

t désignant un paramètre, puis

$$c^2u = w\sqrt{a^2 + b^2 + 2abt}, \qquad c^2v = w\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{t}},$$

et par suite, l'équation d'une tangente à la courbe peut s'écrire

$$(3) \qquad x\sqrt{a^2 + b^2 + 2abt} + y\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{t}} - c^2 = 0,$$

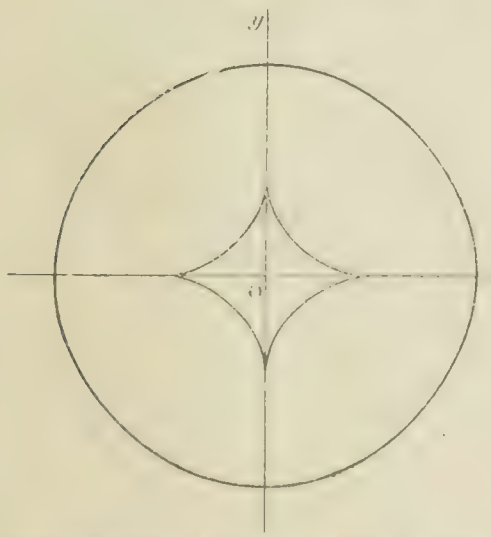
les radicaux ayant des signes arbitraires. Comme la courbe est symétrique par rapport aux deux axes, nous pouvons ne considérer que les signes $+$.

Nous sommes ainsi conduit à chercher l'enveloppe de la droite (3) quand t varie. Dérivons l'équation par rapport à t, nous avons

$$\frac{abx}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2abt}} - \frac{aby}{t^2\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{t}}} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2abt}} = \frac{y}{t^2\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{t}}}.$$

Multiplions le premier rapport haut et bas par $\sqrt{a^2 + b^2 + 2abt}$, le deuxième par $\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{t}}$ et ajoutons terme à terme ; en tenant compte de l'équation (3), nous obtenons

$$x = \frac{-c^2\sqrt{a^2 + b^2 + 2abt}}{a^2 + b^2 + 4abt + a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{c^2t^2\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{t}}}{a^2 + b^2 + 4abt + a^2 + b^2}.$$



ce qui donne les coordonnées d'un point de la courbe en fonction du paramètre t, et il est utile d'observer que la tangente en ce point est fournie par l'équation (3).

Le dénominateur commun à x et à y a ses racines imaginaires ; pour que x et y soient réels, il faut faire varier t de $-\frac{a^2 + b^2}{2ab}$ à $-\frac{2ab}{a^2 + b^2}$ et de 0 à $+\infty$. Dans le premier intervalle, x varie de 0 à $-\sqrt{a^2 + b^2}$ et y de $-\sqrt{a^2 + b^2}$ à 0 ; dans le deuxième x varie de $\frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ à 0 et y de 0 à $-\frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. La branche de courbe relative au premier intervalle rencontre les axes de coordonnées à angle droit ; au contraire la branche de courbe relative au second intervalle touche les axes de coordonnées et admet par suite quatre points de rebroussement.

936 — *Si un triangle varie en restant inscrit dans une conique C, et circonscrit à une autre conique C₁, le cercle circonscrit au triangle reste orthogonal à un cercle fixe et son centre décrit une conique.*

On sait que si l'on considère deux coniques $S = 0$ et $S_1 = 0$, le faisceau de coniques $S + \lambda S_1 = 0$ et l'équation en λ relative à ce faisceau,

$$\Delta + \Theta\lambda + \Theta_1\lambda^2 + \Delta_1\lambda^3 = 0,$$

la condition $\Theta = 0$ exprime que la conique S_1 est circonscrite à une infinité de triangles autopolaires de S : il en correspond un à chaque point de S_1 ; elle exprime aussi que S est inscrite dans une infinité de triangles autopolaires de S_1 : il en correspond un à chaque tangente de S. Cette condition est linéaire par rapport aux coefficients ponctuels de S_1 et linéaire aussi par rapport aux coefficients tangentiels de S.

De même la condition $\Theta^2 - 4\Theta_1\Delta = 0$ exprime que la conique S_1 est circonscrite à une infinité de triangles circonscrits à S : il en correspond un à chaque point de S_1, un à chaque tangente de S. Cette condition est du second degré par rapport aux coefficients ponctuels de S_1 et du second degré aussi par rapport aux coefficients tangentiels de S.

Cela étant rappelé, il est facile de voir qu'il y a une conique Σ et une seule conjuguée par rapport aux triangles qui sont à la fois inscrits dans S et circonscrits à S_1, quand les deux coniques S et S_1 vérifient la condition $\Theta_1^2 - 4\Theta\Delta_1 = 0$, nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi. Il suffit, pour la déterminer, de chercher une conique Σ conjuguée par rapport à l'un des triangles et telle que, par rapport à cette conique, un des sommets d'un second triangle du système considéré soit le pôle du côté opposé.

Il est d'ailleurs facile d'éclaircir complètement ce point. Soit, comme dans la question 918,

$$yz + zx + xy = 0, \qquad avw + buw + cuv = 0,$$

les équations ponctuelle et tangentielle des coniques S et S_1 (C et C₁ de l'énoncé), rapportées à un des triangles indiqués.

La conique Σ étant conjuguée par rapport au triangle de référence a pour équation

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0;$$

nous allons achever de la déterminer en écrivant que S est la conique réciproque de S_1 par rapport à Σ. Pour cela représentons par $\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{1-\lambda}, -c$, les coordonnées d'une tangente quelconque de S_1, les coordonnées de son pole par rapport à la conique Σ sont $\frac{u}{\alpha}, \frac{v}{\beta}, \frac{w}{\gamma}$, ou $\frac{a}{\alpha\lambda}, \frac{b}{\beta(1-\lambda)}, -\frac{c}{\gamma}$, et en exprimant qu'il est sur S quel que soit λ, nous avons $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = -\frac{\gamma}{c}$. La conique Σ a donc pour équation

$$ax^2 + by^2 - cz^2 = 0.$$

Cela posé, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les paramètres des trois côtés du triangle général inscrit dans S et circonscrit à S_1 ; les deux côtés λ_1 et λ_2 se coupent en un point dont les coordonnées sont

$$\frac{1}{a(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}, \qquad \frac{1}{b\lambda_1\lambda_2}, \qquad \frac{1}{c\lambda_1\lambda_2(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}.$$

et la polaire de ce point par rapport à Σ a pour équation

$$\frac{x}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} + \frac{y}{\lambda_1\lambda_2} - \frac{z}{\lambda_1\lambda_2(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} = 0:$$

en écrivant qu'elle coïncide avec le côté λ_3, nous avons

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3) = \frac{a}{a}, \qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{b}{b},$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3) = -\frac{c}{c},$$

ce sont justement les relations qui doivent exister entre $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ (voir les formules (1) du n° 918) ; il en résulte pleinement que la conique Σ, telle qu'elle a été déterminée jouit de la propriété annoncée.

Soit alors

$$\Gamma = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \gamma = 0$$

l'équation, dans un système d'axes rectangulaires, du cercle circonscrit à l'un des triangles envisagés. Pour avoir les relations que vérifient α, β, γ, il nous suffit d'exprimer que le cercle Γ est harmoniquement circonscrit à la conique Σ et qu'il passe par les sommets d'un triangle circonscrit à S_1. La première relation est linéaire entre α, β, γ : elle exprime que le cercle Γ est orthogonal à un cercle fixe ; on sait d'ailleurs que ce cercle fixe est le cercle orthoptique de la conique Σ. La seconde relation est du second degré en α, β, γ ; jointe à la première, elle montre que le centre (α, β) décrit une conique.

Autres solutions. — Nous avons reçu de ce problème deux autres solutions intéressantes qu'il nous paraît utile de publier :

I. — Soit t le paramètre en fonction duquel s'expriment rationnellement les coordonnées d'un point de S. Soient λ, μ, ρ les trois paramètres des sommets du triangle mobile. Ces trois paramètres sont liés par deux relations évidemment symétriques, et telles que si l'on donne ρ par exemple, λ et μ en résultent par la connaissance de $\lambda\mu$ et $\lambda + \mu$. Ces deux relations sont donc linéaires par rapport à $\lambda\mu$, $\lambda + \mu$; il en est de même par rapport à $\lambda\rho$, $\lambda + \rho$. Autrement dit, elles sont linéaires par rapport à l'un quelconque des paramètres λ, μ, ρ et comme elles sont symétriques, ce sont deux relations linéaires entre les fonctions symétriques simples

$$S_1 = \lambda + \mu + \rho, \qquad S_2 = \lambda\mu + \mu\rho + \rho\lambda, \qquad S_3 = \lambda\mu\rho,$$

ce qui revient à dire que S_1 et S_2 peuvent être exprimés linéairement en fonction de S_3 (voir la solution du n° 918)

$$(1) \qquad \begin{cases} S_1 = pS_3 + q, \\ S_2 = p'S_3 + q'. \end{cases}$$

Ceci dit, prenons pour axes les asymptotes de la conique S, et soit $xy = 1$ l'équation de cette conique. Un point quelconque de S sera donné par $x = t$, $y = \frac{1}{t}$.

Un cercle quelconque a une équation de la forme

$$x^2 + kxy + y^2 - \alpha x - \beta y + h - k = 0 ;$$

l'équation aux t des points de rencontre avec S est

$$t^4 - \alpha t^3 + ht^2 - \beta t + 1 = 0 ;$$

exprimons que cette équation a trois racines satisfaisant aux conditions (1). Soit t la quatrième racine, nous aurons

$$\begin{cases} S_1 + t = \alpha, \\ tS_1 + S_2 = h, \\ tS_2 + S_3 = \beta, \\ tS_3 = 1 ; \end{cases} \qquad (1) \begin{cases} S_1 = pS_3 + q, \\ S_2 = p'S_3 + q'. \end{cases}$$

les trois premières équations deviennent, en tenant compte de la dernière

$$\begin{cases} pS_3 + qt = h - p - q', \\ pS_3 + t = \alpha - q, \\ S_3 + q't = \beta - p' ; \end{cases}$$

l'élimination de S_3 et t entre ces trois relations donne

$$\begin{vmatrix} h - p - q' & \alpha - q & \beta - p' \\ p' & p & 1 \\ q & 1 & q' \end{vmatrix} = 0,$$

relation linéaire entre α, β, h ; donc, d'après une propriété connue, le cercle considéré est orthogonal à un cercle fixe.

α et β sont exprimées linéairement en fonction des variables S_3 et t liées par l'équation $tS_3 = 1$ qui est du second degré. Donc α et β sont liées par une équation du second degré. Donc le centre du cercle décrit bien une conique.

Remarque. — Cette propriété peut être considérée comme une généralisation de la question 902, dans laquelle l'auteur a évidemment transformé d'abord par polaires réciproques la figure formée par une conique fixe et un triangle inscrit ayant son centre de gravité au centre de la conique par rapport à un cercle de centre P, puis considéré le cercle inverse par rapport à P du cercle circonscrit au triangle transformé, le module étant égal au rayon du cercle directeur.

L. BICKART, lieutenant d'artillerie à Fontainebleau.

II. — Ecrivons les équations et (C) et (C')

$$(C) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \ldots = 0,$$

$$(C') \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots = 0,$$

et celle d'un cercle variable

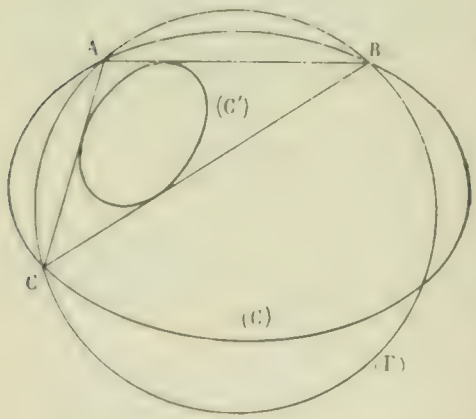
$$(\Gamma) \qquad \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \ldots = 0,$$

ou $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0$.

Soit

$$\Gamma + \lambda C = 0$$

l'équation d'un couple de sécantes communes aux coniques (Γ) et (C). On voit immédiatement que chacun de ces couples est tangent à (C').



Donc si on considère l'équation

$$\Gamma + \lambda C + \mu C' = 0,$$

et si on écrit qu'elle représente deux droites, l'équation en μ que l'on obtient ainsi a une racine double.

Cette équation en μ a déjà une racine nulle. Elle est de la forme

$$P\mu^2 + (Q\lambda + R)\mu^2 + (S\lambda^2 + T\lambda + U)\mu = 0\,;$$

d'où l'on déduit la relation

$$(Q\lambda + R)^2 - 4P(S\lambda^2 + T\lambda + U) = 0,$$

qui doit être vérifiée quand on y remplace λ par les trois valeurs λ_1, λ_2, λ_3, correspondant aux couples de sécantes communes à Γ et C.

On a donc

$$(1) \qquad Q^2 - 4PS = 0,$$

$$(2) \qquad QR - 2PT = 0,$$

$$(3) \qquad R^2 - 4PU = 0.$$

L'équation (1) est indépendante des coefficients de Γ. Elle exprime qu'il existe des triangles inscrits à C et circonscrits à C';

(2) est linéaire et homogène en α, β, γ, δ, ε, φ;

(3) est quadratique et homogène en α, β, γ, δ, ε, φ.

Faisons $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0$. Les coordonnées du centre de Γ sont $-\delta$ et $-\varepsilon$. Eliminons φ entre (2) et (3). Nous aurons une relation du 2e degré en δ, ε. Le lieu du centre de Γ est une conique.

La relation (2) exprime, comme on sait, que Γ est orthogonal à un cercle fixe.

Remarque. — Soit Γ le centre de Γ. Il sera à l'infini si un des sommets du triangle ABC est à l'infini sur C. Ce fait se produit deux fois. Donc le lieu du centre de Γ est une conique. Menons à C deux tangentes parallèles à une asymptote de C. Elles rencontrent C en A et B. La droite AB fait partie de l'ensemble des cercles Γ. A la deuxième asymptote de C correspond une nouvelle droite A'B'. Le point commun à AB et A'B' est le centre du cercle fixe orthogonal aux cercles Γ.

GUITTON, professeur au lycée d'Amiens.

[illegible] par M. H. [illegible], professeur de mathématiques spéciales au lycée de Lille.

[illegible] la note de M. G. [illegible], N° d'Avril 1900.

QUESTIONS PROPOSÉES

997. — On considère une équation du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

dont on désigne les trois racines par α, β, γ.

Trouver un trinome du second degré

$$\theta(x) = px^2 + 2qx + r$$

tel que l'on ait simultanément

$$\theta(\alpha) = \beta, \qquad \theta(\beta) = \gamma, \qquad \theta(\gamma) = \alpha$$

ou

$$\theta(\alpha) = \gamma, \qquad \theta(\beta) = \alpha, \qquad \theta(\gamma) = \beta.$$

998. — Etant donnés une ellipse et trois groupes de quatre points concycliques situés sur elle :

$$A_1, A_2, A_3, A_4\ ; \qquad B_1, B_2, B_3, B_4\ ; \qquad C_1, C_2, C_3, C_4\ ;$$

les cercles circonscrits aux triangles $A_iB_iC_k$, qui ont pour sommets un point de chaque groupe, coupent la conique en des points D_l. On considère les groupes formés par quatre points D_l, qui proviennent de triangles $A_iB_iC_k$ n'ayant pas de sommet commun deux à deux, et on demande de montrer que ces groupes sont concycliques.

B. Cluzeau.

999. — Trouver le lieu des sommets des coniques d'un faisceau ponctuel.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

939. — *Résoudre une équation du quatrième degré sachant que les dérivées première et troisième de l'équation donnée ont une racine commune.*

Soit $f(x) = 0$ l'équation donnée. La dérivée troisième $f'(x)$ est un polynome du premier degré qui admet une seule racine a, et nous supposons que cette racine annule $f'(x)$.

Formons l'équation qui admet pour racines celles de l'équation $f(x) = 0$ diminuées de a. Cette équation est

$$(1) \qquad f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2} f''(a) + \frac{x^3}{6} f'''(a) + \frac{x^4}{24} f^{(4)}(a) = 0.$$

Or, par hypothèse, $f'(a) = f'''(a) = 0$; par suite, l'équation (1) devient

$$f(a) + \frac{x^2}{2} f''(a) + \frac{x^4}{24} f^{(4)}(a) = 0$$

Elle est bicarrée, elle peut donc se résoudre. Connaissant ses racines, on en déduira aisément celles de l'équation proposée.

P. TRIBIER, lycée de Clermont.

Bonnes solutions : MM. Balaban, Pégorier et Pelvoisin.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

922. — *On considère une corde d'une ellipse telle que la perpendiculaire abaissée du pôle de cette corde sur elle passe à une distance donnée du centre de l'ellipse.*

Trouver le lieu du pôle de cette corde et son enveloppe.

La polaire du point $M(\alpha, \beta)$ par rapport à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ a pour équation $\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0$; par suite, la perpendiculaire menée du point M à cette polaire a pour équation

$$\frac{x - \alpha}{\frac{\alpha}{a^2}} = \frac{y - \beta}{\frac{\beta}{b^2}}, \qquad \text{ou} \qquad a^2\beta x - b^2\alpha y - c^2\alpha\beta = 0.$$

Pour que cette droite soit à une distance constante R du centre de l'ellipse, il faut qu'on ait

$$\frac{c^2\alpha\beta}{\sqrt{a^4\beta^2 + b^4\alpha^2}} = R, \qquad \text{ou} \qquad c^4\alpha^2\beta^2 - R^2(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2) = 0.$$

Par suite, le lieu cherché a pour équation

$$c^4x^2y^2 - R^2(b^4x^2 + a^4y^2) = 0.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré symétrique par rapport aux deux axes. Il nous suffira de construire la portion de cette courbe relative aux valeurs positives de x et de y.

Résolvons l'équation de la courbe par rapport à y^2; nous aurons

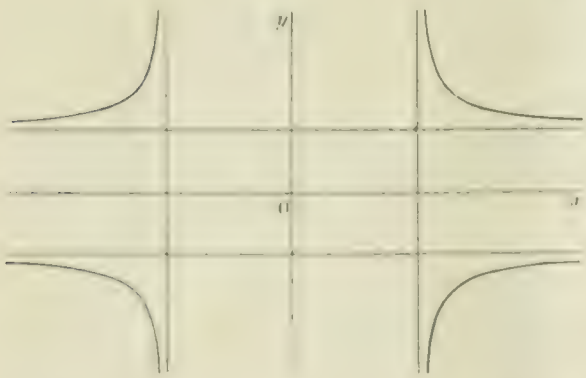
$$y^2 = \frac{R^2b^4x^2}{c^4x^2 - R^2a^4}.$$

Pour que y soit réel, il faut que $c^4x^2 - R^2a^4 > 0$, ou en se bornant aux valeurs positives de x,

$$x > \frac{Ra^2}{c^2}.$$

On peut écrire

$$y^2 = \frac{R^2b^4}{c^4 - \frac{R^2a^4}{x^2}};$$



et l'on voit aussi que lorsque x croît de $\frac{Ra^2}{c^2}$ à $+\infty$, y^2 décroît de $+\infty$ à $\frac{R^2b^4}{c^4}$; par suite la valeur positive de y décroît de $+\infty$ à $\frac{Rb^2}{c^2}$. En achevant par symétrie, on reconnaît que la courbe admet quatre asymptotes ayant pour équations $x = \pm\frac{Ra^2}{c^2}$, $y = \pm\frac{Rb^2}{c^2}$.

Il nous faut maintenant chercher l'enveloppe de la droite

$$(1) \qquad b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0.$$

α et β étant liés par la relation

$$(2) \qquad c^4\alpha^2\beta^2 - R^2(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2) = 0.$$

Conformément à la méthode générale, nous éliminerons α et β entre ces deux équations et la suivante

$$\frac{b^2\alpha}{c^4\alpha\beta^2 - R^2b^4\alpha} = \frac{a^2\beta}{c^4\alpha\beta - R^2a^4\beta},$$

qui peut s'écrire
$$\frac{b^2\alpha x}{c^4\alpha^2\beta^2 - R^2b^4\alpha^2} = \frac{a^2\beta y}{c^4\alpha^2\beta^2 - R^2a^4\beta^2}.$$
ou, en ajoutant les rapports termes à termes et en tenant compte des relations (1) et (2),
$$\frac{b^2\alpha x}{R^2a^4\beta^2} = \frac{a^2\beta y}{R^2b^4\alpha^2} = \frac{a^2b^2}{c^4\alpha^2\beta^2}.$$

On en déduit
$$\alpha^3 = \frac{a^6R^2}{c^4x}, \qquad \beta^3 = \frac{b^6R^2}{c^4y}, \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \frac{a^2R^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}x^{\frac{1}{3}}}, \qquad \beta = \frac{b^2R^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$$
et, en portant ces valeurs de α et de β dans la relation (1), on a
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{c^2}{R}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

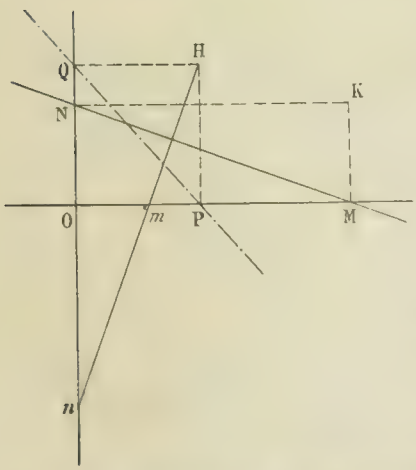
On reconnaît l'équation d'une hypocycloïde à quatre rebroussements, enveloppe d'une droite de longueur constante $\left(\text{et égale à } \frac{c^2}{R}\right)$ dont les extrémités décrivent les axes Ox et Oy.

Ce résultat est facile à vérifier. En effet, soient A et B les points où la droite (1) rencontre les axes; nous avons $OA = \frac{a^2}{\alpha}$, $OB = \frac{b^2}{\beta}$. D'autre part, la relation (1) peut s'écrire
$$\frac{a^4}{\alpha^2} + \frac{b^4}{\beta^2} = \frac{c^4}{R^2}, \qquad \text{on a donc} \qquad \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \frac{c^4}{R^2}, \qquad \text{ou} \qquad AB = \frac{c^2}{R}.$$

CANS, à Versailles.

Bonnes solutions : MM. FONTAINE, lycée Condorcet; MOLLON, pensionnat de Valbonoite, à Saint-Etienne; F. PÉGOMIER, à Toulouse; PELVOISIN.

Solution géométrique. — Soient MN une des cordes considérée, et mn la perpendiculaire abaissée sur cette corde de son pôle H.



Ces deux droites rencontrent, comme on sait, les axes de l'ellipse (E) en des points conjugués par rapport aux foyers de (E), de sorte que l'on a
$$\overline{Om}.\,\overline{OM} = c^2, \qquad \overline{On}.\,\overline{ON} = -c^2.$$

Mais comme la corde mn reste à une distance fixe d du point O,
$$\frac{1}{\overline{Om}^2} + \frac{1}{\overline{On}^2} = \frac{1}{d^2}.$$

On en conclut immédiatement que
$$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = \frac{c^4}{d^2}.$$

La corde MN étant de longueur constante enveloppe une *hypocycloïde à quatre rebroussements.*

D'autre part, les projections P, Q du point H sur les axes de (E) ont respectivement pour polaires les perpendiculaires aux axes MK, NK. Il en résulte que la droite PQ est la polaire de K; et comme le lieu de K est le cercle (C), concentrique à (E), et de rayon $\frac{c^2}{d}$, l'enveloppe de PQ est l'ellipse (E'), polaire réciproque du cercle (C) par rapport à l'ellipse (E). Le lieu de H est une *kreuzcurve*, dont on reconnaît la génération ordinaire au moyen des tangentes à l'ellipse (E').

VASNIER.

---

938. — *Le lieu des points communs à deux coniques semblables ayant un foyer commun fixe O et dont les directrices correspondantes se coupent sous un angle constant en un point fixe A, se compose de deux cercles.*

Prenons des coordonnées rectangulaires, l'origine en O, et OA pour axe des x. Posons $OA = a$, et soit e l'excentricité donnée des coniques.

Les équations des deux coniques de l'énoncé sont

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = e^2 (x - a) \cos \alpha + y \sin \alpha)^2,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = e^2 (x - a) \cos \beta + y \sin \beta)^2,$$

avec la condition

$$(3) \qquad \alpha - \beta = \theta,$$

θ étant l'angle constant sous lequel se coupent les deux directrices.

On aura l'équation du lieu des points de rencontre des coniques (1) et (2) en éliminant α et β entre les équations (1), (2) et (3).

Or, (1) et (2) peuvent s'écrire

$$(x - a) \cos \alpha + y \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{e},$$

$$(x - a) \cos \beta + y \sin \beta = \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{e}.$$

Il y a lieu de considérer deux cas, suivant que les radicaux de chacune de ces équations sont de même signe ou de signes contraires :

1° Si les radicaux sont de même signe, on a

$$(x - a) \cos \alpha + y \sin \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{e},$$

$$(x - a) \cos \beta + y \sin \beta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{e};$$

d'où, en résolvant par rapport à $(x - a)$ et à y,

$$(x - a) \sin (\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{e} (\sin \alpha - \sin \beta),$$

$$y \sin (\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{e} (\cos \beta - \cos \alpha),$$

puis

$$(x - a) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{e} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$y \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{e} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Elevons au carré et ajoutons ; nous aurons, en tenant compte de la relation $\alpha - \beta = \theta$,

$$(x - a)^2 + y^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{x^2 + y^2}{e^2},$$

ou enfin

$$(4) \qquad x^2 + y^2 \left(e^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right) - 2ae^2 x \cos^2 \frac{\theta}{2} + a^2 e^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 0.$$

C'est l'équation d'un cercle.

2° En prenant les radicaux de signes contraires, on a

$$(x - a) \cos \alpha + y \sin \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{e},$$

$$(x - a) \cos \beta + y \sin \beta = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{e}.$$

Un calcul tout à fait semblable au précédent donne

$$(x - a)^2 + y^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{x^2 + y^2}{e^2},$$

ou

$$(5) \qquad (x^2+y^2)(e^2\sin^2\frac{\theta}{2}-1)-2ae^2x\sin^2\frac{\theta}{2}+a^2e^2\sin^2\frac{\theta}{2}=0.$$

Le lieu se compose donc des deux cercles (4) et (5)

Si $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\frac{1}{e}$, le cercle (5) devient la droite $x=\frac{a}{2}$ et le cercle (4) a pour équation

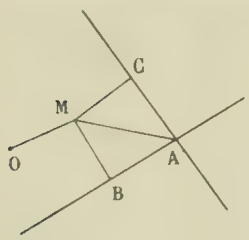
$$(6) \qquad x^2+y^2-\frac{a(e^2-1)}{e^2-2}(2x-a)=0.$$

Si $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\frac{1}{e}$, le cercle (4) devient la droite $x=-\frac{a}{2}$ et le cercle (5) a pour équation (6).

E.-N. BARISIEN.

Bonne solution : M. PELVOISIN.

Solution géométrique. — Soient O le foyer commun aux deux coniques, AB et AC les deux directrices qui se coupent sous l'angle fixe 2θ ou $\pi-2\theta$. Désignons en outre par e l'excentricité commune aux deux coniques, par M un de leurs points communs et par MB et MC les distances de ce point aux deux directrices. Nous avons



$$\frac{MO}{MB}=\frac{MO}{MC}=e;$$

par suite $MB=MC$, et nous voyons que le point M est situé sur l'une des bissectrices de l'angle des deux directrices. Nous avons donc aussi $MB=MA\sin\theta$ ou $MB=MA\cos\theta$, suivant l'angle dans lequel se trouve le point M; par conséquent,

$$\frac{MO}{MA}=e\sin\theta \quad \text{ou} \quad e\cos\theta.$$

Le lieu du point M se compose donc de deux cercles ayant leurs centres sur OA.

PELVOISIN.

Bonnes solutions : MM. P. TRIBIER, lycée de Clermont; VASSIER.

QUESTIONS PROPOSÉES

1000. — Trouver toutes les équations du troisième degré telles que si l'on désigne par α et β les racines de la dérivée par rapport à x, la dérivée par rapport à la variable d'homogénéité prenne, pour $x=\alpha$ et $x=\beta$, les valeurs 3β et 3α.

Trouver la relation qui existe entre les racines de l'une de ces équations et voir ce qu'elle devient quand l'équation envisagée a une racine double.

E. H.

1001. — On donne une hyperbole équilatère rapportée à ses axes et on demande de trouver en fonction d'un seul paramètre l'équation générale des paraboles tangentes en O à Ox et dont les directrices enveloppent l'hyperbole. Trouver

1° le lieu des foyers de ces paraboles;

2° les lieux des projections de l'origine des coordonnées sur la tangente au sommet, sur la corde focale principale, sur la directrice et sur l'axe.

BALLION.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure à l'usage des étudiants des facultés des sciences, par H. Andoyer, maître de conférences et chargé de cours à la faculté des sciences de l'Université de Paris. — Paris, Gauthier-Villars (1900).

L'ouvrage que publie aujourd'hui M. Andoyer était vivement attendu par tous ceux qui s'intéressent à la géométrie analytique supérieure et qui reculent devant la lecture des nombreux mémoires où les éléments de cette vaste doctrine sont épars et isolés les uns des autres. Il avait en quelque sorte été annoncé, préparé, par la publication, il y a deux ans, d'un ouvrage moins didactique et moins étendu, consacré à la théorie des formes et destiné surtout aux candidats à l'agrégation. M. Naud en rendit compte ici-même dans un bel article, clair et détaillé ; il en constata la grande originalité, la rigueur et la belle ordonnance. Cet article qui, un peu modifié, pourrait s'appliquer à l'ouvrage actuel, nous dispense d'entrer dans de trop longs détails aujourd'hui et nous permet de réduire l'article actuel à une indication sommaire des matières que renferme le nouveau volume.

Dans ce volume, l'auteur se propose d'étudier par des procédés algébriques méthodiques et puissants les géométries relatives aux espaces à une et à deux dimensions, celles que l'auteur appelle géométrie binaire et géométrie ternaire. Il se place toujours dans le cas le plus général pour que les considérations développées dans chaque question s'appliquent à tous les cas semblables qui peuvent se présenter. Dans chacune de ces deux géométries générales, les considérations géométriques proprement dites sont précédées par l'étude algébrique des systèmes correspondants : l'introduction précise et nette de l'idée d'invariant, les théorèmes généraux relatifs aux invariants, les formations invariantes générales, puis les applications analytiques aux formes et systèmes de formes les plus simples.

Cet ouvrage, d'une très haute valeur scientifique et d'un intérêt considérable, demande à être lu avec beaucoup de soin et d'attention, tous les calculs étant repris et effectués lentement par l'étudiant ; il est nécessaire en effet qu'il se familiarise complètement avec les notations commodes, mais très générales de l'auteur, ainsi qu'avec ses idées géométriques qui sont le développement systématique de celles de Cayley et qui généralisent absolument, dans une voie spéciale, les idées géométriques ordinaires. Mais que celui qui désire acquérir des connaissances sérieuses en mathématiques n'hésite pas un seul instant à faire l'effort exigé : il en tirera grand profit et se félicitera plus tard d'avoir étudié les leçons d'un tel maître. E. H.

Éléments de la théorie des nombres, par E. Cahen, professeur de mathématiques spéciales au collège Rollin. — Paris, Gauthier-Villars (1900).

L'ouvrage de M. Cahen vient heureusement combler un vide qui existe depuis longtemps dans la littérature mathématique française. Depuis un siècle environ, aucun ouvrage didactique sur la théorie des nombres n'a été publié en France. M. Lucas fit bien une tentative il y a quelques années ; mais il ne put malheureusement conduire son entreprise jusqu'au bout : d'ailleurs, l'originalité de ses méthodes, ses vues toutes particulières sur la question eussent enlevé à son œuvre ce caractère classique que nous aimons à retrouver dans l'ouvrage actuel.

Dans ce premier volume, le seul encore qui ait paru, l'auteur commence par une étude élémentaire des nombres entiers et des nombres fractionnaires ; il poursuit par l'exposé des notions ordinaires sur les congruences par les théorèmes de Fermat et d'Euler, par une étude simple des congruences entières à module premier et par l'application de ces principes aux congruences binomes, à leurs racines primitives et à la théorie des indices qui en découle. Il s'occupe ensuite des congruences à module non premier, des restes des puissances d'un nombre donné par rapport à un module également donné ; puis il expose avec détails la théorie des restes quadratiques et la loi de réciprocité de Legendre.

Le chapitre suivant est consacré aux nombres incommensurables, à la théorie des fractions continues et à ses applications aux nombres algébriques du second degré. La dernière partie, plus d'un tiers du volume, est employée à exposer la théorie des formes quadratiques binaires et de toutes les questions qui s'y rattachent. Que l'on ajoute aux théories précédentes, indiquées toutefois d'une façon trop sommaire, diverses notes intéressantes sur les divers systèmes de numération, les nombres premiers, etc., les fonctions numériques, les nombres entiers imaginaires, et l'on aura un aperçu suffisant des matières déjà traitées.

Le plus bel éloge que nous puissions faire de ce premier volume consiste à dire qu'il est clair, bien ordonné et d'une lecture facile. Nous ajouterons cependant qu'en dehors des connaissances spéciales qu'il apporte au lecteur, il précisera et développera sur bien des points les connaissances algébriques que le lecteur a déjà acquises. E. H.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PAR LE [illegible]

11e Année. N° 5. Février 1901.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES FAUSSES SOLUTIONS DU PROBLÈME DE PONCELET POUR DEUX CONIQUES QUELCONQUES.

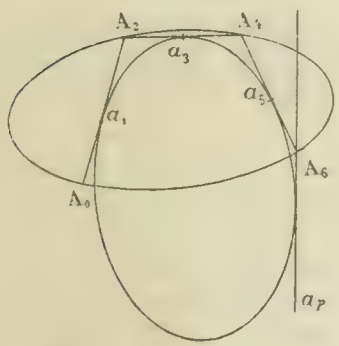
par M. G. Fontené.

Les remarques suivantes sont relatives à la note de M. E. Cahen parue dans la *Revue*, n° de décembre 1900.

1. Etant données deux coniques quelconques U et V, supposons que l'on cherche un polygone de p côtés, p *étant impair*, circonscrit à U et inscrit à V ; nous désignerons les sommets et les côtés successifs par la notation

$$A_0,\ a_1,\ A_2,\ a_3,\ \ldots,\ A_{p-1},\ |\ a_p,\ A_{p+1},\ \ldots\ a_{2p-1}$$

le côté a_p étant opposé au sommet A_0, ... 1° Si l'on part d'un point quelconque A_0 de la conique V pour former le contour ouvert $A_0, a_1, A_2, \ldots, a_{2p-1}, A'_0$, on écrira que A'_0 se confond avec A_0, et l'on obtiendra comme points A_0 quatre points tels que le côté a_p sera une tangente commune aux deux coniques ; le polygone sera replié sur lui-même, A_{p+1} étant en A_{p-1}, ... ; Poncelet indique ces fausses solutions. 2° Si l'on part d'une tangente a_p à la conique U pour former le contour ouvert



$$a_p,\ A_{p+1},\ a_{p+2},\ \ldots,\ a_{2p-1},\ A_0,\ a_1,\ \ldots\ a_p,$$

on écrira que a'_p se confond avec a_p, et l'on obtiendra comme tangentes a_p quatre tangentes telles que le sommet A_0 sera un point commun aux deux coniques. 3° Si les deux coniques satisfont à la condition de fermeture du polygone pour un point de départ quelconque, les fausses solutions que fournissaient les deux méthodes dans le cas général se confondront en quatre solutions limites, A_0 étant un point commun aux deux coniques, a_p étant en même temps une tangente commune.

2. Supposons maintenant que p *est pair*. 1° Si l'on part d'un point A_0 de la conique V pour obtenir le polygone

$$A_0,\ a_1,\ A_2,\ a_3,\ \ldots\ a_{p-1},\ |\ A_p,\ a_{p+1},\ \ldots\ a_{2p-1},$$

on obtiendra comme points A_0 quatre points tels que le sommet A_0 sera un point commun aux deux coniques. On peut utiliser la figure ci-dessus, en supposant $p = 6$, et en négligeant la tangente a_5. 2° Si l'on part d'une tangente a_0 à la conique U pour obtenir le polygone

$$a_0,\ A_1,\ a_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_{p-1},\qquad a_p,\ A_{p+1},\ \ldots,\ A_{2p-1},$$

on obtiendra quatre tangentes a_0 telles que le côté a_p sera une tangente commune aux deux coniques. 3° Si la condition de fermeture du polygone est satisfaite par les deux coniques, les quatre fausses solutions que fournissait la première méthode dans le cas général se réduisent à deux solutions limites,

la diagonale $A A_1$ étant une corde commune aux deux coniques, et un fait analogue a lieu pour les quatre fausses solutions fournies par la seconde méthode : les deux cordes sont naturellement celles dont le point d'intersection appartient à toutes les diagonales joignant les sommets opposés du polygone mobile, etc. Pour $p = 4$, on peut prendre un cercle U ayant son centre sur un cercle V.

SUR LE FAISCEAU DES HYPERBOLES ÉQUILATÈRES CIRCONSCRITES A UN TRIANGLE

Par **M. O.**

Les coefficients de l'équation de l'hyperbole équilatère passant par quatre points donnés résultent d'un système de quatre équations linéaires. Si ce système est déterminé il y a une solution ; s'il ne l'est pas il y en a une infinité. Si donc on constate que par quatre points il passe plus d'une hyperbole équilatère, il en passe une infinité.

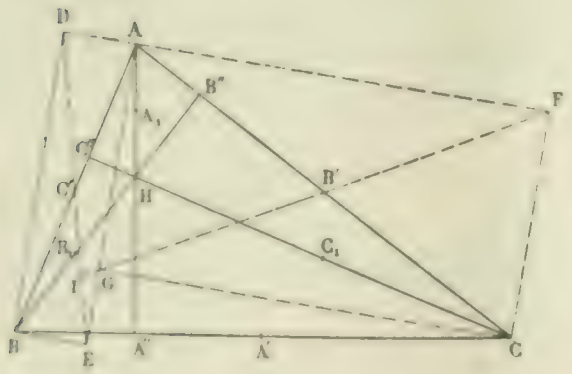
Chaque côté d'un triangle ABC joint à la hauteur correspondante constitue une hyperbole équilatère dégénérée passant par les trois sommets et l'orthocentre H. Par suite, en vertu de la remarque précédente, il y aura une infinité d'hyperboles équilatères passant par ces quatre points. Autrement dit, *Les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle passent toutes par l'orthocentre de ce triangle.*

Cherchons le lieu des centres I de ces hyperboles.

Nous en connaissons immédiatement neuf points : les pieds A'', B'', C'' des hauteurs correspondant aux trois hyperboles dégénérées dont il vient d'être question, et les milieux des distances des quatre points A, B, C, H pris deux à deux, c'est-à-dire les milieux A', B', C' des côtés, A_1, B_1, C_1 des distances de l'orthocentre H aux trois sommets.

Pour déterminer la nature de ce lieu, nous nous appuierons sur ce théorème bien connu, d'une démonstration d'ailleurs immédiate : *Si, sur une corde d'une hyperbole prise pour diagonale, on construit un parallélogramme ayant ses côtés parallèles aux asymptotes, la seconde diagonale de ce parallélogramme passe par le centre de l'hyperbole.*

Donnons-nous arbitrairement les directions rectangulaires AF et AG des asymptotes d'une des hyperboles du faisceau. Si nous construisons les rectangles ADBE et AFCG ayant ces droites pour côtés, et les droites AB et AC pour diagonales, nous voyons, d'après le théorème ci-dessus, que le centre de l'hyperbole correspondante est le point de rencontre I de DE et de FG. Or, ces droites passent respectivement par les milieux C' et B' de AB et AC, qui sont des points fixes. D'autre part,



$$\widehat{BIC} = \widehat{DIA} + \widehat{IGA} = \widehat{BAE} + \widehat{CAG} = \widehat{BAC},$$

qui est constant. Donc le *lieu du point* I *est un cercle*, et par suite, les neuf points reconnus plus haut comme appartenant au lieu sont sur ce cercle. On retrouve incidemment ainsi le célèbre théorème d'Euler.

Nous avons vu que le centre est en un des points A'', B'', C'' lorsque les directions asymptotiques sont celles d'un des côtés du triangle et de la hauteur correspondante. Voyons de même quelles sont les directions asymptotiques qui donnent le centre en un des points A', B', C' ou A_1, B_1, C_1.

Pour que le centre I vienne en A′ il faut que B′F se confonde avec B′A′, c'est-à-dire soit parallèle à AB ; autrement dit, que

$$\widehat{B'FC} = \widehat{BAG},$$

ou

$$\widehat{B'AG} = \widehat{BAG},$$

c'est-à-dire que AG soit bissectrice de l'angle BAC. Par suite, *le centre coïncide avec le milieu d'un côté lorsque les directions asymptotiques sont celles des bissectrices de l'angle opposé.*

Pour que le centre I vienne en A_1, il faut que B′F se confonde avec $B'A_1$ c'est-à-dire soit parallèle à CC″ ; autrement dit, *le point* G *étant alors au-dessus de* CC″, que

$$\widehat{B'GC} = \widehat{GCH},$$

ou

$$\widehat{B'CG} = \widehat{GCH},$$

c'est-à-dire que CG soit bissectrice de l'angle ACH. Par suite, *le centre coïncide avec le milieu de la distance de l'orthocentre à un des sommets lorsque les directions asymptotiques sont celles des bissectrices des angles que les côtés issus de ce sommet font avec les hauteurs adjacentes non issues de ce sommet.*

D'après ce qui précède, les trois sommets d'un triangle, l'orthocentre et les points à l'infini dans deux directions rectangulaires quelconques sont six points d'une même conique. Numérotant ces points de 1 à 6 dans un ordre arbitraire, et appliquant le théorème de Pascal, à savoir que les couples de droites 1-2 et 4-5, 2-3 et 5-6, 3-4 et 6-1 se coupent en des points en ligne droite, on obtient autant de propriétés du triangle.

Plaçons, par exemple, les numéros 1 et 2 aux sommets B et C, 4 au sommet A, 5 à l'orthocentre H, 3 et 6 en deux points à l'infini dans deux directions rectangulaires quelconques. Nous avons alors ce théorème : *Si par les sommets* B *et* C *on mène deux droites rectangulaires quelconques, qu'on abaisse du sommet* A *une perpendiculaire sur une de ces droites, de l'orthocentre* H *une perpendiculaire sur l'autre, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite avec le pied de la hauteur* AH *sur* BC.

Nous laissons au lecteur le soin de former les énoncés correspondant à d'autres modes de répartition des numéros de 1 à 6. La démonstration directe des théorèmes ainsi obtenus peut constituer d'utiles exercices de géométrie élémentaire.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Concours de 1900).

Mathématiques.

942. — I. — *Dans le plan* (P) *d'une section plane d'une surface* (E) *pour trouver les normales à la section issues d'un point* O, *on peut employer la méthode suivante : couper* (E) *par une sphère* (S), *et déterminer le rayon* r *de la sphère de façon que le plan* (P) *soit tangent au cône* (C) *qui a pour sommet le point* O *et pour directrice l'intersection* (E, S). *La génératrice de contact* OG *est normale à la section plane au point* G *où elle rencontre la directrice* (E, S) *du cône* (C).

Justifier cette méthode.

II. — *1re Application.* — *On coupe l'ellipsoïde* (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ *par le plan* (P) $ux + vy + wz = 0$. *Sur le diamètre perpendiculaire on porte à partir du centre une longueur* OM *dont le carré soit moyenne harmonique entre les carrés des demi-axes* α *et* β *de la section :* $\frac{2}{OM^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$.

— *Lieu du point* M, *quand* (P) *pivote autour du point* O.

III. — *2e Application.* — *Même problème en remplaçant la longueur* OM *par la longueur* ON *définie*

de la formule : $\frac{1}{ON^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$. — *Étudier la forme du lieu du point* N, *et celles des sections parallèles aux trois plans des cônes donnés.*

On conservera les notations indiquées.

I. Coupons la surface (E) par une sphère quelconque ayant son centre au point O et considérons les sections faites par le plan (P) dans la sphère et dans la surface.

Ces deux lignes se coupent en divers points A, B, C, D, ..., qu'il suffit de joindre au point O pour avoir les génératrices du cône projetant de ce point la ligne d'intersection des deux surfaces et qui sont dans ce plan (P). Quand deux de ces points, A et B par exemple, viennent se confondre en un point G, la droite AB devient tangente en G à l'intersection des deux surfaces et à leurs sections par le plan (P), et la droite OG est perpendiculaire sur AB. Comme d'autre part le cône projetant est tangent au plan (P) le long de OG, il en résulte bien qu'une génératrice de contact d'un pareil cône avec le plan (P) est une normale à la section de la surface (E) abaissée du point O.

Réciproquement, si on prend pour rayon de la sphère la longueur de l'une des normales menées du point O à la section, la tangente à cette section au pied de la normale est une tangente commune à la sphère et à la surface (E) et par suite, le plan (P), qui projette cette droite du point O, est tangent au cône projetant l'intersection des deux surfaces.

II. Cela posé, soit $x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0$ l'équation d'une sphère quelconque concentrique à l'ellipsoïde donné. Le cône qui projette de l'origine l'intersection des deux surfaces, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\rho^2} = 0,$$

ou

$$\frac{\rho^2 - a^2}{a^2} x^2 + \frac{\rho^2 - b^2}{b^2} y^2 + \frac{\rho^2 - c^2}{c^2} z^2 = 0.$$

En exprimant qu'il est tangent au plan $ux + vy + wz = 0$, nous obtenons une équation qui donne les longueurs des normales à la section abaissée du point O, c'est-à-dire les longueurs des demi-axes de cette section. Cette équation est

$$\frac{a^2u^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{b^2v^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{c^2w^2}{\rho^2 - c^2} = 0.$$

ou

$$\rho^4(u^2 + v^2 + w^2) - \rho^2(b^2c^2u^2 + c^2a^2v^2 + a^2b^2w^2) + a^2b^2c^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Elle donne

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{a^2b^2 + c^2a^2 + b^2a^2 + c^2v^2 + c^2a^2 + b^2w^2}{a^2b^2c^2(u^2 + v^2 + w^2)}.$$

Or, en désignant par x, y, z les coordonnées d'un point du lieu, nous avons $\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et $\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z}$. L'équation du lieu est donc

$$\frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{a^2b^2 + c^2a^2 + b^2a^2 + c^2y^2 + c^2a^2 + b^2z^2}{a^2b^2c^2(x^2 + y^2 + z^2)};$$

elle se décompose en deux

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

et

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 2.$$

La première représente le cône isotrope et s'explique de la façon suivante : quand le plan est tangent au cône isotrope, l'un des axes de la section a une longueur nulle, $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ est infini, par

suite OM est nul, et l'on doit porter sur la normale au plan, c'est-à-dire sur la génératrice de contact avec le cône isotrope, une longueur nulle ; on obtient ainsi tous les points de cette génératrice et l'on voit que le lieu du point M est le cône isotrope lui-même.

La deuxième représente un ellipsoïde concentrique à l'ellipsoïde proposé et ayant mêmes directions d'axes que lui ; c'est le vrai lieu. Elle peut encore s'écrire

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)(x^2+y^2+z^2)-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=2,$$

et, sous cette forme, elle montre que les plans cycliques de cet ellipsoïde sont les mêmes que ceux de l'ellipsoïde proposé.

III. La relation $\frac{1}{\overline{ON}}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}$ se transforme successivement en $\frac{1}{\overline{ON}^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{2}{\alpha\beta}$, puis

$$\frac{4}{\alpha^2\beta^2}=\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\overline{ON}^2}\right)^2.$$

Or l'équation en ρ^2 que nous avons trouvée dans la deuxième partie, nous donne

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\Sigma a^2(b^2+c^2)u^2}{a^2b^2c^2\Sigma u^2}$$

et

$$\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{\Sigma a^2u^2}{a^2b^2c^2\Sigma u^2};$$

par conséquent, en appelant aussi x, y, z les coordonnées du point N et remarquant que u, v, w sont proportionnels à x, y, z, nous avons de suite l'équation du lieu

$$\frac{4\Sigma a^2x^2}{a^2b^2c^2\Sigma x^2}=\left[\frac{\Sigma a^2(b^2+c^2)x^2}{a^2b^2c^2\Sigma x^2}-\frac{1}{\Sigma x^2}\right]^2.$$

Cette équation se décompose encore en $x^2+y^2+z^2=0$, représentant un lieu exceptionnel qui s'introduit pour une raison analogue à celle donnée antérieurement, et en

$$(2)\qquad \left[\Sigma\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)x^2-1\right]^2-4\frac{\Sigma x^2\Sigma a^2x^2}{a^2b^2c^2}=0.$$

Celle-ci représente le vrai lieu.

Il est évident, d'après les calculs que nous avons faits, que l'équation (2) représente aussi le lieu qui convient à la relation $\frac{1}{\overline{ON'}}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$. Dans le premier cas, on a $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\overline{ON}^2}=\frac{2}{\alpha\beta}$; dans le second, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\overline{ON}^2}=-\frac{2}{\alpha\beta}$.

La surface se compose de deux nappes ayant respectivement pour équations

$$\Sigma\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)x^2-1=\frac{2\sqrt{\Sigma x^2\Sigma a^2x^2}}{abc}$$

et

$$\Sigma\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)x^2-1=-\frac{2\sqrt{\Sigma x^2\Sigma a^2x^2}}{abc}.$$

La première nappe, lieu du point N, est extérieure à l'ellipsoïde $\Sigma\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)x^2-1=0$; la seconde, lieu du point N', est intérieure au même ellipsoïde, elle n'a pas de directions asymptotiques. Au contraire, la première nappe a pour directions asymptotiques celles qui correspondent à $x=0$, ce sont les normales aux plans cycliques. Dès lors, cette nappe s'allonge en quatre fuseaux infinis entourant ces deux normales. Nous pouvons donc prévoir que pour des plans assez éloignés et parallèles au plan des xy ou au plan des yz, les sections se réduiront à deux ovales symétriques l'un de l'autre et de

plus en plus éloignés du centre de la section ; et que, pour des plans assez éloignés et parallèles au plan des xz, les sections deviendront imaginaires.

Il nous reste à justifier tout ce que nous venons de dire et à étudier d'une façon précise les formes des diverses sections.

Si nous développons l'équation (2) nous obtenons

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)x^4-\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^4+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^4$$
$$-2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)y^2z^2+2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2x^2+2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2y^2$$
$$-2x^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-2y^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)-2z^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+1=0.$$

Supposons, comme habituellement, $a>b>c$ et posons

$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=-\frac{1}{a_1^2},\qquad \frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b_1^2},\qquad \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=-\frac{1}{c_1^2},$$

puis

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a_1^2},\qquad \frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b_1^2},\qquad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c_1^2}.$$

l'écriture de l'équation (2) se simplifiera beaucoup et nous aurons

$$\frac{x^4}{a_1^4}+\frac{y^4}{b_1^4}+\frac{z^4}{c_1^4}-\frac{2y^2z^2}{b_1^2c_1^2}-\frac{2z^2x^2}{c_1^2a_1^2}+\frac{2x^2y^2}{a_1^2b_1^2}-\frac{2x^2}{a_1^2}-\frac{2y^2}{b_1^2}-\frac{2z^2}{c_1^2}+1=0.$$

Les directions asymptotiques sont fournies par l'équation

$$\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}+\frac{z^4}{c^4}+\frac{2y^2z^2}{b^2c^2}-\frac{2z^2x^2}{c^2a^2}+\frac{2x^2y^2}{a^2b^2}=0$$

ou

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2-4\frac{x^2z^2}{a^2c^2}=0.$$

Il est visible maintenant que le cône des directions asymptotiques se décompose en quatre plans imaginaires conjugués deux à deux

$$\frac{x}{a_1}+\frac{z}{c_1}\pm\frac{iy}{b_1}=0,\qquad \frac{x}{a_1}-\frac{z}{c_1}\pm\frac{iy}{b_1}=0.$$

Il y a deux directions asymptotiques réelles seulement et ces directions sont doubles ; ce sont les deux directions $\frac{x}{a_1}\pm\frac{z}{c_1}=0$ du plan $y=0$; et elles ont pour paramètres directeurs $a_1, 0, c_1$ et $a_1, 0, -c_1$, et il est facile de vérifier qu'elles sont perpendiculaires aux deux plans cycliques de l'ellipsoïde donné.

Proposons-nous d'étudier maintenant les sections faites par des plans parallèles au plan des xy, $z=h$. Elles ont pour équation générale

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2-2\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{h^2}{c^2}+\frac{a^2}{a_1^2}\right)+2\frac{y^2}{b_1^2}\left(\frac{h^2}{c^2}-\frac{b^2}{b_1^2}\right)+\frac{h^4}{c^4}-2\frac{h^2}{c^2}+1=0;$$

nous savons donc qu'elles ont toutes les mêmes directions asymptotiques, doubles et imaginaires, et qu'elles ont en outre les axes Ox_1 et Oy_1 pour axes de symétrie. Étudions les sommets de ces lignes. Ceux qui sont situés sur Ox ont pour abscisses les racines de l'équation

$$\frac{x^4}{a^4}-\frac{2x^2}{a^2}\left(\frac{h^2}{c^2}+\frac{a^2}{a_1^2}\right)+\frac{h^4}{c^4}-\frac{2h^2}{c^2}+1=0$$

Cette équation, regardée comme étant du second degré en x^2, a toujours ses racines réelles ; il est facile de le vérifier. La somme de ces deux nombres est toujours positive et croissante ; le produit est

positif quand h^2 varie de 0 à $\alpha^2 c_1^2$, négatif quand h^2 varie de αc_1^2 à $\beta^2 c_1^2$, et positif ensuite ; ici, α^2 et β^2 désignent les deux racines de l'équation $X^2 - \frac{2c_1^2}{c_2^2} X + 1 = 0$, et il est facile de voir que α^2 est plus petit que 1 et β^2 plus grand que 1. Donc, quand h varie de 0 à αc_1, les deux valeurs de x^2 sont réelles et positives, la plus petite diminue, l'autre augmente, et la première devient nulle pour $h = \alpha c_1$; quand h varie de αc_1 à βc_1, une seule des valeurs de x^2 reste positive, et elle continue à croître ; enfin, quand h varie de βc_1 à $+\infty$, l'autre valeur de x^2 redevient positive aussi et elles croissent toutes deux.

Les sommets situés sur Oy ont pour ordonnées les racines de l'équation

$$\frac{y^4}{b_1^4} + \frac{2y^2}{b_1^2}\left(\frac{h^2}{c^2} - \frac{b_1^2}{b_2^2}\right) + \frac{h^4}{c^4} - \frac{2h^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Il est facile de vérifier encore que cette équation, regardée comme étant du second degré en y^2, a toujours ses racines réelles ; ceci résulte de ce que $\frac{c_1^2}{c_2^2} > \frac{b_1}{b^2}$ ou $\frac{1}{b_2 c_2^2} > \frac{1}{c_1 b_1^2}$.

Le produit des racines présente les mêmes variations de signes que dans le cas précédent ; quant à la somme, elle est d'abord positive, puis elle cesse de l'être à partir de $h = \frac{b_1 c_1}{b_2}$; cette valeur de h est d'ailleurs comprise entre αc_1 et βc_1. Les deux valeurs de y^2 sont donc réelles et positives quand h varie de 0 à αc_1 ; pour $h = \alpha c_1$, la plus petite devient nulle. Quand h varie de αc_1 à βc_1, une seule reste réelle et positive, et elle devient nulle pour $h = \beta c_1$. Ensuite, les deux valeurs de y^2 sont négatives.

Pour compléter cette étude par les sommets, il faut maintenant discuter rapidement l'équation qui relie x à y. Dans le but d'abréger cette rédaction déjà longue, nous ne le ferons que dans un cas, dans le cas où h est compris entre 0 et αc_1, c'est-à-dire quand la courbe a deux sommets sur chacun des demi-axes positifs. Posons alors $\frac{x^2}{a_1^2} = u$ et $\frac{y^2}{b_1^2} = v$, l'équation de la section se transformera en

$$(u+v)^2 - 2u\left(\frac{h^2}{c_1^2} + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) - 2v\left(\frac{b_1^2}{b_2^2} - \frac{h^2}{c^2}\right) + \frac{h^4}{c^4} - \frac{2h^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Elle représente alors une parabole dont l'axe est parallèle à la seconde bissectrice des axes Ou et Ov et qui coupe chacun de ces axes en deux points situés sur la partie positive.

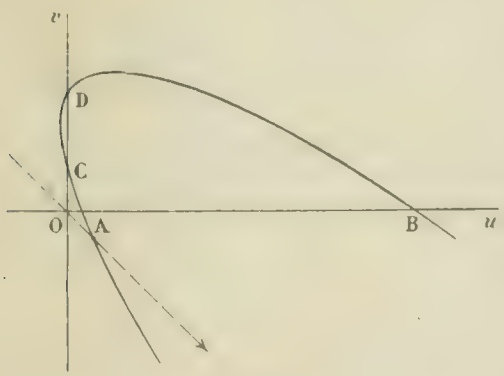


Fig. 1

Il est facile de vérifier en outre que cette ligne rencontre le diamètre $u + v = 0$ en un point d'abscisse positive ; par conséquent elle occupe la position figurée ci-contre. Les seuls arcs utiles sont ceux sur lesquels u et v sont tous deux positifs ; ce sont donc les arcs AC et BD. Au point de vue de la discussion des deux équations bicarrées en x et en y, il faut encore voir si le coefficient angulaire de la tangente en D est positif ou négatif. On reconnaît facilement que dans le cas actuel il est positif ; pour abréger, nous omettrons ce calcul, qui est facile.

Soient alors x_0 et x_1 les abscisses des deux sommets de la section situés sur Ox, y_0 et y_1 les ordonnées de ceux qui sont sur Oy et y_2 la valeur de y qui correspond à la plus haute valeur de x rela-

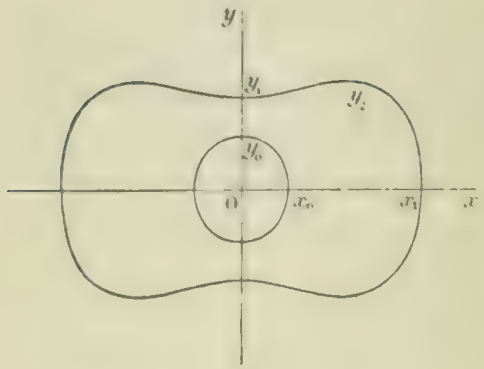


Fig. 2

tive à la parabole. Quand x varie de 0 à x_0 les quatre valeurs de y sont réelles ; de x_0 à x_1, il n'y en a que deux, et enfin, au delà de x_1, il n'y en a pas. Quand y varie de 0 à y_0, les quatre valeurs de x sont réelles ; de y_0 à y_1, il n'y en a que deux ; de y_1 à y_2, elles sont toutes réelles encore, et enfin, au delà de y_2, il n'y en a plus. La courbe totale se compose donc de deux courbes fermées extérieures l'une à l'autre : la courbe intérieure est un ovale ; elle n'est pas sur la nappe utile de la surface ; la courbe extérieure présente des points d'inflexion (*fig.* 2).

Pour $h = \alpha c_1$, l'ovale intérieur se réduit à un point.

Quand h varie de αc_1 à βc_1, il n'y a pas d'ovale intérieur, la ligne extérieure garde la forme générale.

Pour $h = \beta c_1$, les deux sommets situés sur Oy viennent se confondre avec le point O et il y a un point double à l'origine (*fig.* 3).

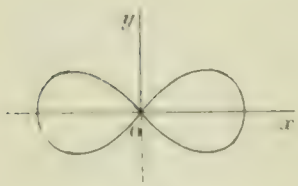


Fig. 3

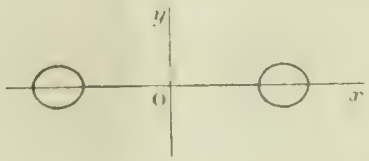


Fig. 4

Enfin, quand h est supérieur à βc_1, la courbe se dédouble en deux boucles symétriques l'une de l'autre par rapport à Oy (*fig.* 4).

Nous étudierions de la même façon les sections parallèles au plan des yz.

Voyons maintenant les sections parallèles au plan des zx. En désignant par $y = k$ un plan quelconque parallèle au plan des xz, nous avons pour équation de la projection de cette section sur le plan des zx

$$\left(\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2}\right)^2 - \frac{2x^2}{a}\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} - \frac{k^2}{b_2^2}\right) - \frac{2z^2}{c}\left(\frac{c}{c} - \frac{k^2}{b^2}\right) + \frac{k^4}{b^4} - \frac{2k^2}{b_2^2} + 1 = 0.$$

Cette équation nous montre d'abord que toutes ces lignes ont les mêmes directions asymptotiques, doubles et réelles, $\frac{x}{a_1} = \frac{z}{c_1}$, et que de plus elles admettent les axes des x et des z comme axes de symétrie. En annulant le terme constant de cette équation, nous obtenons une équation bicarrée en $\frac{k}{b}$ qui a ses quatre racines réelles ; les deux valeurs positives de k ainsi obtenues peuvent se représenter par $\alpha' b_1$ et βb_1, α' étant plus petit que 1 et β plus grand : pour chacune de ces valeurs, la courbe a un point double à l'origine, isolé pour la première, et ordinaire pour la seconde. Enfin, il est évident que, pour des valeurs suffisamment grandes de k, la courbe devient imaginaire.

Les asymptotes ont pour équations

$$\frac{x}{a_1} \pm \frac{z}{c_1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{a} + \frac{c_1}{c}\right) - \frac{k^2}{b}};$$

elles forment un losange ayant pour centre le point O, quand k^2 est moindre que $k_0^2 = \frac{b_1^2}{2}\left(\frac{a_1}{a} + \frac{c_1}{c}\right)$; elles sont deux à deux confondues pour $k = k_0$ et imaginaires, pour $k > k_0$.

Or, pour $k = k_0$, les coefficients de $\frac{x^2}{a_1^2}$ et $\frac{z^2}{c_1^2}$ ont une somme nulle ; par conséquent, l'équation prend la forme

$$Q^2 - 2\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} - \frac{k_0^2}{b_1^2}\right)Q + \frac{k_0^4}{b_1^4} - \frac{2k_0^2}{b_2^2} + 1 = 0,$$

où Q désigne la quantité $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2}$; il est facile de vérifier que ce trinome est un carré parfait ; par suite, pour $k = k_0$, la ligne se réduit à une hyperbole double

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} - \frac{c_1^2}{c_2^2}\right).$$

Si l'on a $k > k_0$, c'est-à-dire si $k^2 = k_0^2 + k_1^2$, le premier membre devient

$$\left[\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} - \frac{c_1^2}{c_2^2}\right)\right]^2 + \frac{2k_1^2}{b_2^2}\left(\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2}\right) + \Delta T,$$

en désignant par ΔT l'accroissement du trinome bicarré à partir de $k^2 = k_0^2$ (on a $\Delta k^2 = k_1^2$; cet accroissement est positif, puisque k_0^2 dépasse la plus grande racine du trinome. Donc la courbe est imaginaire.

Il résulte encore des considérations précédentes que les deux plans $y = \pm k_0$ touchent chacun la surface en tous les points d'une hyperbole et qu'elle est comprise tout entière entre ces deux plans. Il existe aussi deux plans parallèles à chacun des autres plans de coordonnées et tangents chacun à la surface tout le long d'une conique ; seulement ces deux plans sont imaginaires. Les huit points de rencontre de ces six plans trois à trois sont des points doubles de la surface ; ils sont évidemment imaginaires.

Etudions maintenant les sommets de la section. Ceux qui sont situés sur Ox ont pour abscisses les racines de l'équation bicarrée

$$\frac{x^4}{a_1^4} - \frac{2x^2}{a_1^2}\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} - \frac{k^2}{b_1^2}\right) + \frac{k^4}{b_1^4} - \frac{2k^2}{b_2^2} + 1 = 0.$$

Tant que k est inférieur à $\alpha' b_1$, les deux valeurs de x^2 sont réelles et positives ; quand k est compris entre $\alpha' b_1$ et $\beta' b_1$, une seule valeur de x^2 reste positive.

$(0 < k < \alpha' b_1)$

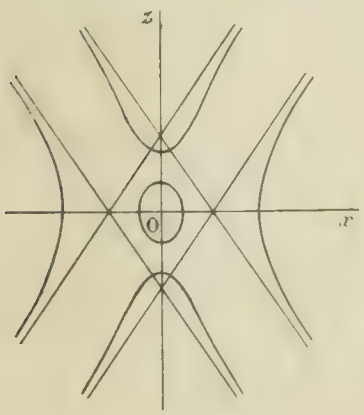


Fig. 5

Si $\frac{a_1^2}{a_2^2}$ est plus grande que $\frac{c_1^2}{c_2^2}$, les deux valeurs de x^2 redeviennent réelles et positives, lorsque k augmente de $\beta' b_1$ jusqu'à k_0 ; pour $k = k_0$, elles se confondent, et l'hyperbole limite a alors ses sommets sur Ox. Si $\frac{a_1^2}{a_2^2}$ est moindre que $\frac{c_1^2}{c_2^2}$, les valeurs de x^2 cessent d'être positives avant $k = k_0$, l'hyperbole a ses sommets sur Oz, et il résultera de ce qui suit que les sommets de la section qui sont sur Ox sont imaginaires à partir de $k = \beta' b_1$.

Les sommets qui sont situés sur Oz ont pour cotes les racines de l'équation

$$\frac{z^4}{c_1^4} - \frac{2z^2}{c_1^2}\left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{k^2}{b_1^2}\right) + \frac{k^4}{b_1^4} - \frac{2k^2}{b_2^2} + 1 = 0.$$

De même que précédemment, on voit que si k est inférieur à $\alpha' b_1$, les deux valeurs de z^2 sont réelles et positives ; quand k varie de $\alpha' b_1$ à $\beta' b_1$ une seule valeur

de z^2 reste positive. Enfin, au delà de $\beta' b_1$, jusqu'à k_0, les résultats sont inverses des précédents.

$\alpha b_1 < k < \beta b_1$

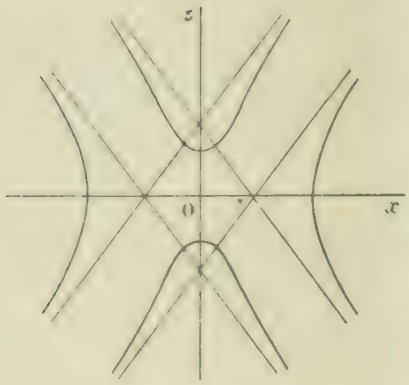


Fig. 6

$\alpha k = \beta' b_1$

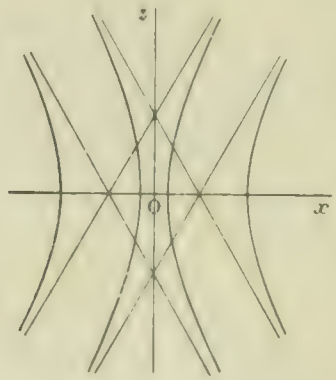


Fig. 7

Remarquons en outre que les asymptotes de chaque couple sont le plus éloignées possible pour $k = 0$, et qu'elles se rapprochent graduellement quand k augmente de 0 à k_0. Nous pouvons alors, en nous aidant de quelques remarques évidentes, tracer les lignes qui viennent d'être étudiées.

$\beta b_1 < k < k_0$

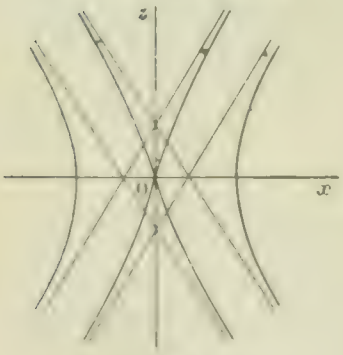


Fig. 8

$k = k_0$

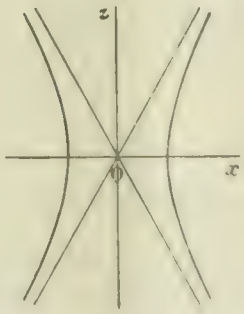


Fig. 9

L'ovale intérieur appartient à la nappe de la surface qui n'est pas à considérer. Il se réduit à un point, pour $k = \alpha' b_1$ et disparaît ensuite.

On obtiendra approximativement les formes qui correspondent à $\frac{a'}{a^2} < \frac{c'}{c^2}$, c'est-à-dire à $b^2 > ac$, en faisant tourner les figures précédentes de 90° autour du point O.

Physique.

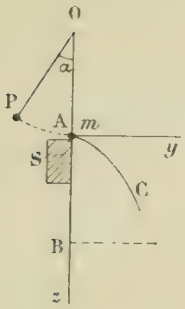
943 — *Un pendule* OP *dont la durée des petites oscillations est* T *est écarté de la verticale d'un angle* α *et abandonné à lui-même ; au point le plus bas de sa course,* A, *la masse* P *chasse un mobile* m, *posé sur un support* S, *avec une vitesse* V *égale à celle de* P *avant le choc.*

On demande l'équation de la courbe C *décrite par le mobile après le choc rapportée aux axes horizontal* Ay *et vertical* Az.

Application numérique : $\alpha = 60°$, $T = \frac{1}{3}$ *de seconde*, $g = 981$ (C. G. S.), $\pi = 3.14$.

Calculer l'ordonnée y *de la courbe* C *pour* $z = AB = 1^m$.

La durée T permet de calculer la longueur du pendule. De $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, on tire $l = \frac{1}{\pi^2} gT^2$.



La vitesse V est donnée par $V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$ ou, en remplaçant l, $V = \frac{gT}{\pi}\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$.

L'équation de la courbe résulte de l'élimination de t entre

$$y = Vt \qquad \text{et} \qquad z = \frac{1}{2}gt^2.$$

Elle est
$$y^2 = \frac{2V^2}{g}z.$$

ou, en remplaçant V par sa valeur,

$$y^2 = 4\frac{gT^2}{\pi^2}(1-\cos\alpha)z.$$

Application numérique : $$y^2 = 4 \times \frac{981 \times \frac{1}{9}}{3{,}14^2}\left(1-\frac{1}{2}\right)z = \frac{109}{4{,}9298}z = 22{,}11\,z.$$

Pour $z = 100^{\text{cm}}$, on a $y^2 = 2211$, $y = 47^{\text{cm}}$.

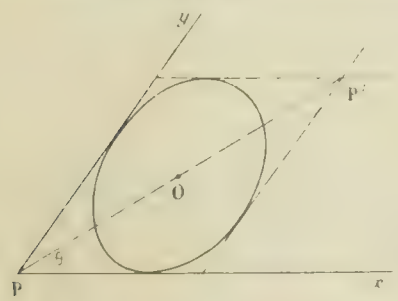
(M. J.-D. Dufaut a envoyé une solution exacte en principe mais avec une faute de calcul.)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

935. — *On peut mener à une conique à centre quatre tangentes dont les segments limités aux deux tangentes menées d'un point à cette conique ont une longueur donnée $2l$; ces quatre tangentes sont tangentes à un cercle qui a son centre au point symétrique du point envisagé par rapport au centre de la conique.*

Prenons pour axes les deux tangentes menées de P à la conique donnée.

Soient α et β les coordonnées de P'. Les parallèles aux axes de coordonnées menées par P' sont évidemment tangentes à la conique. L'équation tangentielle de cette dernière est donc de la forme



$$(1) \qquad 2huv = w(u\alpha + v\beta + w).$$

Or la condition pour que le segment de la droite $ux + vy + w = 0$, compris entre les axes de coordonnées, ait une longueur $2l$ est

$$(2) \qquad 4l^2u^2v^2 = w^2(u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta).$$

Si l'on porte dans (2) la valeur de $2uv$ tirée de (1), et qu'on divise par le facteur w^2 qui correspond aux tangentes Px, Py, on a

$$l^2(u\alpha + v\beta + w)^2 = h^2(u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta),$$

équation tangentielle d'un cercle de centre $P'(\alpha, \beta)$, et de rayon $\rho = \frac{h\sin\theta}{l}$, ce qui démontre la proposition.

Remarque. — Si l'on traite la question en prenant pour axes de coordonnées, les axes de la conique :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

les coordonnées de P étant x_0, y_0, on trouve pour la valeur du rayon :

$$\rho^2 = \frac{-b^2x_0 - a^2y_0 + a^2b^2}{l^2}$$

VASNIER.

Solutions identiques : MM. Tribier, lycée de Clermont ; Cans, à Versailles.

Autre solution. — En prenant les mêmes axes que précédemment, on peut représenter l'équation de la conique par

$$2xy - (ax + by + c)^2 = 0.$$

Les coordonnées du centre sont $\frac{bc}{1-2ab}$, $\frac{ac}{1-2ab}$; l'équation générale des tangentes est

$$2\mu^2 x - 2\mu ax - by + c + y = 0,$$

où μ désigne un paramètre variable.

Les segments interceptés sur les axes, à partir de O, sont $OA = \frac{c}{\mu - a}$ et $OB = \frac{2c\mu}{1-2b\mu}$.

En écrivant que $AB = 2l$, on a une équation du quatrième degré en μ, ce qui montre que le problème admet quatre solutions.

Soit maintenant O′ le symétrique de O par rapport au centre de la conique; ce point a pour coordonnées $\frac{2bc}{1-2ab}$, $\frac{2ac}{1-2ab}$ et le triangle O′AB a pour aire

$$\frac{\sin\theta}{2}\begin{vmatrix} \frac{c}{\mu-a} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2c\mu}{1-2b\mu} & 1 \\ \frac{2bc}{1-2ab} & \frac{2ac}{1-2ab} & 1 \end{vmatrix} = \frac{c^2\sin\theta}{1-2ab}.$$

Donc cette aire est constante.

Il en résulte évidemment que les quatre tangentes AB de longueur $2l$ touchent un cercle de centre O et de rayon $R = \frac{c^2\sin\theta}{l(1-2ab)}$.

Capitaine G. DULIMBERT, à Grenoble.

QUESTIONS PROPOSÉES

1002. — On donne une ellipse et deux droites rectangulaires D, D′. Une droite Δ coupe l'ellipse aux points R, Q.

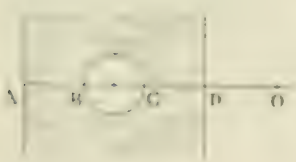
1° Trouver l'enveloppe de la droite Δ, de façon qu'il existe une conique tangente aux deux droites D, D′ et ayant pour foyers R, Q.

2° Trouver l'enveloppe du cercle orthoptique de cette conique, et le lieu de son centre.

P. Pelg.

1003. — On considère un cylindre parabolique et une normale à ce cylindre. On demande le lieu des foyers des paraboles obtenues en coupant le cylindre par des plans qui tournent autour de la normale.

1004. — Un ballon sphérique en verre mince, vide et de rayon R, est placé entre deux glaces planes, minces, parallèles et indéfinies dont il est séparé par des distances égales à son diamètre. L'intervalle est rempli d'eau dont l'indice n est $\frac{4}{3}$.



1° On se formera l'image d'un objet placé en A pour un observateur placé en O sur l'axe ABCD du système, et quel sera le grossissement ?

2° Si la glace A est couverte de papier noir et le ballon rempli d'un gaz coloré, jaune par exemple, la salle où se fait l'expérience étant d'ailleurs éclairée par de la lumière blanche, quel sera l'aspect du ballon pour l'observateur supposé très éloigné ?

3° Comment cet aspect varierait-il avec l'indice n ?

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

941. — *On demande de déterminer les nombres rationnels λ et μ de façon que l'équation*

$$x^4 + 4x^3 - 4\lambda x + 4\mu = 0$$

ait une racine double de la forme $\alpha + \beta\sqrt{3}$, α et β étant rationnels. Résoudre l'équation dans ce cas.

L'équation donnée étant à coefficients rationnels et ayant une racine double irrationnelle $\alpha + \beta\sqrt{3}$ admettra aussi deux fois la racine conjuguée $\alpha - \beta\sqrt{3}$; la somme des racines est donc égale à 4α; d'autre part, elle vaut -4; donc $\alpha = -1$.

Les deux nombres $-1 + \beta\sqrt{3}$ et $-1 - \beta\sqrt{3}$ sont racines de l'équation dérivée

$$x^3 - 3x^2 - \lambda = 0;$$

la somme des racines étant égale à -3, nous voyons de suite que la troisième racine de la dérivée est 1.

En annulant alors la somme des produits deux à deux de ces trois nombres, nous avons $\beta^2 = 1$, ce qui nous donne $\beta = \pm 1$ et nous montre que l'équation proposée doit admettre les deux racines doubles $-1 + \sqrt{3}$ et $-1 - \sqrt{3}$.

Le produit des racines de l'équation dérivée est égal à λ

$$\lambda = -1(-1 + \sqrt{3})(-1 - \sqrt{3}) = 2.$$

De même, le produit des racines de l'équation proposée est égal à 4μ,

$$4\mu = (-1 + \sqrt{3})^2(-1 - \sqrt{3})^2 = 4;$$

d'où $\mu = 1$.

L'équation demandée est donc

$$x^4 + 4x^3 - 8x + 4 = 0,$$

et elle admet bien comme racines doubles les deux nombres trouvés, ainsi qu'il est aisé, mais nécessaire, de le vérifier.

PELVOISIN.

Bonne solution : M. F. Pégorier, à Toulouse.

---

950. — *On considère l'équation à coefficients réels*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients pour que cette équation ait deux racines imaginaires conjuguées de module 1. Quelle inégalité faut-il joindre à cette relation pour qu'elle ne convienne qu'au cas signalé?

Résoudre l'équation dans ce cas.

Les deux racines imaginaires conjuguées de module 1 ont pour produit l'unité, et, par suite, ce sont les racines d'un trinome de la forme $x^2 + \lambda x + 1$. Le polynome du quatrième degré donné est donc susceptible du mode de décomposition suivant

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + \lambda x + 1)(x^2 + \mu x + d).$$

et cette identification fournit entre λ et μ les trois relations suivantes

$$\lambda + \mu = a,$$
$$\lambda\mu + d + 1 = b,$$
$$\lambda d + \mu = c.$$

La première et la dernière donnent de suite λ et μ, $\lambda = \frac{a-c}{1-d}$, $\mu = \frac{c-ad}{1-d}$; en portant ces valeurs dans la seconde nous avons la relation cherchée

$$(1) \qquad (b-d-1)(1-d)^2 - (a-c)(ad-c) = 0.$$

Mais cette relation convient aussi au cas où l'équation aurait deux racines réelles inverses l'une de l'autre. Pour séparer les deux cas, il faut encore exprimer que les racines du trinome $x^2 + \lambda x + 1$ sont imaginaires, c'est-à-dire que $\lambda^2 - 4$ est négatif; ceci fournit l'inégalité $(a-c)^2 - 4(1-d)^2 < 0$, qu'il suffit d'adjoindre à la relation déjà trouvée.

Quant à la résolution de l'équation proposée, elle est immédiate, lorsque la relation (1) est vérifiée, puisque les valeurs de λ et μ sont alors connues : elle est ramenée à la résolution de deux équations du second degré

$$x^2 + \frac{a-c}{1-d}x + 1 = 0$$

et

$$x^2 + \frac{c-ad}{1-d}x + d = 0.$$

G. de FRANCE, à Versailles.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

940. — *On considère un diamètre variable d'une hyperbole équilatère donnée. Par les extrémités, M et M', de ce diamètre on fait passer un cercle de rayon constant qui rencontre l'hyperbole en deux autres points P et P'. Trouver et construire : 1° le lieu du centre de ce cercle ; 2° le lieu du point de rencontre des droites* MM' *et* PP'.

Soit $x^2 - y^2 - a^2 = 0$ l'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à ses axes, et $y - mx = 0$ l'équation du diamètre MM'. Puisque les quatre points M, M', P, P' sont sur un cercle, le coefficient angulaire de PP' est égal à $-m$, et l'équation de cette droite peut s'écrire $y + mx + \mu = 0$.

L'équation générale des coniques passant par les quatre points considérés est alors

$$(x^2 - y^2 - a^2) + (y - mx)(y + mx + \mu) = 0;$$

le coefficient de xy est nul, et pour écrire que l'équation représente un cercle, il suffit d'exprimer que les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux. On trouve $\mu = \frac{m^2+1}{2}$, et l'équation du cercle devient

$$(1 - m^2)(x^2 + y^2) - 2(mx - y)\mu - a^2(1 + m^2) = 0,$$

ou encore, en mettant le rayon en évidence,

$$\left(x - \frac{\mu m}{1-m^2}\right)^2 + \left(y + \frac{\mu}{1-m^2}\right)^2 = \frac{(1-m^2)\mu^2 - a^2(1-m^2)^2}{(1-m^2)^2}.$$

Pour que le rayon soit constant et égal à R il faut qu'on ait

$$(1) \qquad (1-m^2)\mu^2 - a^2(1-m^2)^2 = R^2(1-m^2)^2.$$

1. Les coordonnées du centre sont

$$(2) \qquad x = \frac{\mu m}{1-m^2}, \qquad y = -\frac{\mu}{1-m^2};$$

nous aurons le lieu de ce point en éliminant m et μ entre les équations (1) et (2).

Des équations (2) on tire sans difficulté

$$m = -\frac{x}{y}, \qquad \mu = \frac{x^2 - y^2}{y}.$$

et en portant ces valeurs dans l'équation (1), on a

$$(x^2 - y^2)[x^4 - y^4 - (a^2 + R^2)x^2 - (a^2 - R^2)y^2] = 0.$$

A la solution $x^2 - y^2 = 0$ correspondent les valeurs $\mu = 0$, $m = \pm 1$; le cercle dans ce cas se réduit à la droite de l'infini.

Le véritable lieu est fourni par l'équation

$$x^4 - y^4 - (a^2 + R^2)x^2 - (a^2 - R^2)y^2 = 0,$$

qui représente une courbe du quatrième degré symétrique par rapport aux deux axes, admettant pour asymptotes les droites $(x - y)(x + y) = 0$, et ayant à l'origine un point double dont les tangentes ne sont réelles que si $a^2 - R^2$ est négatif.

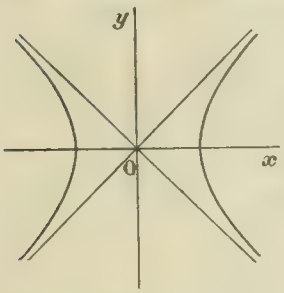


Fig. 1

Pour construire cette courbe, nous poserons $y = tx$; nous avons alors

$$x^2 = \frac{a^2 - R^2 t^2 + a^2 - R^2}{1 - t^4},$$

et en prenant la dérivée par rapport à t,

$$(x^2)' = \frac{2t[(a^2 - R^2)t^4 + 2t^2(a^2 + R^2) + a^2 - R^2]}{(1 - t^4)^2}.$$

A toute valeur de t correspondent deux valeurs de x égales et de signes contraires, et deux valeurs de t égales et de signes contraires donnent les mêmes valeurs de x. Nous donnerons seulement à t des valeurs positives et nous étudierons les valeurs positives correspondantes de x; nous obtiendrons ainsi le quart de la courbe. En prenant la symétrique de cette portion par rapport aux deux axes nous aurons la courbe entière.

1° Supposons $a^2 - R^2 > 0$. Le numérateur de x^2 est sans cesse positif. Pour que x soit réel, il faut que $1 - t^4$ soit positif. Nous ferons varier t de 0 à 1. Quand t croît de 0 à 1, la valeur positive de x croît de $\sqrt{a^2 + R^2}$ à $+\infty$. Nous en déduisons la courbe ci-contre (*fig.* 1).

2° Supposons $a^2 - R^2 < 0$. Le numérateur de x^2 s'annule pour $t = \sqrt{\frac{a^2 + R^2}{a^2 - R^2}}$; celui de $(x^2)'$ a deux racines positives α et β entre lesquelles sont comprises 1 et $\sqrt{\frac{a^2 - R^2}{a^2 - R^2}}$. Pour que x soit réel, il faut que t soit compris soit entre 0 et 1, soit entre $\sqrt{\frac{a^2 + R^2}{a^2 - R^2}}$ et $+\infty$. Voici quelles sont alors les variations de x :

t	0		α		1	$\sqrt{\frac{R^2 - a^2}{R^2 - a^2}}$		β		$+\infty$
x	$\sqrt{a^2 + R^2}$	décroît	*min.*	croît	$+\infty$	0	croît	*max.*	décroît	0

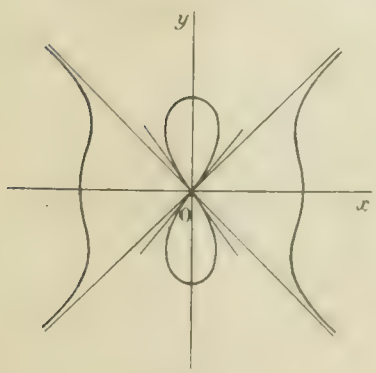


Fig. 2

Pour $t = +\infty$, y prend la valeur $\sqrt{R^2 - a^2}$. La courbe correspondante (*fig.* 2) a reçu le nom de *courbe du diable*.

Observons enfin que pour $a^2 - R^2 = 0$, la courbe a la forme de la figure 1.

2. Pour avoir le lieu du point de rencontre des droites MM′ et PP′, il faut éliminer m et μ entre les équations

$$y - mx = 0, \qquad y + mx + \mu = 0,$$

$$(1 - m^2)\mu^2 - a^2(1 - m^2) - R^2(1 - m^2)^2.$$

Les deux premières nous donnent $m = \frac{y}{x}$, $\mu = -2y$, et

en portant ces valeurs dans la troisième, on obtient l'équation du lieu

$$4x^2y^2(x^2+y^2)+(x^2-y^2)[(a^2-R^2)x^2+(a^2+R^2)y^2]=0.$$

Cette équation représente une courbe du sixième dégré symétrique par rapport aux deux axes. Pour la construire, posons $y=tx$; nous avons

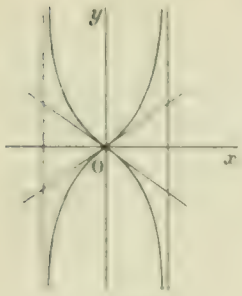


Fig. 3

$$x^2=\frac{(t^2-1)(a^2-R^2)(t^2+a^2-R^2)}{4t^2(t^2+1)};$$

nous donnerons à t des valeurs positives et nous ne considérerons que les valeurs positives de x.

Si a^2-R^2 est positif, x n'est réel que si t est plus grand que 1, et quand t varie de 1 à $+\infty$, x varie de 0 à $\sqrt{a^2+R^2}$. La courbe est représentée par la figure 3.

Si a^2-R^2 est négatif, x s'annule encore pour $t=\sqrt{\frac{R^2-a^2}{R^2+a^2}}$, et pour que x soit réel, il faut faire varier t de 0 à $\sqrt{\frac{R^2-a^2}{R^2+a^2}}$ et de 1 à $+\infty$.

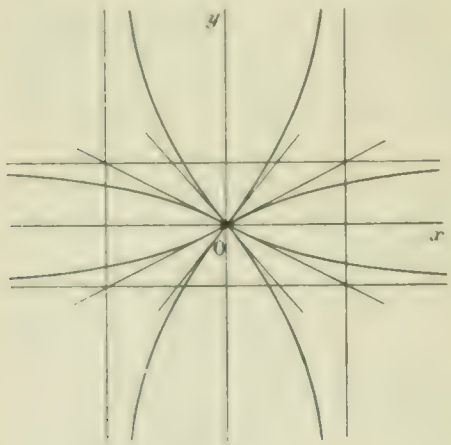


Fig. 4

Pour $t=0$, x est infini, mais y prend la valeur $\sqrt{R^2-a^2}$.

Quand t varie de 0 à $\sqrt{\frac{R^2-a^2}{R^2+a^2}}$, x varie de $+\infty$ à 0. Enfin quand t varie de 1 à $+\infty$, x varie de 0 à $\sqrt{R^2+a^2}$.

La courbe admet dans ce cas quatre asymptotes (*fig.* 4).

Si $a^2-R^2=0$, la courbe se réduit au quatrième degré

$$4x^2(x^2+y^2)+(a^2+R^2)(x^2-y^2)=0,$$

elle est aisée à construire.

BALABAN.

Solutions exactes par MM. F. Pégorier, à Toulouse, et Pelvoisin.

TRIGONOMÉTRIE

CALCUL

963. — *Trouver les angles compris entre 0 et 180° satisfaisant à l'équation*

$$\sin\frac{4}{3}x=a^{-1}\operatorname{cotg}^2\alpha\cos^{\frac{1}{2}}2\beta,$$

$$a=15{,}41875,\qquad \alpha=136^\circ\,35'\,17'',24,\qquad \beta=19^\circ\,42'\,13'',16.$$

(*École centrale, 1900, 1re session.*)

On a

$$2\beta=39^\circ\,24'\,26'',32,$$

$$\operatorname{cotg}\alpha=-\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{cotg}43^\circ\,24'\,42'',76.$$

L'équation donnée est donc de la forme

$$\sin\frac{4}{3}x=-\sin\varphi,$$

en posant

$$(2) \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{cotg}^3 43^\circ 24' 42'',76 \times \cos^{\frac{1}{2}} 39^\circ 24' 26'',32}{15,41875};$$

d'où l'on tire

$$\varphi = 3^\circ 51' 38'',25 ;$$

or l'équation (1) donne deux solutions

$$\frac{4}{3}x = 2k\pi - \varphi \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{3k\pi}{2} - \frac{3}{4}\varphi,$$

ou bien

$$\frac{4}{3}x = (2k+1)\pi + \varphi, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{3}{4}(2k+1)\pi + \frac{3}{4}\varphi.$$

La seconde solution seule donnera une valeur comprise entre 0 et 180°, en prenant $k = 0$, savoir

$$x = 137^\circ 53' 43'',68.$$

PROBLÈME

964. — 1° *Résoudre un triangle* ABC *connaissant la médiane* $AD = \mu$ *issue du sommet* A, *l'angle* B *et l'angle* $\beta = DAC$.

2° β *variant, résoudre le triangle pour lequel le côté* a *est maximum, celui pour lequel le côté* c *est maximum et celui pour lequel le côté* b *est maximum.*

3° *Construire le triangle dont* b *est maximum pour le cas où* $\mu = 4$ *centimètres et* $\widehat{B} = 46°$.

1.— *Résolution du triangle* ABC.— Prenons pour inconnue l'angle C du triangle. Nous aurons l'angle A par la formule

$$A = \pi - B - C,$$

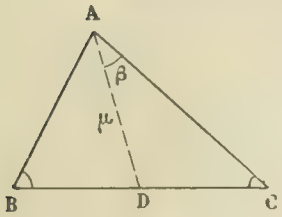


Fig. 1

et les côtés a, b, c, ainsi que l'angle C, par les relations

$$\frac{\mu}{\sin B} = \frac{\frac{a}{2}}{\sin(B+\beta+C)} = \frac{c}{\sin(\beta+C)},$$

$$\frac{\mu}{\sin C} = \frac{\frac{a}{2}}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin(\beta+C)}.$$

De ces quatre équations, on déduit la relation

$$(\alpha) \qquad \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin\beta}{\sin(B+\beta+C)},$$

qui permet de calculer l'angle C, et les expressions de a, b, c, en fonction de l'angle C.

$$(\beta) \qquad a = 2\mu\,\frac{\sin(B+\beta+C)}{\sin B}, \qquad b = \mu\,\frac{\sin(\beta+C)}{\sin C}, \qquad c = \mu\,\frac{\sin(\beta+C)}{\sin B}.$$

Ces expressions sont calculables par logarithmes ; tout revient à calculer l'angle C.

L'équation (α) peut s'écrire

$$2\sin(B+\beta+C)\sin C = 2\sin B\sin\beta,$$

c'est-à-dire

$$\cos(B+\beta) - \cos(B+\beta+2C) = \cos(B-\beta) - \cos(B+\beta),$$

d'où l'on déduit

$$(\alpha') \qquad \cos(B+\beta+2C) = 2\cos(B-\beta) - \cos(B+\beta)$$

En rendant calculable par logarithmes le second membre de cette équation (α) et posant $2\cos(B+\beta) - \cos(B-\beta) = \cos\varphi$, on est ramené à résoudre l'équation

$$\cos(B+\beta+2C) = \cos\varphi,$$

d'où l'on tire

$$B+\beta+2C = 2k\pi \pm \varphi, \qquad \text{et par suite} \qquad C = k\pi \pm \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}(B+\beta).$$

Il reste, pour discuter le problème, à voir dans quelles conditions on peut déterminer l'angle φ, ce qui exige

$$-1 < 2\cos(B+\beta) - \cos(B-\beta) < 1,$$

et de plus si les valeurs trouvées pour C sont acceptables. Une valeur de C n'est acceptable que si elle est comprise entre 0 et π et si la valeur correspondante pour A est elle-même comprise entre 0 et π, ce qui exige que C soit plus petit que $\pi - B$. En définitive, C doit être compris entre 0 et $\pi - B$.

Pour faciliter cette discussion, reprenons l'équation en C, sous sa première forme (α) : on peut l'écrire

$$\sin C \sin(B+\beta+C) = \sin B \sin\beta(\cos^2 C + \sin^2 C).$$

Développant et prenant pour inconnue $\operatorname{cotg} C$, il vient

$$(\alpha') \qquad \operatorname{cotg}^2 C - \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg} C + 2 - \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg}\beta = 0.$$

Une valeur de $\operatorname{cotg} C$, pour être acceptable, doit être réelle et comprise entre $\operatorname{cotg} 0 = +\infty$ et $\operatorname{cotg}(\pi - B) = -\operatorname{cotg} B$.

La condition de réalité est la suivante

$$(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg}\beta)^2 + 4(\operatorname{cotg} B \operatorname{cotg}\beta - 2) \geqslant 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à $\operatorname{cotg}\beta$,

$$\operatorname{cotg}^2\beta + 6\operatorname{cotg} B \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}^2 B - 8 \geqslant 0,$$

ce qui exige

$$(\operatorname{cotg}\beta + 3\operatorname{cotg} B)^2 \geqslant 8(1 + \operatorname{cotg}^2 B),$$

ou

$$(\operatorname{cotg}\beta + 3\operatorname{cotg} B)^2 \geqslant \frac{8}{\sin^2 B}.$$

Substituons maintenant dans le premier membre de l'équation (α') les valeurs $-\operatorname{cotg} B$ et $+\infty$, il vient

$$f(-\operatorname{cotg} B) = 2\operatorname{cotg}^2 B + 2 > 0, \qquad f(+\infty) = +\infty.$$

Les résultats de substitution sont de même signe, les deux valeurs de $\operatorname{cotg} C$ sont comprises dans le même intervalle que leur demi-somme $\frac{1}{2}(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg}\beta)$.

Pour qu'elles soient acceptables, il faut donc que la demi-somme soit comprise entre $-\operatorname{cotg} B$ et $+\infty$, ce qui exige

$$\frac{1}{2}(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg}\beta) > -\operatorname{cotg} B,$$

c'est-à-dire

$$2. \qquad \operatorname{cotg}\beta + 3\operatorname{cotg} B > 0;$$

ces deux inégalités (1) et (2) donnent les conditions de possibilité du problème. Elles se réduisent à une seule inégalité

$$\operatorname{cotg}\beta + 3\operatorname{cotg} B > \frac{2\sqrt{2}}{\sin B}.$$

ou encore

$$\operatorname{cotg}\beta > \frac{2\sqrt{2} - 3\cos B}{\sin B}.$$

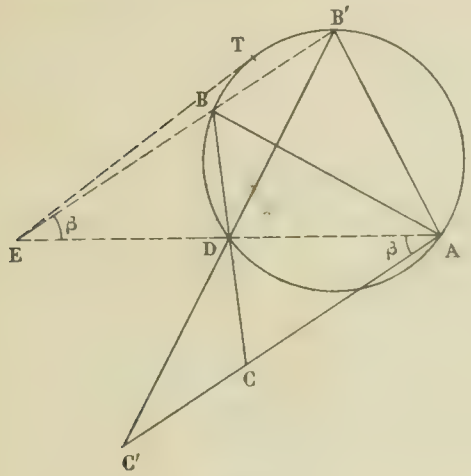


Fig. 2

Cette condition étant supposée remplie, le problème admettra deux solutions.

La construction géométrique est immédiate (*fig.* 2). Ayant décrit sur $AD = \mu$ comme corde un segment de cercle capable de l'angle B, on mènera par le point A la droite AC faisant avec AD l'angle β Tout revient à mener par le point D la droite BC, telle que

$$BD = DC.$$

Le point B se trouvera à l'intersection du segment DBA avec la parallèle à AC menée par le point E, symétrique de A par rapport au point D. Suivant que l'angle β sera inférieur, égal ou supérieur à l'angle que fait la tangente ET avec la droite EA, on aura deux solutions distinctes ou confondues ou bien pas de solution.

Calculons l'angle limite V.

Soit (*fig.* 3) $V = V_1 + V_2$;

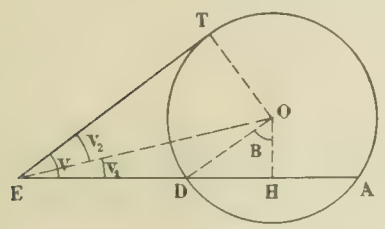


Fig. 3

on a

$$\operatorname{tg} V_1 = \frac{OH}{EH} = \frac{1}{3}\frac{OH}{DH} = \frac{1}{3}\operatorname{cotg} B,$$

$$\operatorname{tg} V_2 = \frac{OT}{ET} = \frac{OD}{ET} = \frac{\frac{\mu}{2\sin B}}{\mu\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sin B}.$$

d'où

$$\operatorname{tg} V = \frac{\operatorname{tg} V_1 + \operatorname{tg} V_2}{1 - \operatorname{tg} V_1 \operatorname{tg} V_2} = \frac{\frac{1}{3}\operatorname{cotg} B + \frac{1}{2\sqrt{2}\sin B}}{1 - \frac{\operatorname{cotg} B}{6\sqrt{2}\sin B}}.$$

ou encore

$$\operatorname{cotg} V = \frac{6\sqrt{2}\sin^2 B - \cos B}{(2\sqrt{2}\cos B + 3)\sin B} = \frac{6\sqrt{2} - \cos B - 6\sqrt{2}\cos^2 B}{(2\sqrt{2}\cos B + 3)\sin B} = \frac{2\sqrt{2} - 3\cos B}{\sin B}.$$

Le problème n'est possible que si $\beta < V$, autrement dit, si

$$\operatorname{cotg}\beta > \operatorname{cotg} V, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \operatorname{cotg}\beta > \frac{2\sqrt{2} - 3\cos B}{\sin B}.$$

II. *Maximum des côtés a, b, c.* — La construction géométrique montre que a est maximum en même temps que la corde DB ; il faut pour cela que DB passe par le centre du cercle O (*fig.* 4). Le triangle BAD étant rectangle, on a

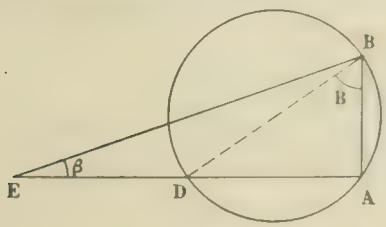


Fig. 4

$$\operatorname{tg} B = \frac{\mu}{AB}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{AB}{2\mu} \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg} B.\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}.$$

Vérifions ce résultat par le calcul.

Le maximum de $a = 2\mu\dfrac{\sin B + \beta - C}{\sin B}$ a lieu quand l'angle $B + \beta - C = \dfrac{\pi}{2}$; on en déduit

$B + \beta + 2C = \pi - B + \beta$ et $\cos B + \beta + 2C = \cos B + \beta$.

Portons cette valeur dans l'équation (α'); nous aurons la condition cherchée

$$-\cos(B+\beta) = 2\cos(B+\beta) - \cos(B-\beta), \qquad \text{ou} \qquad 2\cos B\cos\beta = 4\sin B\sin\beta,$$

ou enfin

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}.$$

On a dans ce cas

$$C = \frac{\pi}{2} - (B+\beta), \qquad A = \frac{\pi}{2} + \beta,$$

$$a = \frac{2\mu}{\sin B}, \qquad b = \frac{\mu\cos B}{\cos(B+\beta)}, \qquad c = \mu\operatorname{cotg} B.$$

Pareillement, c est maximum quand AB passe par le point O (*fig.* 5); dans ce cas, le triangle BDA est rectangle en D et le triangle BEA isocèle. On en déduit

$$B + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

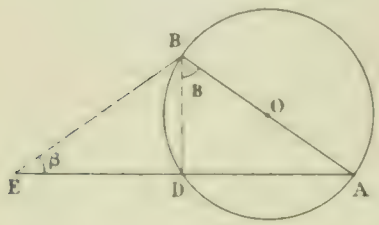


Fig. 5

Si on se reporte à l'expression de c, $c = \mu\dfrac{\sin(\beta+C)}{\sin B}$, on voit que c est maximum pour $\beta - C = \dfrac{\pi}{2}$,

d'où

$$C = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Portant dans l'équation (α), il vient

$$\frac{\cos\beta}{\sin B} = \frac{\sin\beta}{\sin\left(B + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\beta}{\cos B},$$

d'où

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg}\beta = 1,$$

condition qui équivaut à la précédente.

On a, dans ce cas,

$$C = B, \qquad A = \pi - 2B,$$

$$a = 2\mu\operatorname{cotg} B, \qquad b = c = \frac{\mu}{\sin B}.$$

Enfin, si on remarque que dans la figure du cas général (*fig.* 2), on a toujours $AC = EB$, $AC' = EB'$, on voit que b sera maximum ou minimum dans le cas où la sécante EBB' passera par le centre du cercle O : c'est le cas où l'angle β égale l'angle V_1 de la discussion précédente,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}\operatorname{cotg} B, \qquad \text{ou encore} \qquad \operatorname{tg} B \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}.$$

Faisons la figure en supposant $\mu = 4$ centimètres et $B = 46°$. Le triangle ABC correspond au minimum de b et le triangle AB'C' correspond au maximum (*fig.* 6).

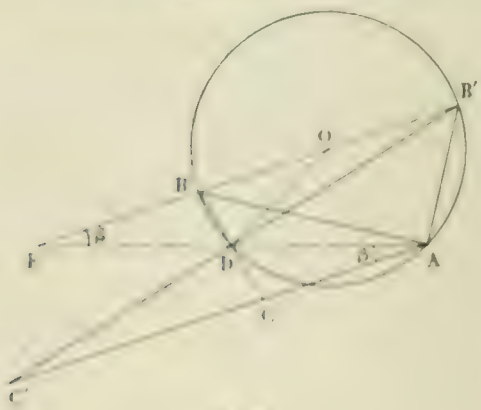


Fig. 6

Tout ce qui précède suppose le point O situé au-dessus de la médiane AD, c'est-à-dire l'angle B aigu. Il est facile de vérifier par le calcul que les conditions trouvées ne sont compatibles avec la condition de possibilité du problème

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{2\sqrt{2} - 3\cos B}{\sin B},$$

que si l'angle B est aigu.

1° $\operatorname{tg} B \operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{2}$ ou $\operatorname{cotg}\beta = 2\operatorname{tg} B$: il faut que l'on

ait
$$2\,\mathrm{tg}B > \frac{2\sqrt{2} - 3\cos B}{\sin B};$$

multipliant les deux membres par $\sin B$, qui est positif $(0 < B < \pi)$, il vient

$$\frac{2\sin^2 B + 3\cos^2 B - 2\sqrt{2}\cos B}{\cos B} > 0,$$

en remarquant que le numérateur se réduit à $2 - 2\sqrt{2}\cos B + \cos^2 B$, c'est-à-dire à $(\sqrt{2} - \cos B)^2$, on obtient $\frac{(\sqrt{2} - \cos B)^2}{\cos B} > 0$, ce qui exige $\cos B > 0$, autrement dit B aigu.

2° $\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,\beta = 1$ ou $\mathrm{cotg}\,\beta = \mathrm{tg}\,B$; la condition de possibilité se réduit à

$$\mathrm{tg}\,B > \frac{2\sqrt{2} - 3\cos B}{\sin B} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin^2 B + 3\cos^2 B - 2\sqrt{2}\cos B}{\cos B} > 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{(1 - \sqrt{2}\cos B)^2}{\cos B} > 0.$$

3° $\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{3}$ ou $\mathrm{cotg}\,\beta = 3\,\mathrm{tg}\,B$; la condition de possibilité devient $3\,\mathrm{tg}\,B > \frac{2\sqrt{2} - 3\cos B}{\sin B}$, ou encore $\frac{3\sin^2 B + 3\cos^2 B - 2\sqrt{2}\cos B}{\cos B} > 0$, ou enfin $\frac{3 - 2\sqrt{2}\cos B}{\cos B} > 0$. Or $\cos B$ étant plus petit que 1 est plus petit que $\frac{3}{2\sqrt{2}}$, le numérateur $3 - 2\sqrt{2}\cos B$ est positif et l'inégalité se réduit encore à $\cos B > 0$.

Remarquons enfin que dans l'hypothèse $\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{3}$, l'équation (α') se réduit à

$$\cos(B + \beta + 2C) = 0,$$

d'où
$$B + \beta + 2C = (2k + 1)\frac{\pi}{2}.$$

Vérifions cette relation sur la figure 6. Soit d'abord le triangle ABC. On a

$$\widehat{BDA} = \widehat{BDO} + \widehat{ODA}.$$

Or,
$$\widehat{BDA} = \beta + C, \qquad \widehat{BDO} = \widehat{OBD} = \pi - C, \qquad \widehat{ODA} = \frac{\pi}{2} - B,$$

d'où
$$B + \beta + 2C = \frac{3\pi}{2}.$$

Soit maintenant le triangle AB'C'. On a de même

$$\widehat{B'DA} = \widehat{ODA} - \widehat{ODB},$$

$$\widehat{B'DA} = \beta + C', \qquad \widehat{ODA} = \frac{\pi}{2} - B, \qquad \widehat{ODB} = \widehat{OB'D} = C',$$

d'où
$$B + \beta + 2C' = \frac{\pi}{2}.$$

Nous avons pu déduire les conditions du maximum des côtés a et c de leurs expressions (β). Prenons de même l'expression du côté b

$$(\beta') \qquad b = \mu\,\frac{\sin(\beta + C)}{\sin C},$$

et cherchons le maximum et le minimum de ce côté lorsque β varie ; b dépend de deux variables β et C, liées par la relation (α). Eliminant l'angle C entre cette relation et l'expression de b, on aura la relation qui existe entre b et β.

On tire de (β)
$$\operatorname{cotg} C = \frac{b - \mu \cos \beta}{\mu \sin \beta}.$$

Portant dans l'équation (α'), il vient, tous calculs faits,
$$b^2 - b\mu(3\cos\beta + \sin\beta \operatorname{cotg} B) + 2\mu^2 = 0,$$
équation qui donne pour b deux valeurs dont le produit est constant et égal à $2\mu^2$. Posons, en prenant $u < \frac{\pi}{4}$,
$$b = \mu\sqrt{2}\operatorname{tg} u, \qquad b' = \mu\sqrt{2}\operatorname{cotg} u;$$
à un minimum de u correspondront pour b et pour b' le minimum et le maximum du côté b. D'ailleurs, u est donné par la relation
$$b + b' = \mu\sqrt{2}(\operatorname{tg} u + \operatorname{cotg} u) = \mu(3\cos\beta + \sin\beta \operatorname{cotg} B),$$
d'où on tire
$$\frac{2\sqrt{2}}{2\sin u \cos u} = 3\cos\beta + \sin\beta \operatorname{cotg} B,$$
ou encore
$$\sin 2u = \frac{2\sqrt{2}}{3\cos\beta + \sin\beta \operatorname{cotg} B};$$
$\sin 2u$ varie en sens inverse de son dénominateur $z = 3\cos\beta + \sin\beta \operatorname{cotg} B$.

Prenons la dérivée $z' = -3\sin\beta + \cos\beta \operatorname{cotg} B$; β variant entre 0 et V, z' est d'abord positif, reste positif tant que
$$\operatorname{cotg} B . \operatorname{cotg}\beta > 3,$$
s'annule pour
$$\operatorname{cotg} B \operatorname{cotg}\beta = 3 \qquad \left(\operatorname{tg} B \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}\right).$$
et devient négatif pour
$$\operatorname{cotg} B \operatorname{cotg}\beta < 3.$$

On a donc un maximum de z et par suite un minimum de $\sin 2u$ lorsque $\operatorname{tg} B \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. L'arc $2u$ pris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ varie dans le même sens que son sinus ; l'arc moitié u varie aussi dans le même sens. On a donc bien un minimum de u.

P. L.

CONCOURS DE 1900 (*Suite*).

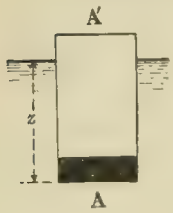
ECOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Physique et Chimie.

I. — 1005. — On donne un récipient cylindrique fermé AA pesant, vide, 350gr et dont les dimensions [illegible] sont : base [illegible], hauteur 20cm.

L'épaisseur des parois est supposée négligeable.

Ce récipient flotte dans un liquide L dont la densité à 0° est 0,61. On a introduit dans ce récipient, après y avoir fait le vide, un poids x de mercure et un poids y d'eau, choisis de telle sorte qu'à la température de 100° : 1° le système affleure exactement au niveau A', 2° toute l'eau soit exactement réduite en vapeur saturée.



On demande :

1° De calculer les quantités x et y;

2° De calculer la hauteur z, comptée à partir du fond A, dont s'enfoncera le système pour une température quelconque t comprise entre 0° et 100°;

3° D'évaluer la force qu'il faudrait appliquer, à la température de 100°, à un piston très mince supposé mis à la place du fond A pour le maintenir. On admettra que la pression est uniforme dans tout l'espace occupé par la vapeur.

Données numériques : Densité du mercure à 0°, 13,6 ; de la vapeur d'eau, $\frac{5}{8}$.

Poids du litre d'air à 0° et 760^{mm} : 1^{gr},3.

Pression atmosphérique : 780^{mm}.

Coefficients de dilatation : linéaire de l'enveloppe, 0,00001 ; cubique du mercure, 0,00018 ; cubique du liquide L, $\frac{1}{6000}$; des gaz, 0,0036.

On prendra comme unités le centimètre et le gramme.

II. — 1006. — Dans une solution d'iodure de potassium on fait arriver le gaz provenant de l'action de l'acide chlorhydrique en excès sur 0^{gr},435 de bioxyde de manganèse, puis on verse 250^{cmc} d'eau de brome.

On décolore ensuite la liqueur exactement à l'aide d'une solution d'hyposulfite de soude contenant 15^{gr},8 de ce sel anhydre par litre.

Sachant qu'il a fallu employer pour cela 200^{cmc} de la solution d'hyposulfite, on demande la teneur de l'eau de brome.

Poids atomiques : Cl = 35,5, Br = 80, I = 127, Na = 23, Mn = 55.

(*Durée : 3 heures 1/2.*)

Mathématiques.

1007. — On considère la fonction exponentielle $y = e^{\frac{1}{x}}$, la lettre e désignant la base des logarithmes népériens.

1° Etudier la loi de formation des dérivées successives de y par rapport à x et démontrer qu'en général la dérivée d'ordre n, $\frac{d^n y}{dx^n}$, est de la forme $(-1)^n Q_n x^{-2n} e^{\frac{1}{x}}$, Q_n étant un polynome de degré $n-1$ en x; trouver la relation (I) qui existe entre Q_n, Q_{n-1} et Q'_{n-1} (Q'_{n-1} désignant la dérivée de Q_{n-1} par rapport à x).

2° Etablir une formule de récurrence entre trois polynomes Q successifs, Q_{n-2}, Q_{n-1}, Q_n; on désignera cette formule par le n° (II).

3° Démontrer que le polynome Q_n n'est autre que la fonction primitive du polynome précédent Q_{n-1}, multipliée par une constante numérique ; formule (III).

4° Etablir la relation identique qui existe entre le polynome Q_n et ses deux premières dérivées Q'_n, Q''_n ; formule (IV).

5° Démontrer par l'application du théorème de Rolle aux formules (I) et (III) ou aux formules (III) et (IV) : *a*) que l'un quelconque des polynomes Q_n a ses racines réelles et inégales ; *b*) que les racines d'un polynome Q_{n-1} séparent celles du polynome suivant Q_n.

6° On représente le développement du polynome Q_n par la formule

$$Q_n = A_{n_1} x^{n-1} + A_{n_2} x^{n-2} + \ldots + A_{n_p} x^{n-p} + \ldots + A_{n_{n-1}} x + A_{n_n}.$$

On demande de trouver l'expression générale du coefficient A_{n_p} et de démontrer que l'on a identiquement

$$A_{n_p} = K_p^{n-p} \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p}$$

le symbole K_p^{n-p} désignant le nombre des combinaisons *complètes* de p lettres $n-p$ à $n-p$.

(*Durée : 4 heures.*)

Calcul trigonométrique.

Dans un triangle ABC, on donne

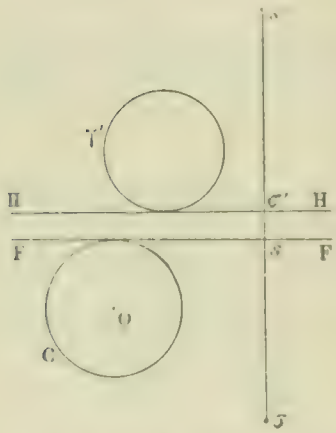
$$a = 3645^{m},430,$$
$$b = 4156^{m},280,$$
$$c = 5047^{m},560.$$

On demande de calculer les angles A, B, C, la surface S et le rayon r du cercle inscrit.

(*Durée : 1 heure.*)

Épure de géométrie descriptive.

1008. — Intersection de deux cônes obliques à bases circulaires ci-dessous définis.



Soient HH la trace sur le plan vertical de projection d'un plan horizontal H et FF la trace sur le plan horizontal d'un plan de front F.

Le premier cône a son sommet (s', s) dans le plan F à $0^{m},20$ au dessus du plan H où se trouve son cercle de base C de $0^{m},07$ de rayon. Le centre O de C est à $0^{m},07$ en avant de F et à $0^{m},15$ à gauche du plan de profil P qui contient le point (s, s').

Le deuxième cône a pour sommet (σ, σ'), point qui est sur l'intersection de H et de P, à $0^{m},18$ en avant du plan F où se trouve son cercle de base γ', dont le rayon est $0^{m},06$. Le centre de γ' est à $0^{m},06$ au-dessus du plan H et à $0^{m},10$ à gauche de P.

On demande de représenter :

1° en projection verticale, le solide commun aux deux cônes ;

2° en projection horizontale, la portion du premier cône qui est extérieure au second et limitée en outre, inférieurement par le plan H, et supérieurement par le plan de section circulaire antiparallèle qui passe par le point (s, σ').

Les parties conservées seront passées à l'encre de Chine en faisant la distinction des parties vues et cachées.

On reproduira en outre à l'encre (traits continus de couleur ou traits noirs discontinus) la construction d'un point courant de l'intersection avec la tangente, ainsi que celle d'un point et d'une tangente remarquables de chaque espèce (points sur les contours apparents, points où l'intersection est tangente à une génératrice de l'un des cônes).

Les courbes seront tracées à la main sans faire usage de pistolets.

On prendra pour ligne HH le petit axe de la feuille et on placera le point O à $0^{m},01$ à gauche du grand axe.

(*Durée : 3 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1009. — Trouver les lieux des centres, des sommets et des foyers des hyperboles équilatères qui ont leurs directions asymptotiques données et qui coupent un cercle donné en des points dont trois soient les sommets d'un triangle équilatéral.

1010. — Soit M un point variable sur une ellipse dont les axes sont AA′ et BB′. Trouver :

1° L'enveloppe de l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles MAA′ et MBB′ ;

2° Le lieu du second point commun à ces cercles.

M. O.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PAR LE DOCTEUR COMTE JACQUET.

11e Année. N° 6. Mars 1901.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR L'ÉQUATION AUX SIX RAPPORTS ANHARMONIQUES APPLICATION AUX FORMES BINAIRES CUBIQUE ET BIQUADRATIQUE

par M. **Lelieuvre**, professeur au lycée de Caen.

I. Soit à former l'équation du sixième degré qui a pour racines les six rapports anharmoniques de quatre quantités : si ρ désigne l'un d'eux, les six racines sont : ρ, $\frac{1}{\rho}$, $1-\rho$, $1-\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{1-\rho}$, $\frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}$. On est donc conduit à chercher la forme générale de l'équation du sixième degré $F(z)=0$ qui, à la fois, est réciproque et a les mêmes racines que sa transformée en $1-z$; cette dernière condition permet d'exprimer $F(z)$ comme le produit de trois diviseurs du second degré, tels que la somme des deux racines de chacun d'eux soit égale à 1 ; l'un d'eux est de la forme z^2-z-a, donc le polynome $F(z)$ satisfaisant à la condition en question peut s'écrire sous la forme d'un polynome entier du troisième degré en z^2-z, soit

$$F(z)=A_0(z^2-z)^3+A_1(z^2-z)^2+A_2(z^2-z)+A_3.$$

Reste à exprimer qu'il est réciproque, aucune de ses racines n'étant d'ailleurs, en général, égale à ± 1 ; d'où trois équations linéaires entre les quatre coefficients A, ce qui permet d'exprimer linéairement trois d'entre eux en fonction du quatrième, et d'écrire $F(z)$ sous la forme

$$F(z)=\varphi(z)+\lambda\psi(z),$$

λ étant un coefficient arbitraire, et φ et ψ deux polynomes qui sont des solutions particulières de la question.

Réciproquement, si $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont deux polynomes du sixième degré n'ayant pas les mêmes racines, et satisfaisant aux identités

$$z^6\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\varphi(z), \qquad z^6\psi\left(\frac{1}{z}\right)=\psi(z), \qquad \varphi(1-z)=\varphi(z), \qquad \psi(1-z)=\psi(z),$$

l'équation cherchée peut toujours se mettre sous la forme

$$F(z)=\varphi(z)+\lambda\psi(z)=0 ;$$

car on a évidemment $z^6F\left(\frac{1}{z}\right)=F(z)$, $F(1-z)=F(z)$, de sorte qu'il suffit que l'équation admette l'un des six rapports considérés comme racine, pour admettre les cinq autres ; or, on peut choisir λ de façon qu'elle ait une racine donnée $z=\rho$, et on obtiendra ainsi une solution unique et non illusoire, car la valeur attribuée à λ ne pourra rendre $F(z)$ identique à 0, puisque φ et ψ, par hypothèse, n'ont pas les mêmes racines.

On aura donc la solution générale du problème une fois choisis φ et ψ ; nous prendrons naturellement les polynomes qui correspondent à $\rho=\pm 1$; pour $\rho=1$, on a les trois racines doubles $1, 0, \infty$;

je poserai $\varphi(z) = z(z-1)^2$; pour $\rho = -1$ (cas de la proportion harmonique), on a les trois racines doubles -1, 2, $\frac{1}{2}$; je poserai $\varphi(z) = (z+1)^2(z-2)^2(2z-1)^2$; les polynomes ainsi choisis satisfont bien aux conditions voulues. Alors l'équation demandée est

$$(z+1)(z-2)(2z-1)^2 + \lambda z^2(z-1)^2 = 0,$$

et λ se détermine en écrivant qu'elle admet la racine $z = \rho$.

Conséquence. — Deux des six rapports anharmoniques sont encore égaux quand on a $\rho^2 - \rho + 1 = 0$, c'est-à-dire $\rho = -\omega$ ou $-\omega^2$; on trouve alors les deux racines triples $-\omega$ et $-\omega^2$; les quantités considérées sont dites en proportion équianharmonique. D'après ce qui précède, on doit pouvoir trouver deux constantes, α, β, telles que l'on ait l'identité

$$(1) \qquad \alpha z^2(z-1)^2 + \beta(z+1)(z-2)(2z-1)^2 = (z+\omega)^3(z+\omega^2)^3 = (z^2-z+1)^3.$$

En faisant successivement $z = 0$ et $z = -1$, on trouve $\alpha = \frac{27}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$.

II. Application à la forme cubique binaire. — 1° *Relation entre une forme cubique et ses covariants.* — Soit la forme binaire

$$f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3.$$

J'en considère le hessien H, l'invariant I et le jacobien J que je prends, suivant l'usage, sous les formes suivantes

$$H = \begin{vmatrix} ax+by & bx+cy \\ bx+cy & cx+dy \end{vmatrix} = (ac-b^2)x^2 + (ad-bc)xy + (bd-c^2)y^2,$$

$$I = (ad-bc)^2 - 4(ac-b^2)(bd-c^2), \qquad J = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix}$$

Si l'on fait subir à la forme une substitution de module Δ, on sait que l'on a, après la substitution,

$$H_1 = \Delta^2 H, \qquad I_1 = \Delta^4 I, \qquad J_1 = \Delta^3 J.$$

Je suppose le cas général où la forme a ses trois racines distinctes, et je fais une substitution telle qu'elle devienne identiquement $f_1 = xy(x+y)$. On a alors

$$H_1 = -\frac{1}{9}(x^2+xy+y^2), \qquad I_1 = -\frac{1}{27}, \qquad J_1 = \frac{1}{27}(x-y)(x+2y)(2x+y).$$

On voit immédiatement que H_1 a ses racines en proportion équianharmonique avec celles de f_1, et J_1 ses racines en proportion harmonique avec ces mêmes racines; par suite, je ramènerai l'identité (1) ci-dessus à une relation entre f_1, H_1, J_1. Si j'y pose $z = -\frac{x}{y}$, elle devient ainsi

$$27(xy(x+y))^2 + (x-y)(x-2y)(y-2x)^2 = 4(x^2+xy+y^2)^3$$

d'où

$$27f_1 + 27\,J_1 = 4.9\,H_1.$$

Revenant aux fonctions initiales avant la substitution, on trouve $f^2 + 27\Delta^6 J^2 \equiv -4.27\Delta^6 H^3$ et d'ailleurs, on a $I_1 = -\frac{1}{27} = \Delta^4 I$, ce qui permet d'éliminer Δ et d'arriver à la relation invariante connue

$$4H^3 = I^2 + J^2.$$

2° *Équation aux rapports anharmoniques des racines de la forme et d'une quantité quelconque.* — Soit à calculer une telle équation, la quantité donnée étant la racine $\frac{\lambda}{\mu}$ de la forme linéaire $\varphi = \mu x - \lambda y$. Pour cela, je fais subir à la fois à f et φ une même substitution linéaire ramenant f identiquement à la forme $f_1 = \Delta^3 f(x+y)$.

Cette substitution n'altère pas les rapports anharmoniques, ni par conséquent l'équation cherchée ; supposons que φ soit devenue identique à $\varphi_1 = mx - ly$: l'un des rapports ρ considérés est $-\frac{m}{l}$; l'équation demandée peut s'écrire

$$(z+1)(z-2)(2z-1)^2 + k(z^2 - z + 1)^3 = 0$$

et on détermine k par l'équation

$$(l-m)(l+2m)(2l+m)^2 + k(l^2+ml+m^2)^3 = 0.$$

Désignons par un accent, $'$, les résultats de la substitution $x = l$, $y = m$ dans la forme et ses covariants ; nous aurons, d'après ce qui précède,

$(l-m)(l+2m)(2l+m) = 27J'_1$ (l'indice 1 s'appliquant après la substitution), $l^2+ml+m^2 = -9H_1$,

d'où
$$27^2 J_1'^2 - k.9^3 H_1'^3 = 0.$$

Si nous revenons aux fonctions initiales H et J nous avons donc $k = \frac{J'^2}{H'^3}$; d'où l'équation demandée

$$H'^3[(z+1)(z-2)(2z-1)]^2 + J'^2(z^2-z+1)^3 = 0,$$

dans laquelle H′ et J′ désignent les valeurs prises par H et J pour $x = \lambda$, $y = \mu$.

III. Application à la forme biquadratique. — *Équation aux rapports anharmoniques des racines de la forme.*

Soit la forme biquadratique binaire

$$f = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4.$$

Je considérerai ses deux invariants S et T qui ont les valeurs connues

$$S = ae - 4bd + 3c^2, \qquad T = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}.$$

On sait qu'après une substitution de module quelconque Δ, on a

$$S_1 = \Delta^2 S, \qquad T_1 = \Delta^3 T.$$

Une telle substitution ne change pas l'équation demandée ; je la choisis de façon à ramener identiquement la forme à $f_1 = xy(x+y)(mx-ly)$, en supposant, bien entendu, le cas général d'une forme ayant au moins trois racines distinctes.

L'équation cherchée sera, d'après le paragraphe précédent,

$$\frac{(z+1)(z-2)(2z-1)^2}{(l-m)(l+2m)(2l+m)^2} = \frac{(z^2-z+1)^3}{(l^2+ml+m^2)^3}.$$

Le dénominateur de son premier membre s'annule quand les quatre racines sont en proportion harmonique ; celui du second membre quand elles sont en proportion équianharmonique ; or, on sait que le premier cas se présente quand $T = 0$ et le second quand $S = 0$; calculons donc S_1 et T_1 pour la forme f_1 ; nous trouverons

$$S_1 = \frac{l^2+lm+m^2}{3.2^2}, \qquad T_1 = \frac{(l-m)(l+2m)(2l+m)}{2^7.3^3}.$$

On aura donc, en appelant Δ le module de la substitution faite

$$l^2+lm+m^2 = 2^2.3\Delta S, \qquad (l-m)(l+2m)(2l+m) = 2^7.3\Delta T;$$

d'où l'équation demandée

$$\left[(z+1)(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)\right]^2 - \frac{27T^2}{S^3}(z^2-z+1)^3 = 0.$$

Remarque. — Je rappelle qu'on obtient bien aisément les invariants S et T et leur signification

géométrique, en les ramenant aux invariants simultanés de la conique $\xi^2 - x\eta = 0$ et de la suivante, qui lui est harmoniquement circonscrite,

$$ax^2 + 4bx\xi + 6c\xi^2 + 4d\xi\eta + e\eta^2 + 2e\xi^2 - x\eta = 0.$$

(Voir *Algèbre supérieure* de Salmon, page 286.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1900).

Mathématiques.

945. — *Dans un plan rapporté à des axes de coordonnées rectangulaires, on donne la cubique dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 x = a^2.$$

Montrer que par les quatre points d'intersection (à distance finie) de cette cubique et d'un cercle on peut faire passer une conique. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette conique soit bitangente au cercle.

Montrer que les cercles bitangents à la cubique se distribuent en quatre familles distinctes (deux réelles et deux imaginaires) et que les cordes de contact sont soit parallèles à une asymptote, soit concourantes en un des trois points de la courbe situés sur l'axe des x.

Étudier le lieu des centres et le lieu des milieux des cordes de contact des cercles qui touchent la cubique en deux points réels.

Montrer que les points de contact avec la cubique de deux cercles bitangents de la même famille sont sur un même cercle.

Par un point arbitraire M_0 de la cubique passent deux cercles bitangents réels, qui touchent respectivement la cubique en deux autres points M_1, M_2; calculer, en fonction des coordonnées x_0, y_0 du point M_0, les coordonnées des points (autres que les points de contact) où les tangentes en M_1, M_2 rencontrent la cubique; en conclure que ces tangentes concourent en un point de la courbe. Comment le calcul doit-il être modifié pour les cercles imaginaires bitangents qui passent par le point M_0?

Considérons un cercle quelconque d'équation

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0;$$

ce cercle coupe la cubique proposée sur la ligne

$$z(2\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma xz + a^2 z^2) = 0,$$

qui se décompose en la droite de l'infini $z = 0$ et la conique

$$2\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma xz + a^2 z^2 = 0.$$

La droite de l'infini passe par les points cycliques, I et J, qui sont communs au cercle et à la cubique ; la conique passe par les quatre autres points de rencontre.

Pour que le cercle proposé soit doublement tangent à cette conique, il faut que pour certaines valeurs de λ, u, v, w, on ait l'identité

$$2\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma xz + a^2 z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma z) = (ux + vy + wz)^2,$$

ce qui nous donne six équations de condition entre λ, α, β, γ, u, v, w : ce sont

$$\lambda + 2\alpha = u^2, \qquad \beta = uv, \qquad \lambda = v^2, \qquad \gamma = 2\alpha u = -2uw, \qquad \lambda\beta = -vw, \qquad \lambda\gamma + a^2 = w^2.$$

La troisième relation donne $\lambda = v^2$ et les autres deviennent

$$2\alpha = u^2 - v^2, \qquad \beta = uv, \qquad \gamma = v^2 - u^2 = 2uw, \qquad \lambda v^2 = -vw, \qquad \gamma v^2 = w^2 + a^2.$$

L'une d'elles nous conduit à étudier la solution $v = 0$; nous avons alors successivement $\lambda = 0$, $2\alpha = u^2$, $\beta = 0$, $\gamma = -2uw$ et $w^2 + a^3 = 0$; puis, immédiatement, $\gamma^2 = -8a^3\alpha$. Nous avons donc une famille de cercles ayant leurs centres sur Ox

$$x^2 + y^2 + \frac{\gamma^2 x}{4a^3} + \gamma = 0 ;$$

pour chacun d'eux la conique envisagée plus haut se réduit à une droite double parallèle à Oy et fournit ainsi la corde des contacts. Cette solution était évidente *a priori*, la cubique proposée ayant pour axe de symétrie l'axe des x.

Supposons maintenant $v \neq 0$ et égalons les deux valeurs de β ainsi que les deux valeurs de γ ; nous aurons les deux équations

$$uv^2 - w = 0, \qquad u^2v^6 + 2uv^2w + w^2 = v^6 - a^3,$$

qui ne contiennent plus que u, v, w. En vertu de la première, il est manifeste que la seconde se réduit à $v^6 - a^3 = 0$; elle donne donc $v^2 = a$, $v^2 = aj$, $v^2 = aj^2$, j et j^2 étant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité. La première relation se réduit alors à $ua + w = 0$, ou $uaj + w = 0$, ou $uaj^2 + w = 0$; elle exprime que la corde des contacts passe par l'un des trois sommets de la cubique.

Etudions plus spécialement la solution réelle $v^2 = a$. Pour cette solution, les sept nombres λ, α, β, γ, u, v, w prennent les valeurs respectives a, $\frac{u^2 - a}{2}$, $u\sqrt{a}$, $a^2 + au^2$, u, $\sqrt{a}$, $-au$. Donc, en prenant pour paramètre variable $\beta = u\sqrt{a}$, le cercle et la corde des contacts sont respectivement représentés par les équations suivantes :

$$x^2 + y^2 + \frac{a^2 - \beta^2}{a}x - 2\beta y + a^2 - \beta^2 = 0,$$

$$\beta x + ay - a\beta = 0.$$

Ces deux équations se prêtent facilement aux vérifications indiquées.

Le lieu des centres est immédiat : il a pour équation

$$2\alpha = \frac{\beta^2 - a^2}{a} \qquad \text{ou} \qquad y^2 - 2ax - a^2 = 0.$$

C'est une parabole ayant pour axe Ox, pour paramètre a, pour foyer l'origine et dont la concavité est tournée du côté des x positifs.

Pour avoir le lieu du milieu de la corde des contacts, nous abaisserons du centre du cercle une perpendiculaire sur la corde des contacts et nous éliminerons β entre les équations de ces deux droites. La perpendiculaire indiquée a pour équation

$$y - \beta = \frac{a}{\beta}\left(x - \frac{\beta^2 - a^2}{2a}\right) ;$$

son coefficient angulaire $\frac{a}{\beta}$ est le quotient des dérivées par rapport à β des deux fonctions $y = \beta$ et $x = \frac{\beta^2 - a^2}{2a}$, qui représentent la parabole lieu des centres : donc cette droite est la tangente à la parabole au centre du cercle considéré, et il en résulte que le lieu cherché est la podaire de cette parabole par rapport au point A $(a, 0)$; ce lieu est donc une cubique circulaire ayant un point double au point A. Effectuons le calcul indiqué ; nous obtenons l'équation

$$2x(x - a)(x - a)^2 + 2y^2(x - a) - ay^2 = 0 ;$$

en y remplaçant x par $x + a$, nous avons une équation plus simple

$$2x(x^2 + y^2) + a(3x^2 + y^2) = 0,$$

qui met en évidence tous les résultats signalés.

Si maintenant on considère la série exceptionnelle de cercles bitangents dont les cordes de contact sont parallèles à Oy, il est évident que les deux lieux demandés coïncident avec l'axe des x.

Soient M et M', N et N' les points de contact avec la cubique de deux cercles de la même famille. S'ils appartiennent à la série exceptionnelle dont nous venons de parler, ce sont les sommets d'un trapèze isocèle et, par suite, il est évident qu'ils sont sur un même cercle. S'ils appartiennent à la série dont les cordes de contact passent en A, la propriété demandée exige que $AM.AM' = AN.AN'$; tout revient donc à démontrer que les cercles de cette famille ont même puissance par rapport au point A. Or, les coordonnées du point A étant a et 0, il suffit de constater que le premier membre de l'équation de ces cercles prend pour a et 0 une valeur constante ; on vérifie immédiatement que le premier membre de l'équation de ces cercles prend ainsi la valeur $3a^2$, ce qui établit la propriété demandée.

Pour traiter la deuxième partie, désignons par x_0 et y_0 les coordonnées du point M_0. Le point M_1 étant symétrique du point M_0 par rapport à Ox, ses coordonnées, x_1 et y_1, sont égales à x_0 et $-y_0$. Pour obtenir les coordonnées du point M_2, portons les axes parallèlement à eux-mêmes au point A ; nous aurons $x_2 = a + x'_2$, $y_2 = y'_2$ et $x_0 = a + x'_0$, $y_0 = y'_0$, puis, en appliquant les formules relatives à l'inversion,

$$x'_2 = \frac{3a^2 x'_0}{x'^2_0 + y'^2_0}, \qquad y'_2 = \frac{3a^2 y'_0}{x'^2_0 + y'^2_0};$$

de là, nous déduisons

$$x_2 = a + \frac{3a^2(x_0 - a)}{(x_0 - a)^2 + y_0^2}, \qquad y_2 = \frac{3a^2 y_0}{(x_0 - a)^2 + y_0^2}.$$

Transformons la valeur de x_2 en tenant compte de ce que $x_0^2 + y_0^2 = \frac{a^3}{x_0}$, nous aurons finalement $x_2 = \frac{a(a - x_0)}{a + 2x_0}$.

Cela posé, l'équation de la tangente au point (x, y) s'écrit

$$X(3x^2 + y^2) + 2Yxy - 3a^3 = 0,$$

et l'équation aux abscisses des points de rencontre de cette droite avec la cubique est

$$4x^2y^2(a^3 - X^3) = X[3a^3 - X(3x^2 + y^2)]^2;$$

le produit des racines est donc $\frac{4a^3x^2y^2}{(3x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2}$; en désignant par x' l'abscisse du point de rencontre de cette tangente avec la cubique, nous avons

$$x' = \frac{4a^3y^2}{(3x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2};$$

remplaçons dans cette formule y^2 par $\frac{a^3 - x^3}{x}$; nous aurons finalement

$$x' = \frac{4x(a^3 - x^3)}{a^3 + 8x^3}.$$

La valeur de x pour $x = x_0$ est alors facile à déterminer et tout revient à démontrer que pour $x = x_0$ et $x = \frac{a(a - x_0)}{a + 2x_0}$ la valeur de x' ne change pas ; ce calcul est immédiat. Les mêmes calculs peuvent se répéter pour les ordonnées et le dernier point est complètement établi

Il suffit de changer a en aj ou en aj^2 pour passer au cas des cercles imaginaires bitangents qui touchent la cubique en M'. Le résultat est évidemment le même.

Remarque. — Dans l'identité initiale dont tous nos calculs dérivent, nous n'avons pas considéré la valeur infinie de x. Mais il est évident qu'elle ne convient pas tant qu'on considère des cercles véritables. Par conséquent il n'y a pas d'autre solution que celles qui ont été trouvées.

DULIMBERT, à Grenoble.

[illegible] M. [illegible]

Remarques géométriques. — Considérons un cercle qui coupe la cubique en A, B, C, D : c'est une conique ayant six points communs avec cette courbe, I, J, A, B, C et D. Or on sait que les droites IJ, AB, CD coupent la cubique en trois autres points E, F, G, qui sont en ligne droite. La droite FG est donc parallèle à l'asymptote. Si les points A et C coïncident, ainsi que les points B et D, les deux droites AB et CD coïncident aussi et la droite FG est tangente à la cubique. Donc, quand le cercle est bitangent à la cubique, la corde des contacts passe par l'un des quatre points de contact avec cette cubique des tangentes parallèles à l'asymptote.

Supposons maintenant que ce soient les points A et B, C et D qui se confondent deux à deux ; ces droites sont tangentes à la cubique aux deux points M_0 et M_k $(k = 1, 2, 3, 4)$; elles coupent cette ligne en des points P_0 et P_k qui sont sur une même parallèle à l'asymptote ; donc les quatre points P_k coïncident avec le symétrique de P_0 par rapport à Ox.

Il est facile de voir aussi que le lieu du milieu de la corde des contacts est la podaire du point A par rapport au lieu des centres de la famille de cercles relatives à ce point.

Nous en resterons là ; pour plus de détails, voir la théorie des anallagmatiques du troisième et du quatrième ordre.

M. FRÉCHET.

Physique.

946. — *Dans une expérience de mesure de g on fait osciller un pendule autour d'un axe horizontal et l'on mesure la durée t de l'oscillation simple. Dans le plan défini par cet axe et le centre de gravité, on cherche ensuite un axe parallèle au premier, situé de l'autre côté du centre de gravité, et tel que la durée d'oscillation autour de cet axe paraisse encore être t.*

La durée de l'oscillation autour du premier axe est supposée mesurée d'une manière parfaite, mais on a pu commettre une erreur relative de un dix-millième *sur la durée d'oscillation autour du second axe.*

On demande quelle est l'incertitude sur la position du second axe, et quelle est l'incertitude qui en résulte pour la valeur de g que l'on peut déduire de la mesure de la distance des deux axes. On pourra regarder les incertitudes comme infiniment petites et ne conserver dans les calculs que les termes principaux.

On admettra que les expériences sont faites en un lieu où g vaut 981 C. G. S., *avec des pendules dont la durée d'oscillation simple, t, est de* 1 *seconde, et l'on traitera numériquement les deux cas suivants :*

1er cas. — *La distance du premier axe au centre de gravité est de* 10 *centimètres.*

2e cas. — *La distance du premier axe au centre de gravité est de* 49,7 *centimètres.*

Note. — *La durée d'oscillation simple d'un pendule autour d'un axe horizontal situé à une distance a du centre de gravité est donnée par la formule*

$$t = \pi\sqrt{\frac{a^2 + k^2}{ag}}.$$

Soit a la distance du centre de gravité au premier axe ; la première durée d'oscillation est représentée par

$$t = \pi\sqrt{\frac{a^2 + k^2}{ag}}. \tag{1}$$

Soit a' la distance du centre de gravité à un second axe pour lequel la durée d'oscillation serait rigoureusement égale à t, on a de même

$$t = \pi\sqrt{\frac{a'^2 + k^2}{a'g}}. \tag{2}$$

On en déduit d'abord, en combinant (1) et (2),

$$a' = \frac{k^2}{a} = \frac{gt^2}{\pi^2} - a$$

Soient ε l'erreur relative commise sur la seconde durée d'oscillation et α l'erreur qui en résulte pour la position du second axe ; on a

$$(3) \qquad t(1+\varepsilon) = \pi\sqrt{\frac{(a'+\alpha)^2+k^2}{(a+\alpha)g}}.$$

Élevons au carré les deux membres de cette dernière égalité et négligeons les quantités du second ordre :

$$t^2(1+2\varepsilon) = \pi^2\frac{a'^2+2a'\alpha+k^2}{(a+\alpha)g},$$

ou, en chassant le dénominateur et négligeant le terme en $\varepsilon\alpha$,

$$t^2(a+\alpha+2a\varepsilon)g = \pi^2(a'^2+2a'\alpha+k^2);$$

mais, d'après l'équation (2), on a

$$t^2ag = \pi^2(a^2+k^2).$$

Il reste donc

$$t^2(\alpha+2a\varepsilon)g = 2\pi^2a'\alpha,$$

d'où

$$\alpha = \frac{2gt^2a\varepsilon}{2\pi^2a'-gt^2},$$

ou enfin, en remplaçant a' par sa valeur en fonction de t et de a,

$$\alpha = 2\varepsilon\frac{\frac{gt^2}{\pi^2}\left(\frac{gt^2}{\pi^2}-a\right)}{\frac{gt^2}{\pi^2}-2a}.$$

D'autre part, si on désigne par γ l'erreur commise sur g, on a

$$t = \pi\sqrt{\frac{a+a'+\alpha}{g+\gamma}},$$

d'où, par un calcul analogue au précédent,

$$\gamma = \frac{\pi^2}{t^2}\alpha = 2\varepsilon g\frac{\frac{gt^2}{\pi^2}-a}{\frac{gt^2}{\pi^2}-2a}.$$

L'application numérique donne d'abord

$$\varepsilon = 0{,}0001 \qquad \text{et} \qquad \frac{gt^2}{\pi^2} = 99{,}4;$$

par suite,

$$\alpha = 0{,}0002 \times \frac{99{,}4(99{,}4-a)}{99{,}4-2a}. \qquad \gamma = 0{,}0002 \times 981 \times \frac{99{,}4-a}{99{,}4-2a}.$$

1° Pour $a = 10$, $\alpha = 0^{cm},0224$, $\gamma = 0{,}2209$.

2° Pour $a = 49{,}7$, $\alpha = \infty$, $\gamma = \infty$.

Dans ce dernier cas, le centre de gravité se trouve précisément au milieu de la longueur du pendule et le résultat obtenu se rattache à l'étude générale de la variation de t. Supposons en effet qu'on déplace d'une manière continue l'axe de suspension par rapport au centre de gravité ; la variation de t est donnée par les équations

$$t = \pi\sqrt{\frac{a^2+k^2}{ag}}, \qquad \frac{dt}{da} = \frac{\pi}{2\sqrt{g}}\frac{a^2-k^2}{\sqrt{a^3(a^2+k^2)}}.$$

Si a croît à partir de zéro, t, d'abord infini, commence par diminuer, puis il passe par un minimum pour $a = k$ ou $a = \frac{k}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire quand le centre de gravité est au milieu de la longueur du pendule. Ce minimum est égal à $\pi\sqrt{\frac{2k}{g}}$. t croît ensuite indéfiniment. Au minimum, une variation

notable de a ne produit qu'une variation insensible de t, ce qui explique l'incertitude que présente alors la détermination de la valeur de a correspondant à une valeur donnée de t.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

948. — *On considère une parabole* (P), $y^2 - 2px = 0$, *et un cercle* (C) *de centre* C *passant au sommet de cette parabole. Les trois autres points de rencontre du cercle* (C) *avec la parabole sont les pieds des normales abaissées d'un point* A *sur la parabole.*

1° *On demande les coordonnées du point* A *en fonction de celles du point* C, *l'équation de la droite* AC, *puis le lieu du point* C *et l'enveloppe de la droite* AC *quand le cercle* (C) *se meut en touchant la parabole ailleurs qu'au sommet.*

2° *Par les points de rencontre de la parabole* (P) *et du cercle* (C), *il passe une autre parabole ; déterminer le cercle* (C) *de façon qu'elle soit égale à la parabole donnée et qu'elle touche une tangente donnée* (T) *de cette parabole. Trouver le lieu de son point de contact, quand la droite* (T) *enveloppe la parabole* (P) ; *construire ce lieu. Dans les mêmes conditions, trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle autopolaire commun aux deux paraboles et construire cette courbe.*

1° Soient
$$y^2 - 2px = 0$$
et
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$$
les équations de la parabole et du cercle donnés; les coordonnées du point C sont alors représentées par α et β. Désignons par α' et β' les coordonnées du point A et exprimons que la normale au point (x, y) passe par ce point; nous aurons l'équation
$$\frac{\alpha' - x}{-p} = \frac{\beta' - y}{y},$$
qui s'écrit
$$xy + (p - \alpha')y - p\beta' = 0,$$
et qui représente, quand x et y varient, une hyperbole équilatère passant par le point à l'infini sur Ox et par les pieds des trois normales menées du point A à la parabole (P). En éliminant entre cette équation et celle de la parabole la solution $y = 0$, $z = 0$, nous formerons une conique qui passe aux pieds des trois normales et qui ne passe plus au point à l'infini. Il suffit pour cela d'écrire ainsi les deux équations
$$y \cdot y - 2px \cdot z = 0,$$
$$xy + (p - \alpha')z \cdot y - p\beta' z \cdot z = 0,$$
de les regarder comme étant linéaires en y et z et d'annuler leur déterminant; cela nous donne la parabole
$$2x^2 + 2(p - \alpha')x - \beta' y = 0$$

Il n'y a plus qu'à former une combinaison linéaire des trois équations qui représente un cercle pour obtenir le cercle qui passe aux pieds des trois normales issues du point A. Cette combinaison s'obtient en multipliant par 2 l'équation de la parabole (P) et l'ajoutant à celle-ci. Nous trouvons ainsi
$$2x^2 + y^2 - 2\alpha' x + (p - \alpha')x - \beta' y = 0.$$
Ce cercle passe à l'origine, ce qui donne le théorème bien connu que nous avons énoncé au début de la question actuelle et en identifiant son équation avec celle du cercle (C), nous avons immédiatement les coordonnées du point A en fonction de celles du point C
$$A \begin{cases} \alpha' = 2\alpha - p \\ \beta' = 4\beta. \end{cases}$$

L'équation de la droite AC, en fonction des coordonnées du point C, est donc

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ 2\alpha - p & 4\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$-3\beta x + (\alpha - p)y + \beta(2\alpha + p) = 0.$$

La condition de contact du cercle (C) avec la parabole (P) s'obtient aisément en formant l'équation aux ordonnées des points de rencontre des deux lignes; celle-ci s'obtient immédiatement : l'équation de la parabole donne $x = \frac{y^2}{2p}$; les ordonnées des points communs aux deux courbes sont donc racines de l'équation

$$y(y^3 + 4p^2 p - \alpha y - 8p^2\beta) = 0;$$

elle se décompose en $y = 0$, qui correspond à l'origine, et en

$$y^3 + 4p^2 p - \alpha y - 8p^2\beta = 0,$$

qui correspond aux trois autres points de rencontre. La condition cherchée s'obtient alors en annulant le discriminant de cette dernière équation et s'écrit

$$27p\beta^2 - 4(\alpha - p)^3 = 0.$$

Le lieu du point C est donc la parabole semi-cubique

$$(1) \qquad 27py^2 - 4(x - p)^3 = 0.$$

La relation entre α et β peut se remplacer par $\alpha - p = 3pt^2$, $\beta = 2pt^3$, et l'équation de la droite AC ne contient plus qu'un paramètre; cette équation, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de t est

$$4pt^3 + 2(p - x)t + y = 0;$$

on exprime aisément qu'elle a une racine double, et l'on trouve ainsi l'enveloppe de la droite AC,

$$(2) \qquad 27py^2 - 8(x - p)^3 = 0.$$

C'est une autre parabole semi-cubique ; c'est la développée de la parabole (P).

Nous laissons au lecteur le soin d'apercevoir géométriquement que, dans le cas actuel, le lieu du point A et l'enveloppe de la droite AC coïncident nécessairement avec la développée de la parabole proposée.

2° On sait que dans tout faisceau linéaire il y a deux paraboles ; il y a donc une seconde parabole passant par les points de rencontre de la parabole proposée et du cercle (C) ; son équation s'obtient d'ailleurs immédiatement en retranchant de l'équation du cercle celle de la parabole (P). On trouve ainsi

$$x^2 + 2(p - \alpha)x - 2\beta y = 0;$$

cette parabole a pour paramètre $|\beta|$; il faut donc faire $\beta = \pm p$. Bornons-nous au cas de $\beta = p$; nous aurons alors pour équation de cette autre parabole

$$x^2 + 2(p - \alpha)x - 2py = 0.$$

La tangente au point (x, y) est

$$X(x - p + \alpha) - pY + (p - \alpha)x - py = 0;$$

en exprimant qu'elle touche la parabole (P), on a

$$2(x - p + \alpha)(p - \alpha)x - py - p^2 = 0,$$

et le lieu du point (x, y) s'obtient en remplaçant $p - \alpha$ par $\frac{2py - x^2}{2x}$ dans cette relation. Le résultat est

$$(3) \qquad x^3 + 2px^2 - 2p^3 = 0,$$

équation d'une cubique que nous construisons ensuite.

Les sommets du triangle autopolaire commun aux coniques d'un faisceau linéaire

$$f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$$

sont, pour trois valeurs particulières de λ, les solutions communes aux équations

$$f_x + \lambda g_x = 0, \qquad f_y + \lambda g_y = 0, \qquad f_z + \lambda g_z = 0;$$

ce sont donc les trois points de rencontre des coniques

$$f'g'_1 - f'_1g' = 0, \qquad f'_1g'_2 - f'_2g'_1 = 0, \qquad f'_2g' - f'g'_2 = 0.$$

Dans le cas actuel, où les coniques de base ont pour équations

$$y^2 - 2px = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 + 2(p-\alpha)x - 2py = 0,$$

les trois coniques précédentes sont représentées par

$$xy + (p-\alpha)y - p^2 = 0, \qquad x^2 + py = 0, \qquad py + (p-\alpha)y - p^2x = 0.$$

En multipliant la première équation par $p-\alpha$, la seconde par p, la troisième par 1 et ajoutant, on obtient le cercle qui fait partie du réseau déterminé par ces trois coniques, c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle autopolaire commun.

$$p(x^2+y^2) + p^2(x-y) + (p-\alpha)y - p(p-\alpha) = 0.$$

Il n'y a plus qu'à écrire que cette équation, regardée comme étant du second degré en $p-\alpha$, a une racine double, pour obtenir l'enveloppe de ce cercle mobile. C'est la courbe

$$(4) \qquad 4y(x^2+y^2) + 4py(x+y) + y(y-p)^2 = 0.$$

Construisons maintenant les deux lignes représentées par les équations (3) et (4).

L'équation (3) donne de suite

$$2py = -x - \frac{2p}{x},$$

nous voyons alors immédiatement que cette courbe admet la parabole $x^2+2py=0$ pour parabole asymptote, que, pour $x>0$, elle est au-dessous de Ox, et qu'à gauche de l'axe des y, elle est au-dessous de Ox pour les grandes valeurs de x, au-dessus à partir de $x=-p\sqrt[3]{2}$; en outre, elle admet l'axe des y comme asymptote; puis son ordonnée présente un maximum pour $x=p$, la valeur correspondante de y étant $-\frac{3p}{2}$. Cela suffit pour la construction de la ligne considérée (*fig.* 1).

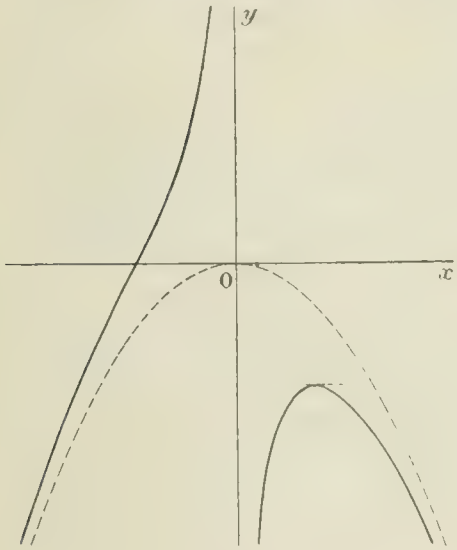


Fig. 1

Pour construire la courbe (4), nous remarquons que son équation est du second degré en x et nous discutons cette équation en y regardant x comme variable principale et y comme variable paramétrique. L'équation, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x, est

$$4yx^2 + 4pyx + 4y^3 - 4py^2 - p^3 = 0;$$

les deux premiers coefficients changent de signes pour $y=0$; le dernier, $4y^3+4py^2-p^3$, change de signe pour une valeur unique, positive, comprise entre 0 et $\frac{p}{2}$ et voisine de $\frac{p}{2}$, $y=y_0$. Donc, quand y varie de $-\infty$ à 0, il n'y a pas de racine positive, il y a 0 ou 2 racines négatives; de 0 à y_0, il y a une racine positive et une négative; de y_0 à $+\infty$, pas de racine positive, 0 ou 2 négatives. La condition de réalité achève de nous fixer; c'est ici

$$4y^3 + 4py^2 - p^3 \geq 0.$$

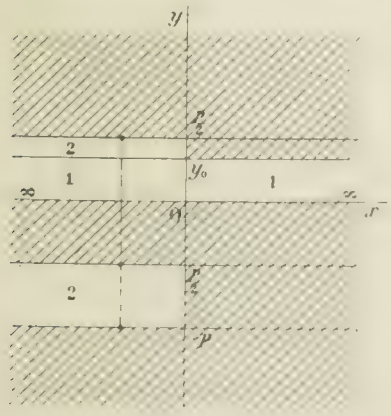


Fig. 2

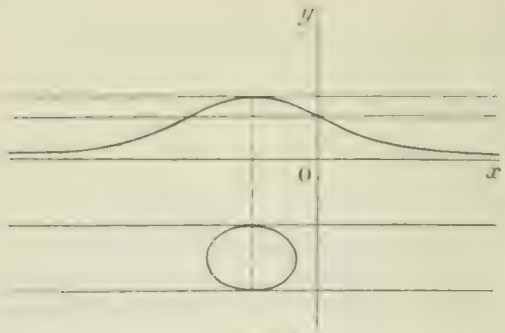


Fig. 3.

Elle montre que les racines sont réelles de $-p$ à $-\frac{p}{2}$ et de 0 à $\frac{p}{2}$. Enfin, en remarquant que pour $y = 0$ il y a une racine double infinie et pour $y = -p$ ou $-\frac{p}{2}$ ou $\frac{p}{2}$ une racine double égale à $-\frac{p}{2}$, il est facile de compléter la discussion. Les résultats principaux en sont fournis par la figure 2. La courbe s'en suit immédiatement (*fig.* 3).

La solution que nous avons négligée, $\beta = -p$, donnerait des courbes symétriques par rapport à Ox.

CANS, à Versailles.

Bonne solution : MM. F. Pégorier, à Toulouse ; J.-D. Dufaut, à Aiguillon.

QUESTIONS PROPOSÉES

1011. — On considère une droite ZZ et un plan P. Etudier le complexe des droites D telles que le point d'intersection de la droite D et du plan soit le pied de la perpendiculaire commune aux deux droites ZZ et D.

P. Puig.

1012. — Si un triangle varie en restant inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique, le cercle qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les côtés du triangle reste orthogonal à un cercle fixe.

1013. — On considère une sphère variable tangente au plan des xy en un point de Ox et telle que la cote du point du cône circonscrit de sommet O qui se projette au point de contact soit constante, et on demande :

1° Le lieu du centre de cette sphère ;

2° Le lieu du grand cercle de cette sphère perpendiculaire au plan des zx et dont le plan passe au point O. Construire la trace de cette surface sur le plan des zx.

3° On considère la ligne qui joint les centres de deux sphères infiniment voisines, et on demande le lieu de la projection de l'origine sur cette droite.

E. H.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE (1900, 1re Session).

Géométrie analytique.

959. — *Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on prend sur l'axe Ox les points A, A' dont les abscisses sont a et $6a$ puis, sur l'axe Oy, le point B d'ordonnée $3a$. On considère le faisceau des hyperboles équilatères circonscrites au triangle AAB.*

1° *Former l'équation générale de ces coniques et en déduire que ces courbes ont un quatrième point commun.*

Trouver le lieu des centres et tracer cette ligne.

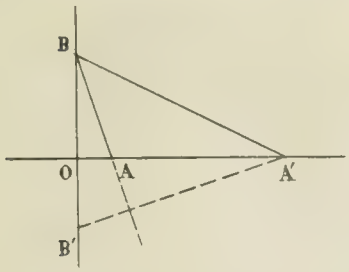
2° *Trouver le lieu du point M du plan pour lequel l'hyperbole équilatère MAAB se réduit à deux droites.*

3° *Former l'équation du lieu* S *des points* M *du plan pour lesquels l'axe de l'une des paraboles* MAA'B *est également incliné sur les asymptotes de l'hyperbole équilatère circonscrite au même quadrilatère.*

4° M *étant un point d'abscisse* $2a$ *et d'ordonnée positive sur le lieu* S, *construire les axes mêmes des paraboles* MAA'B *et les asymptotes de l'hyperbole équilatère passant par ces mêmes points.*

5° *Voir par le calcul si l'on peut déterminer un point* M *sur le lieu* S, *par la condition que toutes les coniques circonscrites au quadrilatère* MAA'B *aient mêmes directions d'axes.*

1. Soit
$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$
l'équation générale des hyperboles équilatères circonscrites au triangle AA'B. On a les relations
$$a^2 + 2Da + F = 0, \quad 36a^2 + 12Da + F = 0, \quad -9a^2 + 6Ea + F = 0,$$
d'où
$$2D = -7a, \qquad 2E = a, \qquad F = 6a^2.$$



L'équation générale cherchée est donc

(1) $$x^2 - 2\lambda xy - y^2 - 7ax + ay + 6a^2 = 0.$$

Toutes ces hyperboles passent par quatre points fixes qui sont les points d'intersection de l'hyperbole équilatère
$$x^2 - y^2 - 7ax + ay + 6a^2 = 0 \quad \text{et des droites} \quad xy = 0.$$

L'intersection avec l'axe des x donne les points A et A'; l'intersection avec l'axe des y donne le point B et le point B' ($x = 0$, $y = -2a$). Ce point B' n'est autre chose que l'orthocentre du triangle AA'B.

Cela était d'ailleurs évident géométriquement, car on sait que toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe aussi par l'orthocentre de ce triangle. Ce point B' est facile à déterminer; en effet, les deux triangles rectangles AOB, A'OB' sont semblables, et l'on a
$$\frac{OB'}{OA} = \frac{OA'}{OB} = 2, \qquad \text{donc} \qquad OB' = 2OA = 2a.$$

Le centre de l'hyperbole (1) est à l'intersection des deux droites
$$2x + 2\lambda y - 7a = 0, \qquad 2\lambda x - 2y + a = 0.$$

L'élimination de λ entre ces deux équations donne pour le lieu des centres

(2) $$2(x^2 + y^2) - 7ax - ay = 0.$$

On reconnait aisément que ce cercle n'est autre que le cercle des neuf points du triangle AA'B.

Géométriquement, on sait que le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle des neuf points de ce triangle.

2. Soit M (x_0, y_0) un point tel que l'hyperbole équilatère MAA'B se réduise à deux droites. On aura d'abord

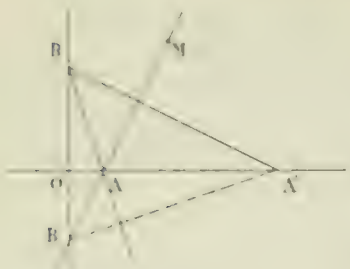
(3) $$x_0^2 + 2\lambda x_0 y_0 - y_0^2 - 7ax_0 + ay_0 + 6a^2 = 0,$$

puis, en annulant le discriminant de (1),

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \dfrac{-7a}{2} \\ \lambda & -1 & \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{-7a}{2} & \dfrac{a}{2} & 6a^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{ou} \qquad 12\lambda^2 - 7\lambda - 12 = 0.$$

Cette équation devrait être du troisième degré (équation en λ); elle admet une racine infinie et deux racines finies $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{4}{3}$; à chacune de ces racines correspond un lieu du point M :

A la racine infinie, correspond l'hyperbole équilatère $xy = 0$, décomposée en deux droites : le côté AA' du triangle et la hauteur BB' correspondante ;



Aux deux autres racines $\lambda = \frac{3}{4}$, $\lambda = -\frac{4}{3}$, correspondent les deux hyperboles équilatères

$$(5) \qquad x^2 + \frac{3}{2}xy - y^2 - 7ax + ay + 6a^2 = 0,$$

décomposée en deux droites : le côté A'B et la hauteur AB', et

$$(6) \qquad \frac{8}{3}xy - y^2 - 7ax + ay + 6a^2 = 0,$$

décomposée en deux droites : le côté AB et la hauteur A'B'.

Le lieu complet se compose donc de l'ensemble des côtés et des hauteurs du triangle AA'B.

Géométriquement, soit M un point du lieu. L'hyperbole équilatère correspondante devant passer en A, A', B, B', et se décomposer en deux droites, M doit forcément se trouver sur un des côtés ou sur l'une des hauteurs. Le lieu se compose donc des trois côtés et des trois hauteurs du triangle.

3. Soit encore $M(x_0, y_0)$ un point quelconque du plan.

L'hyperbole équilatère circonscrite au quadrilatère AA'BM a pour équation

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 7ax + ay + 6a^2 = 0,$$

avec

$$x_0^2 + 2\lambda x_0 y_0 - y_0^2 - 7ax_0 + ay_0 + 6a^2 = 0.$$

Soit

$$(7) \qquad y = mx^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une parabole MAA'B. On aura

$$m^2a^2 + 2Da + F = 0, \qquad 36m^2a^2 + 12Da + F = 0, \qquad 9a^2 + 6Ea + F = 0.$$

On en tire $2D = -7am^2$, $F = 6a^2m^2$, $2E = -a(3 + 2m^2)$. L'équation de la parabole MAA'B est donc

$$(8) \qquad y - mx^2 + 7am^2x - a(3 + 2m^2)y + 6a^2m^2 = 0;$$

elle est vérifiée pour les coordonnées x_0, y_0,

$$(9) \qquad y_0 - mx_0^2 + 7am^2x_0 - a(3 + 2m^2)y_0 + 6a^2m^2 = 0.$$

Les coefficients angulaires des axes de l'hyperbole sont racines de l'équation

$$\lambda\mu^2 + 2\mu - \lambda = 0.$$

L'axe de la parabole (6) étant également incliné sur les asymptotes, est parallèle à l'un des axes de l'hyperbole.

Nous pouvons donc poser $\qquad m = \mu.$

Alors

$$\lambda = \frac{2\mu}{1 - \mu^2} = \frac{2m}{1 - m^2},$$

et l'égalité relative à l'hyperbole équilatère devient

$$(10) \qquad x^2 + \frac{4m}{1 - m^2}x_0 y - y^2 - 7ax_0 + ay_0 + 6a^2 = 0.$$

Tout revient à éliminer m entre les deux équations (7) et (10) ; ajoutons-les membre à membre ; nous trouvons

$$(11) \qquad (x_0 + my_0)^2 - 7ax_0 - a(2 - 3m^2)y_0 + 6a^2 = 0.$$

L'élimination de m entre (7) et (11) se fait alors immédiatement en ajoutant ces deux équations membre à membre, ce qui donne, après suppression du facteur $(1 + m^2)$,

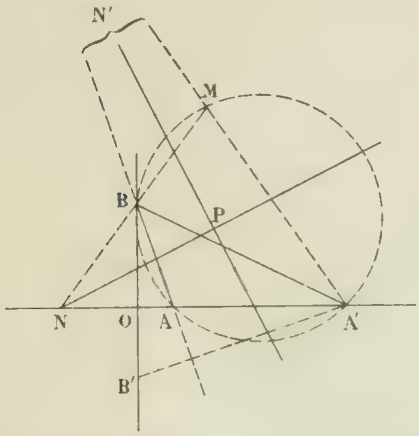
$$(12) \qquad x^2 + y^2 - 7ax - 5ay + 6a^2 = 0.$$

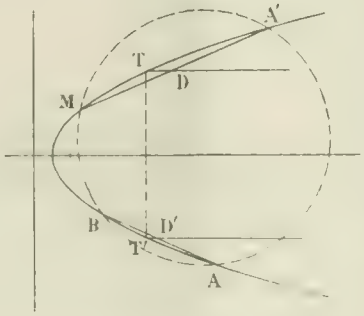
Le lieu de M est donc un cercle ; on reconnaît aisément que c'est le cercle circonscrit au triangle AA'B.

Ce résultat peut être obtenu beaucoup plus rapidement par la géométrie.

En effet, l'axe de l'une des paraboles AA'BM étant également incliné sur les asymptotes de l'hyperbole AA'BM, est parallèle à l'un des axes de cette hyperbole. Les quatre points d'intersection de ces deux coniques sont donc sur un cercle, et ce cercle est fixe puisqu'il est circonscrit au triangle donné AA'B.

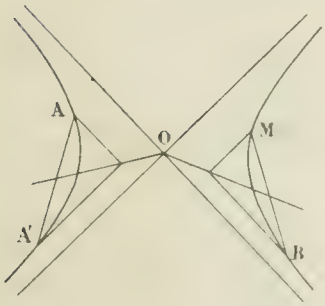
4. L'équation (7) montre que par chaque point M du plan passent deux paraboles P_1 et P_2. Si le point M se trouve sur le cercle (S), leurs axes sont rectangulaires et parallèles respectivement aux axes de l'hyperbole équilatère (AA'BM).





Construisons d'abord les axes des deux paraboles ; nous en connaissons les directions, ce sont celles des bissectrices des angles formés par les côtés opposés du quadrilatère, NP et N'P ; considérons par exemple les deux côtés MA' et BA ; ils sont également inclinés sur l'axe de la parabole ; les diamètres correspondants sont *équidistants* de l'axe ; en effet, les tangentes aux extrémités T et T' de ces diamètres sont parallèles à MA' et BA, par suite également inclinées sur l'axe ; donc T et T' sont symétriques par rapport à l'axe. Pour avoir ces diamètres nous n'avons qu'à mener par les milieux de MA' et BA des parallèles à N'P : d'où la construction de l'axe correspondant. On construirait de même l'axe de la deuxième parabole P_2.

Pour construire les asymptotes de l'hyperbole AA'BM, il suffit d'en trouver le centre, puisque les asymptotes font des angles de 45° avec chacun des axes des paraboles ou avec les bissectrices PN, PN'.



Or, on sait que si par deux points d'une hyperbole on mène des parallèles aux asymptotes, le point de concours appartient au diamètre conjugué de la corde joignant les deux points ; la direction des asymptotes étant connue, on construit immédiatement ce diamètre conjugué. Comme nous avons quatre points de l'hyperbole, nous pouvons tracer au moins deux diamètres qui nous donneront le centre de l'hyperbole, et par suite ses asymptotes.

Analytiquement, le point M donné a pour abscisse $x_0 = 2a$ et pour ordonnée la racine positive de l'équation

$$y^2 - 5ay + 4a^2 - 14a^2 + 6a^2 = y^2 - 5ay - 4a^2 = 0,$$

c'est-à-dire
$$y_0 = a\,\frac{5 + \sqrt{41}}{2}.$$

L'équation (7) qui donne les coefficients angulaires des axes des paraboles passant par un point M (x_0, y_0) peut s'écrire

$$(7) \qquad m^2(x_0^2 - 7ax_0 - 2ay_0 + 6a^2) - 2mx_0y_0 - y_0^2 - 3ay_0 = 0,$$

ou, en tenant compte de ce que le point (x_0, y_0) est situé sur le lieu S,

$$(m^2 - 1)(y_0^2 - 3ay_0) + 2mx_0y_0 = 0,$$

d'où
$$\frac{2m}{1 - m^2} = \frac{y_0 - 3a}{x_0} = \frac{\sqrt{41} - 1}{4};$$

au lieu de calculer les valeurs de M, remarquons que $\frac{y_0 - 3a}{x_0}$ est le coefficient angulaire de la droite MB qui joint le point M (x_0, y_0) au point B $(0, 3a)$; on aura donc les directions des axes des deux paraboles en prenant les bissectrices des angles formés par MB avec l'axe des x. Connaissant quatre points d'une parabole et la direction de l'axe, on peut construire les tangentes en deux de ces points. Hexagone de

Pascal et on est ramené à déterminer l'axe d'une parabole, connaissant deux tangentes avec leurs points de contact, problème connu.

5. Soit M un point quelconque de S. Les coniques circonscrites au quadrilatère AA'BM, ont toutes mêmes directions d'axes, à savoir les directions des bissectrices NP et N'P, puisque les quatre points AA'BM sont un cercle. Si donc on faisait le calcul demandé, on trouverait que tous les points du lieu S satisfont à la condition énoncée.

J.-D. DUFAUT, à Aiguillon.

Géométrie descriptive.

OMBRE D'UNE SPHÈRE SUR UN HÉMISPHÈRE

962. — *On donne : 1° une sphère* C *de rayon* $r = 50^{mm}$.

Projection du centre C *à* 130^{mm} *du côté gauche du cadre et à* 95^{mm} *au-dessus du côté inférieur.*

Cote du centre au-dessus du plan horizontal $= 120^{mm}$.

2° un hémisphère reposant par sa base sur le plan horizontal, rayon $R = 80^{mm}$.

Centre O *dans le plan horizontal à* 260^{mm} *du côté gauche du cadre et à* 135^{mm} *au-dessus du côté inférieur.*

3° une direction lumineuse — cette direction faisant avec le plan horizontal un angle de 40° *et sa projection horizontale faisant avec le grand côté du cadre un angle de* 25° *— et l'on demande de déterminer en* projection horizontale :

a. *Les ombres propres de la sphère et de l'hémisphère éclairés par des rayons lumineux parallèles à la direction donnée ;*

b. *L'ombre portée par la sphère sur l'hémisphère ;*

c. *L'ombre portée par l'hémisphère sur le plan horizontal.*

On aura soin de recouvrir de hachures noires régulièrement espacées les parties vues en projection horizontale, qui sont dans l'ombre.

Les courbes d'ombres propres ou portées seront déterminées par points.

On indiquera à l'encre rouge et pour chacune d'elles la construction d'une tangente.

Il sera tenu compte de la recherche des points et droites remarquables.

1° *Ombre propre de la sphère.* — Prenons pour plan vertical de projection le plan projetant horizontalement la parallèle aux rayons lumineux menée par le centre C de la sphère ; la ligne de terre xy passera par c et fera un angle de 25° avec le grand côté du cadre. La courbe d'ombre sur la sphère est le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à cette direction de rayons lumineux ; ce plan, de bout dans le système xy, a pour trace verticale $c'e$. On en déduit la projection horizontale de ce grand cercle ; c'est l'ellipse de grand axe ab et de demi-petit axe ce. Pour en avoir un point quelconque, nous prenons sur $c'e$ un point quelconque m' et sur la ligne de rappel $m'p$ nous prenons $pm = m'r'$. La tangente mt en m est obtenue en joignant m à t où M_1t rencontre ab.

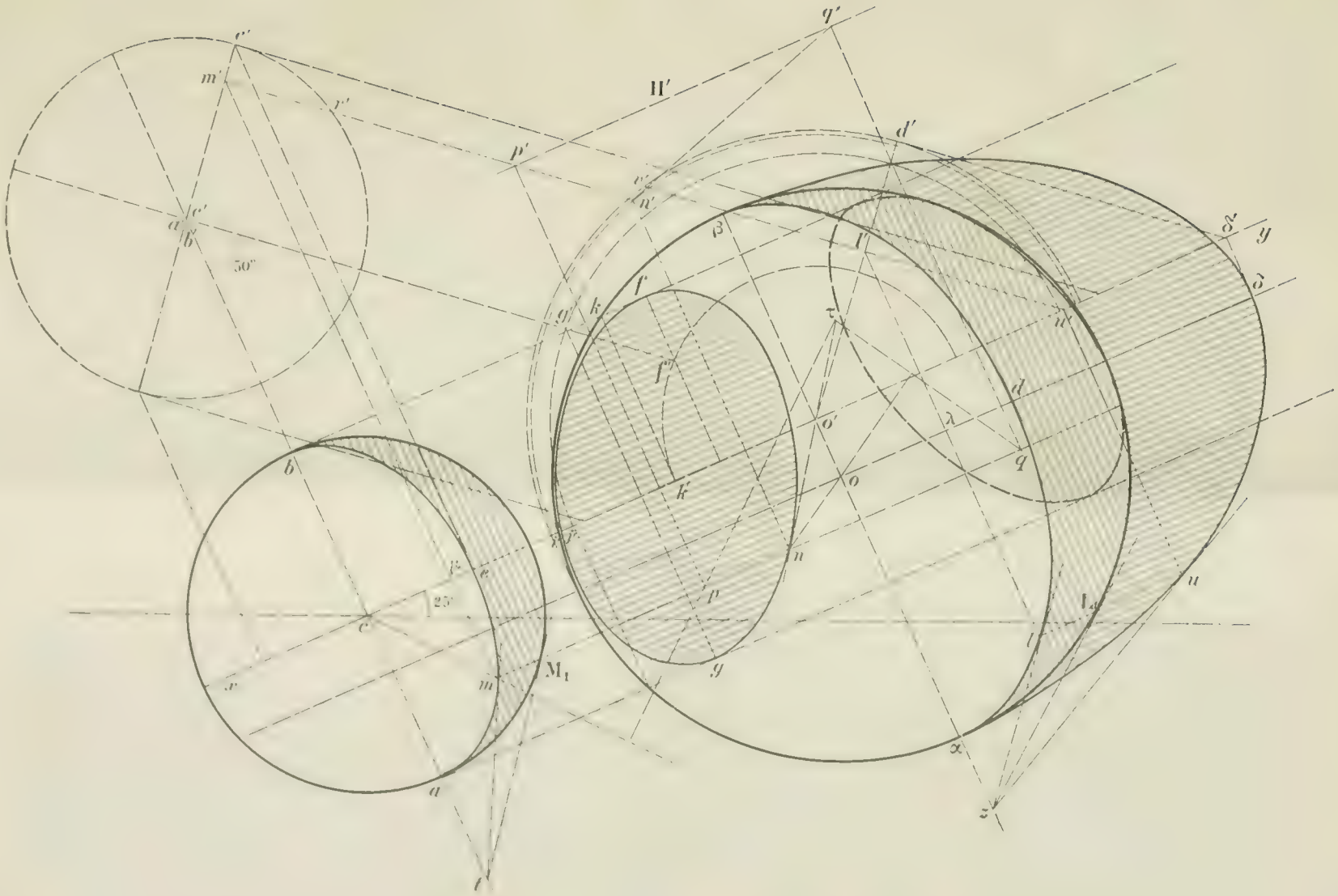
2° *Ombre propre de l'hémisphère.* — Nous procédons comme dans le cas précédent avec l'hémisphère dont le centre est o, o' et nous trouvons en projection horizontale une demi-ellipse xyd projection de la séparatrice de l'ombre sur cet hémisphère.

3° *Ombre portée par la sphère sur l'hémisphère.* — Cette ombre est l'intersection de l'hémisphère et du cylindre circonscrit à la sphère dont les génératrices sont parallèles à la direction des rayons lumineux. La directrice de ce cylindre est la courbe d'ombre propre sur la sphère.

Pour avoir un point quelconque de cette ombre portée, nous prenons sur la directrice de ce cylindre un point quelconque (m, m') et nous menons la génératrice $(mn, m'n')$ de ce point.

Le plan projetant horizontalement cette génératrice coupe l'hémisphère suivant un demi-cercle projeté verticalement en vraie grandeur sur le cercle de centre o et de rayon oi' qui est rencontré par $m'n'$ en n' d'où le point n, n' de cette ombre portée. La tangente nz en ce point est l'intersection des plans tangents en N à l'hémisphère et au cylindre ; nous l'avons construite à l'aide d'un plan horizontal auxiliaire H, qui coupe ces deux plans tangents suivant les horizontales pz et qz ; d'où le point z.

Nous avons obtenu, comme points remarquables, les points g et k sur le contour apparent horizontal du cylindre circonscrit à la sphère.



H'
q'
d'
p'
c'
m'
r'
a'
b'
50°
β
f
k
g
f'
k'
o'
o
n
p
g
τ
λ
d
q
u'
δ'
y
δ
u
α
z
b
c
e
25°
x
m
M₁
a
t

L'intersection du cylindre et de la sphère complète de centre O se compose de deux courbes distinctes dont l'une, entièrement située sur l'hémisphère supérieur, qui est celui donné, reste ; l'autre a un seul arc sur cet hémisphère ; l'autre arc de cette seconde courbe est sur l'hémisphère inférieur et ne fait pas partie de la courbe cherchée puisqu'on ne considère que l'hemisphère supérieur. Il ne devrait donc pas être représenté. Ici, pour mieux montrer la forme de courbe, nous l'avons conservé en le marquant d'un trait de construction.

Ombre portée par l'hémisphère sur le plan horizontal. — C'est la trace horizontale du cylindre circonscrit à l'hémisphère et dont les génératrices sont parallèles aux rayons lumineux. Pour en avoir un point quelconque, nous prenons sur la directrice de ce cylindre, qui est le demi-grand cercle d'ombre propre sur l'hémisphère, un point quelconque (d, d') et menons par ce point la parallèle $(lu, l'u')$ aux rayons lumineux. Sa trace horizontale est (u, u') et u est un point quelconque de cette ombre portée. La tangente en ce point est la trace horizontale (uz) du plan tangent à l'hémisphère au point L.

Cette ombre portée est une demi-ellipse de petit axe xz et de demi-grand axe $o\lambda$, le point λ étant la trace horizontale de la parallèle aux rayons lumineux menée par (d, d').

N. C.

ALGÈBRE

965. — *Trouver un polynome entier $f(x)$ tel que la dérivée du produit $e^x f(x)$ soit $e^x(x-1)(x-2)$. Étudier la fonction ainsi formée.*

La dérivée de $e^x f(x)$ étant $e^x[f(x)+f'(x)]$, nous devons avoir identiquement

$$f(x)+f'(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2.$$

Cette identité nous montre que $f(x)$ doit être du second degré ; nous avons donc

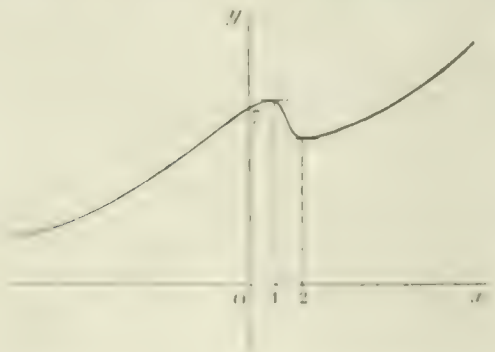
$$f(x)=ax^2+bx+c\,;$$

par suite
$$ax^2+bx+c+2ax+b=x^2-3x+2\,;$$
d'où l'on déduit immédiatement
$$a=1,\qquad b+2a=-3,\qquad b+c=2,$$
c'est-à-dire
$$a=1,\qquad b=-5,\qquad c=7.$$

La fonction cherchée est donc

$$e^x(x^2-5x+7).$$

Pour étudier cette fonction, il suffit de connaître les signes de la dérivée. Or, celle-ci, qui est donnée *a priori*, $e^x(x-1)(x-2)$, est positive de $-\infty$ à 1, négative de 1 à 2, positive de 2 à $+\infty$. La fonction est donc croissante dans le premier intervalle, décroissante dans le second et croissante dans le troisième. D'ailleurs, pour les grandes valeurs de x, la fonction peut s'écrire $x^2e^x\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)$, les deux derniers facteurs tendent vers 1 ; le premier, x^2e^x, tend vers 0 pour $x=-\infty$ et grandit indéfiniment pour $x=+\infty$. En outre, pour $x=1$, la fonction est égale à $3e$, et pour $x=2$ elle est égale à e^2. Nous avons dès lors tout ce qu'il faut pour indiquer la marche de la fonction et pour en tracer la courbe représentative.



Nous pouvons même ici trouver aisément les points d'inflexion de cette courbe en cherchant les racines de la dérivée seconde, qui se trouve et se résout immédiatement.

P. TRIBIER.

Bonne solution de M. J. FRANGESCHINI.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

951. — *On considère un ellipsoïde* (E) *et une section centrale* (C); *soit* A *le point de rencontre de l'ellipsoïde et du diamètre conjugué du plan de* (C).

1° *Démontrer que si ce plan tourne autour du centre* O *de l'ellipsoïde, le cône qui a pour base la conique* (C) *et pour sommet le point* A *garde un volume constant.*

2° *Trouver le lieu d'un point* B *quelconque de* OA *et tel que le volume du cône de sommet* B *et de base* (C) *soit constant et égal à* V.

3° *Trouver le lieu d'un point* C *de la perpendiculaire en* O *au plan de la conique* (C) *et tel que le volume du cône de sommet* C *et de base* (C) *soit constant et égal à* V.

1. Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ l'équation de l'ellipsoïde (E) rapporté à ses axes et $ux+vy+wz=0$ celle du plan de la section centrale (C); on sait que les demi-longueurs d'axes de section sont racines de l'équation

$$\frac{u^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho^2}}+\frac{v^2}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho^2}}+\frac{w^2}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}}=0,$$

ou $$u^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)+v^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)+w^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)=0,$$

ou encore

$$\frac{1}{\rho^4}(u^2+v^2+w^2)-\frac{1}{\rho^2}\left[u^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+v^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+w^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]+\frac{u^2}{b^2c^2}+\frac{v^2}{c^2a^2}+\frac{w^2}{a^2b^2}=0.$$

Il en résulte que le produit des demi-longueurs d'axes de l'ellipse (C) est

$$abc\sqrt{\frac{u^2+v^2+w^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}},$$

et, par suite, l'aire de l'ellipse (C) est

$$S=\pi abc\sqrt{\frac{u^2+v^2+w^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}}.$$

Le diamètre conjugué du plan a pour équation

$$\frac{x}{a^2u}=\frac{y}{b^2v}=\frac{z}{c^2w}=\lambda;$$

un point quelconque de ce diamètre a pour coordonnées

$$x=a^2u\lambda,\qquad y=b^2v\lambda,\qquad z=c^2w\lambda;$$

en écrivant que ce point est sur l'ellipsoïde, nous aurons les valeurs de λ relatives aux points de rencontre du diamètre et de l'ellipsoïde. Nous obtenons ainsi

$$\lambda^2(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)=1\qquad\text{ou}\qquad\lambda^2=\frac{1}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}$$

et, par suite, les coordonnées du point A sont

$$x=\frac{a^2u}{\varepsilon\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}},\qquad y=\frac{b^2v}{\varepsilon\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}},\qquad z=\frac{c^2w}{\varepsilon\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}}$$

ε étant égal à ± 1.

La distance de ce point au plan de l'ellipse (C) est

$$h=\sqrt{\frac{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}{u^2+v^2+w^2}}.$$

Comme le volume d'un cône est égal à la surface de la base multipliée par le tiers de la hauteur, le

volume du cône considéré est $\frac{1}{3}Sh$, c'est-à-dire $\frac{1}{3}\pi abc$; ce volume est constant et égal au tiers du volume de l'ellipsoïde.

2. Soient

$$(1) \qquad x = a^2u\lambda, \qquad y = b^2v\lambda, \qquad z = c^2w\lambda$$

les coordonnées d'un point B situé sur OA. La distance du point B au plan de l'ellipse (C) est

$$h' = \frac{\lambda(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2)}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}};$$

le volume du cône de sommet B et de base (C) est $\frac{1}{3}Sh'$, ou $\frac{1}{3}\pi abc\lambda\sqrt{a^2u^2 + b^2w^2 + c^2w^2}$. On doit donc avoir

$$(2) \qquad \frac{1}{3}\pi abc\lambda\sqrt{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2} = V,$$

et nous aurons le lieu du point B en éliminant λ, u, v, w entre les équations (1) et (2). Cette élimination est fort simple, car l'équation (2) peut s'écrire

$$\frac{1}{9}\pi^2a^2b^2c^2(a^2u^2\lambda^2 + b^2v^2\lambda^2 + c^2w^2\lambda^2) = V^2,$$

et en y remplaçant $u\lambda$, $v\lambda$, $w\lambda$ respectivement par $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$ et $\frac{z}{c^2}$, nous obtenons

$$\frac{1}{9}\pi a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = V^2.$$

C'est l'équation du lieu; elle représente un ellipsoïde homothétique et concentrique à l'ellipsoïde E.

3. Un point C de la perpendiculaire en O au plan de la conique (K) a pour coordonnées

$$(3) \qquad x = \lambda u, \qquad y = \lambda v, \qquad z = \lambda w.$$

La distance de ce point au plan de la conique est $\lambda\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, et, par suite, le volume du cône de sommet C et de base (C) est

$$(4) \qquad V = \frac{1}{3}\pi abc\lambda\frac{u^2 + v^2 + w^2}{\sqrt{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2}}.$$

En éliminant λ, u, v, w entre (3) et (4), nous aurons le lieu du point C; pour cela, dans l'équation (4), nous remplaçons u, v, w respectivement par $\frac{x}{\lambda}$, $\frac{y}{\lambda}$, $\frac{z}{\lambda}$; λ disparaît, et, en élevant au carré, nous obtenons pour équation du lieu

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - \frac{9V^2}{\pi^2a^2b^2c^2}(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) = 0,$$

qui représente une surface du quatrième ordre.

Solution géométrique des deux premières parties. — Soient OM et ON les axes de l'ellipse (C). Le parallélépipède construit sur OA, OM, ON a pour volume abc, en vertu d'un théorème d'Apollonius; par suite, la pyramide (P) qui a pour sommet le point A et pour base le rectangle (R) construit sur OM et ON a pour volume $\frac{1}{3}abc$. Or le rapport de l'aire de l'ellipse (C) à celle du rectangle (R) est $\frac{\pi . OM . ON}{OM . ON}$ ou π, et comme le rapport des volumes du cône de sommet A et de base (C) et de la pyramide (P) est égal au rapport des bases, on en conclut que le volume du cône est $\frac{1}{3}\pi abc$. Désignons ce volume par V_0.

Considérons d'autre part un point B situé sur OA. Le rapport des volumes des deux cônes de base

(C) et de sommets B et A, est égal au rapport des hauteurs, ou au rapport $\frac{OB}{OA}$. On a donc $\frac{OB}{OA} = \frac{V}{V_0}$. Comme V et V_0 sont constants, $\frac{OB}{OA}$ est constant, et le lieu du point B est un ellipsoïde homothétique de (E), le centre d'homothétie étant le point O, et le rapport d'hymothétie étant égal à $\frac{V}{V_0}$.

Bonne solution par M. Balaban din Moldova. G. DE FRANCE, à Versailles.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1900).

Arithmétique (M. Combette).

1516. — Nombre de chiffres d'un produit ab. Limites supérieure et inférieure du nombre des chiffres de A^n.

1517. — On donne le nombre 7318 écrit dans le système décimal. L'écrire dans le système de base 7.

1518. — Restes des divisions de 738 et de 738^{10} par 11.

1519. — Le produit de cinq nombres entiers consécutifs est divisible par 5 ! — Étendre la propriété au cas de p nombres entiers consécutifs.

1520. — Former les diviseurs d'un nombre entier N. Quel est le nombre de ces diviseurs ? Ex. : $N = 2^3 3^2 7^2$, $N = 2^2 3^2 7^3$, $N = 3^2 5^2 7$, $N = 3^5 5^3 7$.

1521. — $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ étant deux fractions irréductibles, à quelle condition la fraction $\frac{ab' + ba'}{bb'}$ est-elle irréductible ?

1522. — On donne le produit de deux nombres qui diffèrent de deux unités. Trouver ces nombres par l'arithmétique. — Cas où les deux nombres diffèrent de trois unités.

1523. — La racine carrée de $a(a+1)$ est-elle plus approchée de a que de $a+1$?

1524. — On donne les dimensions d'un rectangle : $a = 2^m,58$ à 1 centième près et $b = 1^m,415$ à 1 millième près. Avec combien de chiffres exacts peut-on calculer la surface ?

1525. — On donne les deux nombres 37,48 à 1 centième près et 2,534 à 1 millième près. Quelle est l'erreur relative de leur produit ?

1526. — Effectuer le produit $41,352845 \times 2,694128$ à 1 centième près.

1527. — Calculer $\pi \times 41,6912$, $\pi\sqrt{3}$, π^2 à un centième près.

1528. — Le rayon d'un cercle est $R = 4^m,751$. Calculer la longueur de la circonférence $C = 2\pi R$ à 1^{cm} près.

1529. — Le rayon d'un cercle est $R = 12^m,75$. Calculer sa surface à 1^{cm} près.

1530. — Calculer à 1 centième près la surface d'une sphère de rayon $R = 51^m,317$.

1531. — Quotient à 1 centième près de 3,927618 par 0,543228.

1532. — La longueur d'une circonférence est $51^m,3$. Avec quelle approximation peut-on calculer son rayon ?

1533. — Qu'appelle-t-on racine carrée à une unité près de 75,917 ? Montrer qu'un nombre terminé par un 7 ne peut pas être un carré parfait.

1534. — Racine carrée à une unité près de 7543. On retranche 100 unités, la racine est-elle la même ? La racine obtenue est-elle approchée à une demi-unité près ?

1535. — Racine carrée de 71,645 à 1 millième près.

1536. — Racine quatrième de π à 1 centième près.

Algèbre (M. Combette).

1537. — Démontrer que $A^m \times A^n = A^{m+n}$. Donner la suite des théorèmes relatifs à l'interversion des facteurs d'un produit. Étendre la démonstration aux nombres incommensurables. Ex. : $\pi\sqrt{3}$.

1538. — Rendre rationnel le dénominateur de la fraction $\frac{a}{\sqrt{a^2} + \sqrt{a}}$.

1539. — Division de $x^n \pm a^m$ par $x \pm a$.

1540. — Décomposer $x^2 + px^2 + q$ en un produit de facteurs réels du second degré.

1541. — Condition pour que $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ puisse se mettre sous forme d'une somme de deux radicaux simples.

1542. — Condition pour que le polynôme $ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots + l$ puisse se réduire 1° à un produit de facteurs linéaires en x et y, 2° à un carré parfait.

1543. — On donne une progression géométrique $a, b, c, \ldots, h, k, l$. Calculer la somme $S = abc + bcd + \ldots + hkl$.

1544. — Calculer les intérêts produits par un capital C placé à intérêts composés au taux r pendant n années et une fraction f d'année.

1545. — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 1, \\ 5x + 3y - 2z = 5, \\ 8x + y - 2z = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 1, \\ 5x - 2y + 4z = 5, \\ 9x + y + 2z = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y + 2z = 1, \\ 4x + 2y - 3z = 2, \\ x + 5y + 2z = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y + 2z = 4, \\ 7x + 2y + 3z = 7, \\ 4x + 3y - 5z = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 0, \\ 3x + 5y - 4z = 0, \\ 4x - 3y - z = 0. \end{cases}$$

1546. — Sachant que le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = 0,$

en déduire la relation $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ (A, B, C, D, A', B', C', D' sont les mineurs relatifs aux éléments $a, b, c, d, a', b', c', d'$).

1547. — Former un polynome du troisième degré prenant les valeurs 3, 4, 2, 1 pour les valeurs 1, 0, 3, 2 de la variable x.

1548. — Former un polynome du troisième degré prenant les valeurs 3, 4, 1, 8 pour $x = 2, 3, -2, -5$.

1549. — Calculer les sommes $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1)$,
$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + 98.99.100$.

1550. — Vérifier que la somme des cubes des n premiers nombres est égale au carré de leur somme.

1551. — Calculer $(a + b + c)^3$.

1552. — Terme général du développement de $(a + b + c + d)^8$. Nombre des termes de la forme $a^2bc^3d^2$. Nombre total des termes.

1553. — Etudier les séries $u_n = \frac{1}{n^3}$, $u_n = \frac{1}{n^4}$, $u_n = \frac{1}{n^5}$.

1554. — Etudier les séries

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi+1} + \frac{1}{\pi+2} + \cdots + \frac{1}{\pi+n} + \cdots$$

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi+1} + \frac{1}{\pi+2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{\pi+n} + \cdots$$

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi+2} - \frac{1}{\pi+1} + \frac{1}{\pi+4} + \frac{1}{\pi+6} - \frac{1}{\pi+3} + \cdots$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots,$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots,$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots.$$

1555. — Etant données deux séries convergentes

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots; \qquad a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots,$$

la série dont le terme général est $a_n u_n$ est-elle convergente ?

1556. — Limite de $\frac{x^m - 1}{x^p - 1}$ quand x tend vers 1.

1557. — Limite de $\sqrt[n]{n}$ quand n augmente indéfiniment.

1558. — Limites pour $x = 0$ des expressions suivantes :

$$\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 7x}, \quad \frac{\operatorname{tg} 3x - 2\sin 4x}{\operatorname{tg} 5x}, \quad \frac{\sin^2 3x + \operatorname{tg} 5x}{\sin 7x \operatorname{tg} 2x}, \quad \frac{\sin^2 3x + \operatorname{tg} x \sin 5x}{x \operatorname{tg}^4 x}, \quad \frac{\sin 2x \operatorname{tg} 3x}{x^2 - \sin^2 5x}.$$

1559. — Limites de $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, $(1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$ quand x tend vers 0.

1560. — Limite de $\left(1 - \frac{2}{m}\right)^m$ pour m infini.

1561. — Limites de $(1 + 3\sin x)^{4/\sin x}$, $(1 + \sin 3x)^{\cdots}$ quand x tend vers 0.

1562. — Dérivées des fonctions suivantes :

$y = \sqrt{x}$.	$y = \sqrt{\cos^2 4x^2}$.	$y = (L \operatorname{arc\,tg} 3x^2)^2$.	$y = \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{\sqrt{1 + 5x}}$.
$y = \sqrt{x}$.	$y = \sqrt{\sin^4 7x}$.	$y = (\cos 7x^2)^{5x}$.	
$y = \cos 4x$.	$y = \sqrt{\operatorname{tg}^2 4x^3}$.	$y = a^{\cos 5x}$.	$y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\operatorname{tg}^2 4x}$.
$y = \cos x^2$.	$y = \sqrt{\operatorname{arc\,tg} 8x^2}$.	$y = \sin(7x^2 + 1) L \operatorname{arc\,tg} 3x$.	$y = \frac{\sin^4 3x^2}{\sqrt{\operatorname{tg} 7x^2}}$.
$y = \cos \operatorname{tg} x^2$.	$y = \sqrt{\operatorname{arc\,tg} 5x^2}$.	$y = \frac{\sin^4 3x^3}{\operatorname{tg}^2 4x}$.	$y = \frac{L(3 + 5x^2)^2}{\sqrt{8x^2}}$.
$y = \operatorname{arc\,sin} 5x^2$.	$y = x^{\sin x}$.		
$y = \sqrt{\cos^2 4x}$.	$y = L \sin x^2$.	$y = \frac{\cos^2 4x}{\sqrt{x^2}}$.	$y = \frac{\cos^4 3x}{2^{x^2}}$.
$y = \sqrt{\sin^2 4x}$.	$y = L \operatorname{arc\,sin} 5x^2$.		

1563. — Dérivées des fonctions suivantes :

$y = \cos x^{\cos x}$.	$y = 2x + 1^{\cos x}$.	$y = (5x^2 + 1)^{\cos x}$.	$y = (\cos x - 2)^{\cos x}$.
$y = x^2 + 5^{x^2}$.	$y = 5x^2 + 1^{\cos x}$.	$y = (\sin x)^{\cos x}$.	$y = (x^3 + \sin^3 x)^5$.
$y = x^{\cos x^2}$.	$y = \operatorname{arc\,sin} 4x^{\cos x}$.	$y = \operatorname{arc\,sin} 5x^2)^3$.	$y = L \sin 8x^2)^4$.

1564. — On donne $y = \sin 3x$. Calculer y' et y''.

1565. — Dérivée n^e des fonctions $y = \frac{3}{x-5}$, $y = \frac{x}{x^2-1}$, $y = a^{5x^2} \sin 4x$.

1566. — Dérivées des fonctions y définies par les équations suivantes :

$$x^4 \sqrt[3]{y} - \cos^4 5x^2 + \lambda = 0, \qquad \sin^3 5x - \cos^2 3y + \lambda = 0, \qquad \sin^3 5x - 2^{3y^2} + \lambda = 0,$$

$$3^{5x^2} + \operatorname{tg} 4y^3 + \lambda = 0, \qquad \operatorname{tg}^3 4x^2 + \mathrm{L}7x^2y^3 + \lambda = 0, \qquad 3\mathrm{L}x^5 + \mathrm{L} \operatorname{arc\,tg} y^3 + \lambda = 0,$$

$$y \sin(3x^2+1) + \mathrm{L}(y^2-3) + \lambda = 0, \qquad \operatorname{tg}^2(2x+3y) - 5\sqrt[3]{5y} + 1 = 0.$$

1567. — $f(x, y)$ désignant une fonction homogène de degré m, montrer que l'on a

$$xf'_x + yf'_y = mf(x, y).$$

Réciproquement, établir la relation

$$x^2 f''_{x^2} + 2xy f''_{xy} + y^2 f''_{y^2} = m(m-1) f(x, y).$$

1568. — Trouver les primitives des fonctions suivantes :

$$y' = \frac{1}{x^2-1}, \qquad y' = \frac{x+2}{x^2-1}, \qquad y' = \frac{x+2}{(x-1)^2}, \qquad y' = \frac{x+2}{x^2+1},$$

$$y' = \frac{x-1}{2x^2-1}, \qquad y' = \frac{x-2}{x^2+x+1}, \qquad y = \frac{3x-1}{x^2-x+1}, \qquad y' = \frac{1}{x^3+1},$$

$$y' = \frac{x^2+1}{x^4-1}, \qquad y' = \frac{x^2+1}{(x+1)(x^3-1)}, \qquad y = \frac{3}{\sqrt{2+4x^2}}, \qquad y' = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}},$$

$$y' = \sin 3x, \qquad y' = \sin x + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+x^2}, \qquad y' = \sin^2 x.$$

$$y' = \sin^4 x, \qquad y' = \cos^3 x, \qquad y = \sin(2x+\alpha)\sin(3x-\beta), \quad y' = \sin^3 x,$$

$$y' = \operatorname{tg} x, \qquad y' = \cos(2x+\alpha)\cos(3x+\alpha)\cos(4x+\alpha), \qquad y' = \operatorname{tg}^3 x, \qquad y = \operatorname{tg}^4 x, \qquad y' = 3x^2 - \cos^4 x.$$

1569. — Variations des fonctions

$$y = \frac{x^3-2x+1}{x^2-1}, \qquad y = \frac{x^3-2x}{x^2-1}, \qquad y = \frac{x^4-3x}{x^2-1},$$

$$y = \frac{4x^4-3}{x^2-1}, \qquad y = \frac{x^3-2x^2}{x^3-1}, \qquad y = \frac{2x^3-7x}{x^3+1},$$

$$y = \frac{x^4-x}{x^3+1}, \qquad y = \frac{x^4-2x^3}{x^3+1}, \qquad y = \frac{\sin^3 x - 2\sin x}{\cos^3 x - 2\cos x}.$$

1570. — Maximum de $x^m y^p$, sachant que $x + y = a$.

1571. — Exprimer que l'équation $x^4 - 7x^2 + 6x + m = 0$ admet une racine double.

1572. — Exprimer que $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ admet une racine triple.

1573. — Exprimer que l'équation $x^5 + ax^4 + \cdots = 0$ admet une racine double et une racine triple.

1574. — Exprimer que l'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ admet une racine quadruple. Montrer qu'il suffit d'exprimer que $f(x)$ est divisible par $f'(x)$.

1575. — Condition pour que l'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ait deux racines dont le produit soit égal à 1.

1576. — Equation aux sommes deux à deux des racines de l'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$.

1577. — On considère l'équation $f(x) \equiv x^3 + px + q = 0$ dont les racines sont a, b, c. Former l'équation du troisième degré qui admet pour racines $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$.

1578. — Exprimer que deux des racines de l'équation $f(x) = 0$ sont liées par la relation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

1579. — Exprimer que les deux équations $x^5 + ax^3 + b = 0$, $x^4 + a'x^2 + b' = 0$ ont une racine commune.

1580. — Faire disparaître le second terme de l'équation $x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = 0$.

1581. — Montrer que l'équation $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} - 1 = 0$ a ses trois racines réelles et distinctes.

1582. — Montrer que si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et distinctes, il en est de même de l'équation $f(x) + af'(x) = 0$. Montrer que dans les mêmes conditions l'équation $f - ff' = 0$ a toutes ses racines imaginaires.

1583. — On pose $F(x) = f(x^2) + xf(x^3) + x^2 f(x^4)$. Trouver le reste de la division de $F(x)$ par $x^4 - a^4$.

1584. — En supposant $\sqrt{A}$ incommensurable, montrer que la relation $m\sqrt{A} + n\sqrt{A} + p$ ne peut avoir lieu que si les coefficients m, n, p sont nuls (on suppose A, m, n, p commensurables).

1585. — On donne l'équation $x^n - Nx^{n-1} - 1 = 0$. Que donne le théorème de Descartes ? Peut-on voir s'il y a des racines imaginaires sans compter les variations ? Montrer que dans l'équation binome, le nombre de racines réelles est égal au nombre des variations $V + V'$.

1586. — Si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et distinctes, il en est de même des équations

$$f'(x) = 0, \qquad f''(x) = 0, \qquad \ldots$$

Montrer que deux dérivées successives ne peuvent s'annuler pour $x = a$. Lorsque $f^{(p)}(x)$ s'annule, $f^{(p-1)}(x)$ et $f^{(p+1)}(x)$ sont de signes contraires. Le nombre des racines de $f(x) = 0$ comprises entre deux nombres α et β ($\alpha < \beta$) est la différence $V_\alpha - V_\beta$ des nombres de variations que présente la suite

$$f(x), \qquad f'(x), \qquad f''(x), \qquad \ldots, \qquad f^{(n-1)}(x),$$

quand on y fait successivement $x = \alpha$, $x = \beta$.

1587. — Résoudre les équations binomes $x^7 - 1 = 0$, $x^5 + 2 = 0$.

1588. — Résoudre les équations

$$x^3 - x - 5 = 0, \qquad x^3 - 8x + 1 = 0, \qquad x^3 - 5x + 1 = 0,$$
$$x^3 - 7x + 2 = 0, \qquad x^3 - 3x + 2 = 0, \qquad x^3 - 3x^2 - 1 = 0.$$

1589. — Nombre des racines réelles des équations

$$x^7 - 7x^2 + 3x + 1 = 0, \qquad x^4 - 5x^2 + x - 1 = 0, \qquad x^5 - 5x^2 + x - 1 = 0, \qquad x^5 - 7x^2 + 1 = 0,$$
$$x^5 - 3x + 1 = 0, \qquad x^4 - 7x - 1 = 0, \qquad x^4 - 7x^2 + x - 1 = 0, \qquad x^4 + 3x^2 - 1 = 0,$$
$$x^5 - 3x + 2 = 0, \qquad x^5 - 3x^2 + 1 = 0, \qquad x^5 + 2x + 3 = 0, \qquad x^5 - 7x^2 + 1 = 0,$$
$$x^5 + 2x^2 + 1 = 0, \qquad x^5 + 3x^2 - x + 1 = 0.$$

1590. — Nombre des racines réelles de l'équation $x^3 - 7x + 1 = 0$. Calculer la racine positive par la méthode de Newton. Même question pour l'équation $x^3 - 7x^2 + 1 = 0$; calculer la racine négative.

1591. — Nature des racines de l'équation $x^4 - 8x - 1 = 0$. Calculer $\Sigma a^2 b^2$.

1592. — Même question pour $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$. Calculer Σab^2.

1593. — a étant racine multiple d'ordre α de $f(x)$, trouver la limite de $\dfrac{(x-a)f'(x)}{f(x)}$ pour $x = a$; limite de $\dfrac{f(x)}{(x-a)^2}$.

1594. — Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

$$\frac{2x+1}{x^2+x-1}, \qquad \frac{x^2+3}{(x-1)^3}, \qquad \frac{x^2+1}{(x-3)^3}, \qquad \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x}, \qquad \frac{x^2-1}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Trigonométrie (M. Combette).

1595. — Résoudre le système :

$$\sin(2x - 2y) = \sin\left(2x + 5y + \frac{\pi}{3}\right), \qquad \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cotg}\left(y + \frac{\pi}{3}\right).$$

1596. — On donne $\sin 2x$; calculer $\cos 3x$, $\operatorname{tg} 4x$.

1597. — On donne $\cos 3x$; calculer $\sin 2x$.

1598. — On donne $\operatorname{tg} 2x$; calculer $\operatorname{tg} 3x$.

1599. — On donne $\operatorname{tg} 3x$; calculer $\sin 2x$, $\cos 2x$.

1600. — Résoudre les inégalités :

$$\sqrt{3 - \sin x} < 2\sin x - 1, \qquad \sqrt{2 + \sin^2 x} > 3\sin x - 1, \qquad \sqrt{\operatorname{tg} x + 2} > 3\operatorname{tg} x - 1,$$
$$\sqrt{3\cos x + 1} < 3\cos x - 1, \qquad \sqrt{2 - \sin^2 x} < 2 + 3\cos x, \qquad \sqrt{1 + \sin^2 x} < 3\sin x + 1,$$
$$\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x} > \operatorname{tg} x - 2.$$

1601. — Maximum du produit $\sin^2 x \times \cos x$ quand x varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$.

1602. — Calcul de $\sin 10^\circ$, $\cos 10^\circ$.

1603. — Résoudre un triangle connaissant A, a, $b - c = m$.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1014. — On considère une ellipse et une hyperbole ayant même centre et pour équations respectives

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$
$$b^2x^2 - a^2y^2 + a^2b^2(a^2 - b^2) = 0.$$

Soit PQ la corde polaire d'un point M de l'hyperbole dans l'ellipse.

1° Montrer que les bissectrices de l'angle POQ ont des directions fixes.

2° Trouver le lieu du pied de la symédiane (symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice issue de O dans le triangle OPQ.

E. N. Barisien.

1015. — On donne une circonférence et deux points A, B sur cette courbe. On considère toutes les hyperboles équilatères passant par A et B et tangentes au cercle. Lieu des centres des ces hyperboles. Lieu des pôles de AB par rapport à ces hyperboles.

Le Rédacteur Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMP. COMTE-JACQUET.

11e Année. N° 7. Avril 1901.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTIONS SUR LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

par M. **P. Barbarin**, professeur au lycée de Bordeaux.

Dans ces dernières années, quelques questions touchant les fonctions hyperboliques ont été posées aux examens de l'École Polytechnique ; il ne paraît donc pas inutile de dire quelques mots à ce sujet. Tous les élèves connaissent et appliquent les principes du calcul des exposants ; ils savent de quelle façon Neper et Euler ont su en extraire ces deux merveilleux moyens de transformation qui s'appellent : les logarithmes d'une part, les fonctions circulaires de l'autre. Notre intention est de montrer ici simplement aux studieux que, sans introduire aucune idée nouvelle, l'on peut tirer des mêmes principes un troisième outil de transformation qui ne le cède à aucun des deux premiers, et qui, utilisé à propos, est capable de rendre de précieux services.

Soit x un nombre positif ou négatif quelconque choisi pour *argument*. Les fonctions

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

sont appelées respectivement *cosinus hyperbolique*, *sinus hyperbolique*, et *tangente hyperbolique* de cet argument. Les algébristes sont d'accord, depuis le savant italien J. de Riccati (1676-1754), pour les désigner par les notations

$$\operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{sh} x, \qquad \operatorname{th} x.$$

On a évidemment entre elles les relations

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

dont la première explique le qualificatif, puisque

$$X = \operatorname{ch} x, \qquad Y = \operatorname{sh} x$$

sont les coordonnées d'un point M de l'hyperbole équilatère qui a son demi-axe OA égal à 1. D'ailleurs l'aire du secteur hyperbolique $\overline{AOM}$ a pour mesure $2x$.

C'est un jeu de vérifier, d'après les définitions qui précèdent, les identités

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

ainsi que la formule générale de multiplication

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx,$$

qui rappelle celle de Moivre. On en déduit pour $n = 2$, et $n = 3$,

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \qquad \operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{sh} 3x = 4 \operatorname{sh}^3 x + 3 \operatorname{sh} x.$$

Pour notre objet, ceci suffit absolument ; il nous reste à montrer quel parti l'on peut en tirer.

Lorsque dans les calculs on se trouve en présence d'une irrationnelle de la forme $\sqrt{1 - x^2}$,

il vient naturellement à la pensée de la transformer en une fonction circulaire en posant $u = \cos x$. Mais on trouve fréquemment aussi des irrationnelles telles que $\sqrt{1-u^2}$, ou $\sqrt{u^2-1}$: à la vérité, par $u = \operatorname{tg} x$ dans le premier cas, et $u = \sec x$ dans le second, on parvient à les ramener respectivement aux fonctions circulaires $\sec x$ et $\operatorname{tg} x$, mais l'emploi des tangentes et sécantes qui sont des fractions est bien loin de présenter les mêmes avantages pratiques que celui des sinus et cosinus. C'est donc ici que l'introduction des sinus et cosinus hyperboliques a sa place toute marquée.

Si $A = \sqrt{1-u^2}$, on posera $u = \operatorname{sh} x$, et A égalera $\operatorname{ch} x$;

Si $A = \sqrt{u^2-1}$, on posera $u = \operatorname{ch} x$, et on aura de même $A = \operatorname{sh} x$.

Les exemples, même tout élémentaires, ne nous manqueront pas pour justifier ce qui précède.

1° *Calcul d'une dérivée.*

Soit la fonction $y = \mathrm{L}(x + \sqrt{1+x^2})$. Posons $x = \operatorname{sh} z$, et nous avons

$$x + \sqrt{1+x^2} = \operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z = e^z,$$

donc $y = z$, ou $y' = z'$. D'ailleurs, on a aisément

$$x' = \operatorname{ch} z, \qquad \text{et} \qquad z' = \frac{1}{\operatorname{ch} z},$$

donc

$$y = \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2° *Théorie de l'hyperbole.*— Les coordonnées d'un point M de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

peuvent s'exprimer au moyen de l'argument z par les formules

$$x = a \operatorname{ch} z, \qquad y = b \operatorname{sh} z,$$

et les propriétés de la courbe se démontrent alors par des calculs de même forme que ceux qui servent pour l'ellipse ; en particulier, l'extrémité M' du rayon OM conjugué à OM a pour coordonnées

$$x = a \operatorname{sh} z, \qquad y = b \operatorname{ch} z$$

3° *Résolution de l'équation* $x^2 + px + q = 0$. — Il suffit de poser, selon que q est positif ou négatif,

$$\frac{4q}{p^2} = \sin^2 z, \qquad \text{ou} \qquad \frac{-4q}{p^2} = \operatorname{sh}^2 z :$$

les racines sont dans le premier cas réelles et de même signe,

$$x' = -p \cos^2 \frac{z}{2}, \qquad x'' = -p \sin^2 \frac{z}{2};$$

dans le deuxième, elles sont de signes contraires,

$$x' = -p \operatorname{ch}^2 \frac{z}{2}, \qquad x'' = p \operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}.$$

4° *Résolution de l'équation* $x^3 + px + q = 0$. — Lorsque l'on donne les fonctions circulaires $\cos a$ ou $\sin a$, le calcul de $\cos \frac{a}{3}$ ou $\sin \frac{a}{3}$ conduit à une équation du troisième degré ayant ses trois racines réelles, et réciproquement, toute équation du troisième degré à racines réelles se ramène, par un changement convenable de l'inconnue, à une trisection d'angle. Nous allons voir de même que si l'équation n'a plus qu'une seule racine réelle, cette racine et les deux conjuguées qui l'accompagnent dépendent d'une division d'argument hyperbolique par 3. Il nous faut pour cela étudier d'abord cette question :

Étant donné $\operatorname{sh} z = u$ $\operatorname{ch} a$, *trouver* $\operatorname{sh} \frac{z}{3}$ *ou* $\operatorname{ch} \frac{z}{3}$.

D'après la formule qui donne $\operatorname{sh} 3a$ en fonction de $\operatorname{sh} a$, nous voyons aisément que $\operatorname{sh} a$ étant donné, $\operatorname{sh}\frac{a}{3} = z$ est racine réelle de l'équation

$$(1) \qquad z^3 + \frac{3}{4}z - \frac{\operatorname{sh} a}{4} = 0,$$

qui a pour résolvante

$$(2) \qquad U^2 - \frac{\operatorname{sh} a}{4}U - \frac{1}{64} = 0.$$

Les racines de la résolvante sont

$$U_1 = \frac{1}{8}e^{a}, \qquad U_2 = -\frac{1}{8}e^{-a},$$

et par conséquent celles de (1) sont

$$z_1 = \operatorname{sh}\frac{a}{3},$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{a}{3}\right],$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{a}{3}\right].$$

Semblablement, si l'on donne $\operatorname{ch} a$, les racines de l'équation

$$(3) \qquad z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{\operatorname{ch} a}{4} = 0$$

sont

$$z_1 = \operatorname{ch}\frac{a}{3},$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right],$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right].$$

Envisageons maintenant l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0,$$

en nous attachant spécialement au cas où elle n'a qu'une racine réelle. On sait que les expressions de cette racine et des deux conjuguées qui l'accompagnent en fonction de radicaux cubiques sont très incommodes pour les calculs ; il y a donc un grand intérêt à les simplifier, et l'emploi des fonctions hyperboliques s'y prête merveilleusement. Il faut distinguer deux cas suivant le signe de p, à cause du signe de la fonction $\operatorname{ch} a$ qui est toujours positive, tandis que $\operatorname{sh} a$ a le signe de a.

1° Soit d'abord $p > 0$. Faisons

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{p}{3}}, \qquad \operatorname{sh} a = -\frac{3q}{p^{\prime}}, \qquad x = \lambda z,$$

l'équation proposée est ramenée à la forme (1) ; les racines demandées sont donc

$$x_1 = \lambda \operatorname{sh}\frac{a}{3},$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{sh}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{a}{3}\right],$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{sh}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{a}{3}\right].$$

2° Soit maintenant $p < 0$. Nous ferons cette fois

$$\lambda = \pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \operatorname{ch} a = \frac{3q}{p^{\prime}}, \qquad x = \lambda z.$$

nous choisirons le signe ambigu de λ égal à celui de $-q$, afin que $\frac{3q}{p\lambda}$ soit positif, et nous serons ramenés à l'équation (3). Les racines en x sont donc

$$x_1 = \lambda \operatorname{ch} \frac{a}{3},$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right],$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right].$$

Le recueil si connu de *Formules et Tables numériques* de Houël renferme Table XIV, pages 36-55, les logarithmes et arguments des fonctions hyperboliques avec quatre décimales. Cette approximation, suffisante pour une première évaluation pratique, permet de calculer rapidement avec quatre chiffres exacts les racines des équations du troisième degré. Voici les résultats numériques d'un exemple que nous engageons les élèves à revoir eux-mêmes :

Soit	$p = 7$,	$q = 7$,	$\log \lambda = 0{,}4850$,	$a = -0{,}8686$.
On trouve	$x_1 = 0{,}8969$,	$x_2 = 0{,}44845 - 2{,}757i$,		$x_3 = 0{,}44845 - 2{,}757i$.

Nous avons reçu de M. **M. Lanet**, élève à l'École Polytechnique, une note relative à l'hyperbole équilatère et renfermant une idée intéressante. Pour éviter des longueurs et des redites, nous nous bornons à publier la suite des propriétés qui y figurent sous forme d'énoncés. Les lecteurs de la Revue pourront en trouver aisément diverses solutions analytiques et géométriques, et, bien qu'il n'y ait là rien de nouveau, ils retireront certainement quelque profit de leur travail.

Soient ABC un triangle et H le point de concours des hauteurs.

1° Le lieu du point M, tel que les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés du triangle soient en ligne droite, est le cercle circonscrit au triangle. La droite Δ ainsi obtenue se nomme habituellement *la droite de Simson* du point M.

2° Cette droite passe par le milieu de MH.

3° L'angle des deux droites de Simson relatives à deux points M et M′ est la moitié de l'angle au centre sous-tendu par l'arc MM′. Son sens de rotation est inverse de celui du second angle.

4° La droite de Simson, Δ, enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements tangente aux trois côtés du triangle et aux hauteurs, et tritangente au cercle des neuf points de ce triangle.

5° Toute hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC passe au point H.

6° Les asymptotes de cette hyperbole sont deux droites de Simson relatives à deux points diamétralement opposés sur le cercle circonscrit.

7° Le lieu du centre de cette hyperbole est le cercle des neuf points du triangle.

8° Les axes de cette hyperbole enveloppent une autre hypocycloïde à trois rebroussements, égale à la précédente et tritangente au même cercle.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1900)

Mathématiques spéciales.

952. — *Étant donnés trois axes* Ox, Oy, Oz, *on considère un cône du second ordre* C *tangent aux deux plans* xOy *et* xOz, *respectivement, suivant* Oy *et* Oz, *et une droite* D *rencontrant* Ox.

1° *Pour quelles positions de la droite* D *existe-t-il au moins une surface du second ordre* S *indécomposable, passant par cette droite et tangente au cône* C *en tous les points d'une courbe plane ?*

2° *La droite* D *étant située dans le plan* xOy *et restant fixe, trouver le lieu géométrique des centres des surfaces* S.

Ce lieu est un plan P.

3° *La droite* D *se déplaçant dans le plan* xOy *de façon que le plan* P *passe par un point donné* A *de l'espace, trouver l'enveloppe du plan* P, *et montrer que la droite* D *enveloppe une parabole* Q.

4° *Quel est le lieu géométrique des positions du point* A *pour lesquelles la parabole* Q *correspondante est égale à une parabole donnée ?*

5° *La droite* D *étant toujours située dans le plan* xOy *et restant fixe, on donne un plan quelconque* Π. *Montrer que le lieu géométrique des points de contact avec le plan* Π *des surfaces* S *qui lui sont tangentes est une droite* Δ.

Étudier la distribution des droites Δ *dans l'espace quand* Π *se déplace arbitrairement.*

Combien y a-t-il de droites Δ *passant par un point quelconque de l'espace ?*

Quelle est l'enveloppe du plan Π *lorsque la droite* Δ *se déplace dans un plan passant par* D ?

1. On voit facilement que les équations tangentielles du cône C peuvent se mettre sous la forme

$$u^2 + 2mvw = 0, \qquad r = 0;$$

d'autre part comme la droite D rencontre Ox, on peut la définir par les équations ponctuelles suivantes

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \qquad \beta' y + \gamma' z = 0.$$

Toute quadrique inscrite dans le cône (C) a pour équation tangentielle

$$u^2 + 2mvw + r(Au + Bv + Cw + Dr) = 0.$$

Écrivons que cette surface contient la droite D, et pour cela, qu'elle est tangente à tout plan passant par la droite D ; un tel plan a pour équation

$$\alpha x + (\beta + \lambda\beta')x + (\gamma + \lambda\gamma')y + \delta = 0,$$

on doit donc avoir, *quel que soit* λ,

$$\alpha^2 + 2m(\beta + \lambda\beta')(\gamma + \lambda\gamma') + \delta[A\alpha + B(\beta + \lambda\beta') + C(\gamma + \lambda\gamma') + D\delta] = 0,$$

ce qui donne les conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} 2m\beta'\gamma' = 0, \\ 2m(\beta\gamma' + \gamma\beta') + \delta(B\beta' + C\gamma') = 0, \\ \alpha^2 + 2m\beta\gamma + \delta(A\alpha + B\beta + C\gamma + D) = 0. \end{cases}$$

De la première, on déduit soit $\beta' = 0$, soit $\gamma' = 0$, ce qui indique que la droite D doit appartenir soit au plan zOx soit au plan xOy.

Je dis que cette condition est suffisante. Pour cela, nous allons supposer que la droite D appartient par exemple au plan xOy, et nous démontrerons qu'il existe une infinité de quadriques inscrites au cône C et passant par la droite D.

Supposons donc que β' soit nul; nous pouvons remplacer γ' par 1, et comme la droite D est alors définie par les équations $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, $z = 0$, on peut remplacer ces équations par $\alpha x + \beta y + \delta = 0$, $z = 0$, ce qui revient à remplacer γ par 0. Les relations (1) deviennent alors

$$2m\beta + \delta C = 0, \qquad \alpha^2 + \delta(A\alpha + B\beta + D) = 0.$$

On voit d'abord que δ ne peut être nul, sans quoi α et β seraient nuls et la droite D serait indéterminée. Faisons $\delta = 1$; nous obtenons

$$C = -2m\beta, \qquad D = -(A\alpha + B\beta + \alpha^2),$$

et l'équation générale des surfaces S considérées est

$$f(u, v, w, r) \equiv u^2 + 2mvw + rAu + Bv - 2m\beta w - r(A\alpha + B\beta + \alpha^2) = 0;$$

elle contient deux paramètres variables A et B.

La droite D est déterminée par les deux équations $\alpha x + \beta y + 1 = 0$, $z = 0$.

2. Le centre de la quadrique $f(u, v, w, r) = 0$ a pour équation tangentielle

$$f = Au + Bv - 2m\beta w - 2r(A\alpha + B\beta + \alpha^2) = 0;$$

par suite, les coordonnées x, y, z de ce point sont données par les équations

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{-2m\beta} = \frac{1}{-2(A\alpha + B\beta + \alpha^2)}.$$

Le lieu du centre s'obtient en éliminant A et B entre ces équations; cette élimination est immédiate et conduit à l'équation

$$2\alpha\beta x + 2\beta^2 y - \frac{\alpha^2 z}{m} + \beta = 0,$$

qui représente un plan P.

3. Écrivons que le plan P passe par le point $A(x_0, y_0, z_0)$; nous avons

$$(2) \qquad 2\alpha\beta x_0 + 2\beta^2 y_0 - \frac{\alpha^2 z_0}{m} + \beta = 0,$$

de sorte que l'équation du plan P peut s'écrire

$$2\alpha\beta(x - x_0) + 2\beta^2(y - y_0) - \frac{\alpha^2}{m}(z - z_0) = 0.$$

Nous aurons l'enveloppe de ce plan en exprimant que cette équation a une racine double en $\frac{\beta}{\alpha}$, ce qui donne

$$(x - x_0)^2 - \frac{2}{m}(y - y_0)(z - z_0) = 0.$$

Or, si on remarque que l'équation ponctuelle du cône C est $x^2 + \frac{2}{m}yz = 0$, on voit que l'enveloppe du plan P est un cône C′ parallèle au cône C et ayant pour sommet le point A.

D'autre part, de la relation (1), on déduit immédiatement l'équation tangentielle de l'enveloppe de D, en remplaçant α et β par $\frac{u}{w}$ et $\frac{v}{w}$, et on obtient

$$2uvx_0 + 2v^2 y_0 - \frac{u^2 z_0}{m} + vw = 0.$$

Cette équation représente une parabole dont l'axe est parallèle à Oy. On a aisément son équation ponctuelle, en tirant par exemple de l'équation précédente la valeur de w,

$$w = -\frac{1}{v}\left(2uvx_0 + 2v^2 y_0 - \frac{u^2 z_0}{m}\right),$$

portant cette valeur dans l'équation de la droite, et écrivant que l'équation obtenue homogène en u et v a une racine double en $\frac{u}{v}$. On obtient ainsi

$$(x - 2x_0)^2 - 4\left(\frac{z_0}{m}y - 2y_0 z_0\right) = 0.$$

4. Si l'on désigne par θ l'angle xOy, le paramètre de cette parabole est égal à $2\sin^2\theta\left|\frac{z_0}{m}\right|$. Pour que cette parabole soit égale à une parabole donnée de paramètre p on doit avoir $2\sin^2\theta\,\frac{z_0}{m} = \pm p$; par suite, le lieu du point A se compose des deux plans

$$z = \pm\frac{pm}{2\sin^2\theta}.$$

5. Soit $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ l'équation du plan H; nous allons chercher le lieu des pôles du plan H par rapport aux quadriques considérées. L'intersection de ce lieu et du plan H constitue le lieu des points où les quadriques touchent le plan H.

Les coordonnées du pôle du plan Π par rapport à la quadrique $f(u, v, w, r) = 0$ sont définies par les équations

$$\frac{x}{f'_u} = \frac{y}{f'_v} = \frac{z}{f'_w} = \frac{1}{f'_r},$$

ou

$$\frac{x}{2u + Ar} = \frac{y}{2mv + Br} = \frac{z}{2mw - 2m\beta r} = \frac{1}{A(u - 2\alpha r) + B(v - 2\beta r) - 2m\beta w - 2\alpha^2 r}$$

Pour avoir le lieu de ce point, il faut éliminer A et B entre ces équations.

En considérant le premier et le troisième rapport, puis le deuxième et le troisième, on calcule facilement les valeurs de A et de B,

$$A = \frac{2mx(v - \beta r) - 2uz}{rz}, \qquad B = \frac{2my(v - \beta r) - 2mwz}{rz},$$

et en portant ces valeurs dans l'équation formée par les deux derniers rapports, on obtient

$$x(u - 2\alpha r) + y(v - 2\beta r) - z\left[\frac{(u - \alpha r)^2}{m(v - \beta r)} + w\right] - r = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{ux + vy + wz + r}{2r} - (\alpha x + \beta y + 1) - z\,\frac{(u - \alpha r)^2 + 2mw(v - \beta r)}{2mr(v - \beta r)} = 0.$$

Le lieu de ce pôle est donc un plan ; il coupe le plan Π suivant une droite Δ, qui est le lieu des points où les quadriques touchent le plan Π.

Les équations de Δ peuvent s'écrire

$$(\Pi) \qquad ux + vy + wz + r = 0,$$

$$(\Pi') \qquad \alpha x + \beta y + 1 + z\,\frac{(u - \alpha r)^2 + 2mw(v - \beta r)}{2mr(v - \beta r)} = 0.$$

Le plan (Π') passe par la droite D ; donc Δ rencontre D ; de plus, nous allons montrer que Δ est tangente au cône.

Posons pour un instant $h = \dfrac{(u - \alpha r)^2 + 2mw(v - \beta r)}{2mr(v - \beta r)}$, et considérons un plan passant par Δ et ayant pour équation

$$(u + \lambda\alpha)x + (v + \lambda\beta)y + (w + \lambda h)z + r + \lambda = 0.$$

Nous allons démontrer que ce plan est tangent au cône pour une valeur convenable de λ, et pour cela que les deux équations

$$(u + \lambda\alpha)^2 + 2m(v + \lambda\beta)(w + \lambda h) = 0, \qquad r + \lambda = 0,$$

ont une solution commune en λ. Si en effet dans la première nous remplaçons λ par $-r$, et si nous résolvons par rapport à h, nous trouvons précisément

$$h = \frac{(u - \alpha r)^2 + 2mw(v - \beta r)}{2mr(v - \beta r)}.$$

Il en résulte que les droites Δ rencontrent la droite D et sont tangentes au cône C.

Les droites Δ passant par un point A seront les tangentes menées par le point A à la section du cône C par le plan (A, D); donc par un point quelconque de l'espace, passent deux droites Δ.

Supposons maintenant que la droite Δ se déplace dans un plan fixe R passant par D et ayant pour équation $\alpha x + \beta y + kz + 1 = 0$. Le plan (Π') doit coïncider avec ce plan ; on doit donc avoir

$$k = \frac{(u - \alpha r)^2 + 2mw(v - \beta r)}{2mr(v - \beta r)},$$

ou

$$(u - \alpha r)^2 + 2m(v - \beta r)(w - kr) = 0,$$

telle est l'équation tangentielle de l'enveloppe du plan Π.

Or, $u - \alpha r = 0$, $v - \beta r = 0$, $w - kr = 0$ sont les équations tangentielles des points A, B, C

où le plan R rencontre respectivement Ox, Oy, Oz. L'équation (3) représente donc une conique située dans le plan ABC, tangente en B et C aux droites AB et AC. De plus, les plans tangents menés par l'origine à cette conique sont définis par les équations $u^2 + 2mvw = 0$, $v = 0$; ces plans sont donc tangents au cône C, et par suite la conique est située sur ce cône.

En définitive, l'enveloppe du plan Π est la conique section du cône C′ par le plan R.

Solution géométrique. — **1.** Au point où la droite D, génératrice de S, rencontre la courbe de contact de S et de C, les deux surfaces ont même plan tangent. Ce plan passe par la génératrice D, donc D est tangente au cône C. Puisque cette droite rencontre Ox elle doit se trouver dans l'un des plans xOz ou xOy, qui sont les deux plans tangents que l'on peut mener au cône C par la droite Ox.

2. Cherchons d'une façon plus générale le lieu des pôles d'un plan quelconque Π par rapport aux surfaces S.

Soit a la trace de D sur le plan Π. Par le point a, on peut mener au cône deux plans tangents, dont l'un, xOy, est fixe, et dont l'autre, μ, coupe Π suivant une droite Δ qui passe en a et détermine ainsi avec D un plan (D, Δ). Ce plan, passant par la génératrice D commune aux surfaces S, touche toutes ces surfaces. Le plan μ, tangent au cône, les touche également.

Dès lors, le plan P qui passe par Δ et qui est conjugué harmonique de Π par rapport à μ et (D, Δ) contient les pôles de Π par rapport à toutes les surfaces S.

Si maintenant le plan Π s'éloigne à l'infini, le plan μ devient le plan tangent au cône, distinct de xOy, parallèle à D. Le plan (D, Δ) est celui qui passe par D et est parallèle à μ.

Par suite, le plan P, lieu des centres des quadriques S, est parallèle aux deux précédents et à égale distance de chacun d'eux.

3. Si on assujettit ce plan P à passer par un point A, comme il est parallèle à un plan tangent μ au cône C, il enveloppera le cône C′, qui a pour sommet le point A et qui est parallèle au cône C.

Soit B le symétrique de O par rapport à A. Le plan (D, Δ) passe par B et enveloppe un cône C″ de sommet B parallèle au cône C. La droite D touchant ce cône C″ et restant dans le plan xOy aura pour enveloppe la section Q du cône C par ce plan. Cette section est une parabole puisque le plan xOy étant tangent au cône C est parallèle à un plan tangent du cône C″.

4. La grandeur de cette parabole ne dépend évidemment que des positions relatives du plan $z = 0$ et du point B. C'est-à-dire puisque $OB = 2OA$, des positions relatives du plan $z = 0$ et du point A. Le lieu demandé se compose donc de deux plans parallèles au plan xOy et symétriques par rapport à ce plan.

5. Nous avons vu que le lieu des pôles d'un plan Π par rapport aux surfaces S était un plan P. Si la surface S touche le plan Π, le point de contact décrira la droite Δ intersection des plans Π et P.

Cette droite Δ rencontre D et se trouve dans un plan μ tangent au cône. Donc, lorsque Π varie, la droite Δ varie en rencontrant D et en étant tangente au cône.

Par un point quelconque et la droite D passe un plan qui coupe le cône C suivant une conique à laquelle on peut mener du point donné deux tangentes. Il y a donc deux droites Δ passant par un point donné.

Si l'on se donne arbitrairement une droite Δ, le plan Π correspondant n'est pas déterminé : il est seulement assujetti à contenir la droite Δ.

Si la droite Δ se déplace dans un plan fixe passant par D, elle restera constamment tangente à une conique fixe, section du cône C par le plan donné. C'est cette conique qui constitue l'enveloppe du plan Π.

Remarque. — Transformons la figure donnée par polaires réciproques. Au cône C correspond une conique C_1 et les surfaces S se transforment en surfaces qui passent par la conique C_1 et une droite fixe D_1, qui doit évidemment rencontrer C_1.

Les corrélatives des questions proposées se traduisent très simplement sur cette nouvelle figure. Par exemple, étant donné un point O, il existe une seule droite issue de O et rencontrant C_1 et D_1 en des points distincts m et n. Le conjugué harmonique p de O par rapport à m et n est un point fixe qui appartient aux plans polaires de O par rapport à toutes les surfaces.

L. BICKART.

BOURSES DE LICENCE PRÈS LES FACULTÉS DES SCIENCES (1900)

Mathématiques.

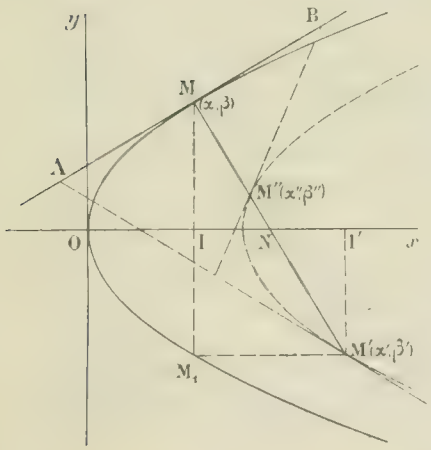
953. — *On donne une parabole* (P). *Soit* M *un point de cette courbe; soit* N *le point où la normale en* M *à la parabole rencontre l'axe de cette courbe; soit* M′ *le point symétrique du point* M *par rapport au point* N. *Quand* M *décrit la parabole* (P), *le point* M′ *décrit une seconde parabole* (P′).

Soient A, B *les points où la tangente en* M *à la parabole* (P) *est rencontrée par les tangentes à la parabole* (P′) *aux points où celle-ci est coupée par la normale* MN.

Du point M′ *on mène de la parabole* (P) *les deux normales autres que la normale* MN; *soient* C, D *les pieds de ces normales sur la parabole* (P); *soit* E *le point d'intersection des droites* CD, MN.

En supposant que le point M *décrive la parabole* (P), *on demande les lieux décrits par les points* A, B, E. *Démontrer que la droite* CD *passe par un point fixe.*

Soient α et β les coordonnées du point M. I et I′ les projections des points M et M′ sur l'axe de la parabole, et α', β' les coordonnées du point M′. La construction indiquée donne $II' = 2\,IN$ et $I'M' = -IM$; d'autre part, la sous-normale IN est égale au paramètre; nous avons donc $\alpha' = \alpha + 2p$, $\beta' = -\beta$. Le lieu du point M′ s'obtient donc en remplaçant α et β par $\alpha' - 2p$ et $-\beta'$ dans l'équation de la parabole (P), ou par $x - 2p$ et $-y$, ce qui donne



$$(1) \qquad y^2 - 2px - 4p^2 = 0;$$

c'est une parabole égale à la proposée, et que l'on déduit de celle-ci en lui faisant subir une translation égale à $2p$ dans le sens Ox.

Ce résultat était évident a priori; en effet, soit M_1 le symétrique de M par rapport à l'axe de la parabole; le segment M_1M' est parallèle à Ox et a pour valeur algébrique $2p$.

Désignons par $M''(\alpha'', \beta'')$ le second point de rencontre de la parabole (P) avec la normale MN; nous aurons les coordonnées de ce point en cherchant l'intersection de la droite MN avec cette parabole et éliminant le point M′. Or l'équation de la droite MN est

$$\frac{x-\alpha}{p} = \frac{y-\beta}{\beta} = \mu;$$

elle donne $x = \alpha - p\mu$, $y = \beta + \beta\mu$, et les valeurs de μ qui correspondent aux points M′ et M″ s'obtiennent en portant ces deux valeurs de x et y dans l'équation (1) et tenant compte de la relation $\beta^2 - 2p\alpha = 0$, pour simplifier le résultat; nous avons ainsi l'équation du second degré

$$\alpha\mu^2 - 2\alpha - p\mu + 2p = 0,$$

qui admet visiblement les racines -2 et $-\frac{p}{\alpha}$. La première valeur correspond au point M′, la seconde au point M″ et les coordonnées de ce point sont $\alpha'' = \alpha - \frac{p^2}{\alpha}$, $\beta'' = \beta\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)$.

Cela posé, les tangentes aux points M, M′ et M″ ont respectivement pour équations

$$\beta y - px - p\alpha = 0, \qquad \beta' y - px - p\alpha + 4p^2 = 0, \qquad \beta'' y - px - p\alpha + 4p^2 = 0;$$

les deux dernières s'expriment immédiatement à l'aide de α et β et deviennent ainsi

$$\beta y - px + p\alpha - 2p^2 = 0, \qquad \beta(\alpha - p)y - p\alpha x - p(\alpha^2 - 4p\alpha + p^2) = 0.$$

Le lieu du point A résulte de l'élimination de α et β entre les trois équations

$$\beta y - px - p\alpha = 0, \qquad \beta y - px + p\alpha - 2p^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta^2 - 2p\alpha = 0.$$

Les deux premières, combinées par voie d'addition et de soustraction, donnent immédiatement $\beta = \frac{p^2}{y}$ et $\alpha = p - x$; l'équation du lieu de A en découle, et s'écrit, toute simplifiée,

$$(2) \qquad 2y^2(x - p) + p^3 = 0.$$

Le lieu du point B résulte de l'élimination de α et β entre les trois équations

$$\beta y - px - p\alpha = 0, \qquad (\beta(\alpha - p)y - p\alpha x + p(\alpha^2 - 4p\alpha + p^2) = 0, \qquad \text{et} \qquad \beta^2 - 2p\alpha = 0;$$

en multipliant la première par α et la retranchant de la seconde, nous avons de suite l'équation plus simple

$$\beta y + p^2 - 4p\alpha = 0;$$

le calcul de α et de β est alors immédiat et fournit les valeurs $\alpha = \frac{x + p}{3}$, $\beta = \frac{p(4x - p)}{3y}$.

Le calcul total s'achève sans peine et conduit à l'équation cherchée

$$(3) \qquad 6y^2(x + p) - p(4x - p)^2 = 0.$$

Pour traiter les autres parties du problème, nous partirons de l'équation de la normale au point courant (x, y) de la parabole (P), nous exprimerons qu'elle passe au point M' $(\alpha + 2p, -\beta)$, et en portant dans la relation ainsi trouvée $x = \frac{y^2}{2p}$, nous formerons l'équation aux pieds des trois normales issues de ce point; nous aurons ainsi une équation du troisième degré

$$y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0,$$

qui admet évidemment la racine $y = \beta$, et qui, par suite, s'abaisse au second degré

$$y^2 + \beta y - 2p^2 = 0;$$

cette dernière équation fournit les ordonnées des points de rencontre de la droite CD avec la parabole (P). Dès lors, soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de cette droite; les y des points de rencontre de cette droite avec la parabole sont aussi donnés par l'équation

$$uy^2 - 2pvy + 2pw = 0,$$

et nous calculerons u, v, w en identifiant les deux équations en y ainsi obtenues; en prenant $u = p$, nous avons $v = \frac{\beta}{2}$, $w = -p^2$; l'équation de la droite CD est donc

$$2p(x + p) - \beta y = 0.$$

Il est visible qu'elle passe par un point fixe, le point $(p, 0)$.

Quant au lieu du point de rencontre de la droite CD avec la normale MN, il s'obtient en éliminant α et β entre l'équation précédente, celle de la normale MN et la relation $\beta^2 - 2p\alpha = 0$. La première donne $\beta = \frac{2p(x + p)}{y}$; la seconde donne ensuite $\alpha = \frac{2(x - p)^2 - y^2}{2(x - p)}$; l'équation du lieu est alors immédiate et s'écrit, toutes simplifications faites

$$(4) \qquad y^4 - 2y^2(x - p)^2 + 4p(x - p)^3 = 0.$$

Il n'y a plus qu'à construire les courbes (2), (3) et (4).

La courbe (2) se construit immédiatement; elle est symétrique par rapport à Ox, admet la droite

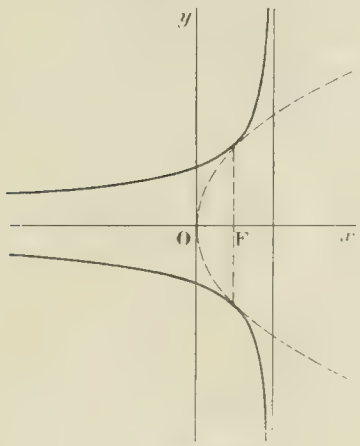


Fig. 1.

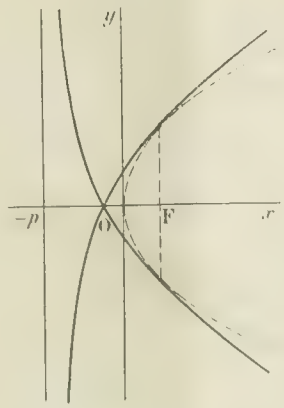


Fig. 2.

$x = p$ pour asymptote simple, la droite $y = 0$ pour asymptote double, touche la parabole (P) aux deux points $\left(\frac{p}{2}, \pm p\right)$, et est tout entière à l'extérieur de cette courbe. Elle est représentée dans la figure 1.

La courbe (3) est aussi symétrique par rapport à Ox, tangente à la parabole (P) aux mêmes points que la précédente, extérieure à cette courbe et tout entière à droite de la perpendiculaire à Ox, $x = -p$, qui est une asymptote simple de cette courbe ; elle admet un point double sur $Ox\left(-\frac{p}{4}, 0\right)$ et deux branches paraboliques dans la direction Ox ; les deux tangentes au point double ont pour coefficients angulaires $\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Cette ligne est dès lors aisée à tracer (*fig.* 2).

Pour construire la ligne (3), nous portons d'abord les axes parallèlement à eux-mêmes au point $(p, 0)$; l'équation devient ainsi

$$y^4 - 2x^2y^2 + 4px^3 = 0,$$

elle montre que la courbe a un point triple à l'origine et que les trois tangentes en ce point sont confondues avec Oy. Les directions asymptotiques sont $y^2 = 0$ et $y = \pm x\sqrt{2}$; à la première correspondent deux branches infinies paraboliques dans la direction Ox ; aux deux autres, deux asymptotes simples ordinaires qui ont pour équation

$$y = \pm\sqrt{2}\left(x - \frac{p}{2}\right);$$

chacune d'elles rencontre la courbe en deux points confondus à l'infini et en deux points imaginaires. Les branches paraboliques sont asymptotes à la parabole $y^2 - 2px + 2p^2 = 0$, c'est-à-dire à la parabole donnée (P).

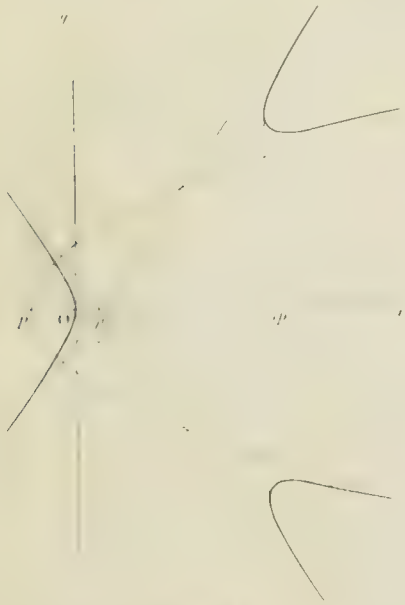


Fig. 3.

La discussion de l'équation bicarrée achèvera de nous donner la forme de la courbe ; nous voyons de suite que si x est négatif, il y a une valeur positive de y et une seule, et que si x est positif, il y a 0 ou 2 valeurs positives, le doute étant levé par la condition de réalité des deux valeurs de y^2, $x^4 - 4px^3 > 0$; cette condition fournit la valeur $x = 4p$, à partir de laquelle les quatre valeurs de y sont réelles ; entre 0 et $4p$, elles sont toutes imaginaires.

La forme de la courbe est évidente après tout ce qui vient d'être dit (*fig.* 3).

Bonnes solutions : MM. J. Dufaut ; F. Pegorier, à Toulouse ; P. Tribier.

Physique.

954. — *La longueur du pendule synchrone d'un pendule A est juste de 1 mètre.*

Le pendule A oscillant devant le balancier d'une horloge qui bat exactement la seconde, on observe une coïncidence toutes les 495 secondes, le pendule A oscillant un peu plus lentement que le balancier.

Au même endroit, un baromètre normal indique une hauteur de 75 centimètres, le mercure étant à 20 degrés.

On demande de calculer en dynes la force pressante exercée en ce moment par l'atmosphère sur un décimètre carré.

Densité du mercure à 0° par rapport à l'eau à 4°, 13,6.

Coefficient de dilatation absolue du mercure, 0,00018.

La durée d'une oscillation du pendule A est

$$t = \pi\sqrt{\frac{100}{g}}.$$

Mais pendant 495 secondes le pendule ne fait que $495 - 2$ ou 493 oscillations : on a donc, pour déterminer g, l'équation

$$\frac{495}{493} = \pi\sqrt{\frac{100}{g}}$$

d'où

$$g = \frac{\pi^2 \times 493^2 \times 100}{495^2}.$$

Tout revient maintenant à chercher le poids de 7500cc de mercure à 20°, lorsque g a cette valeur. Or les masses spécifiques étant inversement proportionnelles aux binomes de dilatation, on a, en désignant par x la masse spécifique du mercure à 20°,

$$x = \frac{13,6}{1 + 0,00018 \times 20} = \frac{13,6}{1,0036}.$$

Le poids de 7500cc de mercure est alors

$$7500 \times \frac{13,6}{1,0036} \times \frac{\pi^2 \times 493^2 \times 100}{495^2} = 99,5 \times 10^6 \text{ dynes.}$$

J.-D. DUFAUT, à Aiguillon.

Chimie.

955. — *Une dissolution de sulfite neutre de sodium est maintenue longtemps à l'ébullition avec de la fleur de soufre, puis filtrée. Dans la liqueur obtenue, on verse de l'eau de chlore, puis une dissolution de chlorure de baryum.*

On demande quel rapport il y a entre le poids du précipité obtenu, et celui qui se produirait, si on recommençait l'expérience avec la même dissolution de sulfite de sodium, mais sans la faire bouillir avec la fleur de soufre.

Premier groupe de réactions :

$$SO^3Na^2 + S = SO^4Na^2,$$

$$SO^4Na^2 + 4Cl^2 + 5H^2O = 2SO^4NaH + 8HCl,$$

$$2SO^4NaH + 2BaCl^2 = 2NaCl + 2HCl + 2SO^4Ba.$$

Second groupe de réactions :

$$SO^3Na^2 + Cl^2 + H^2O = SO^3NaH + NaCl + HCl,$$

$$SO^3NaH + BaCl^2 = NaCl + HCl + SO^3Ba.$$

Le premier précipité est donc *double du second.*

On a supposé, ce qui semble sous-entendu dans l'énoncé, que les réactions étaient complètes.

Si on les suppose incomplètes, mais que la même quantité de chlore agisse dans les deux cas, diverses solutions peuvent se présenter. Par exemple, si le chlore est strictement suffisant pour produire complètement la seconde réaction, il n'y en a que le quart de ce qui est nécessaire pour produire la première et le premier précipité est *moitié du second.*

Si la dose de chlore est moindre, le rapport reste le même.

Si la dose de chlore est plus grande, le rapport peut varier d $\frac{1}{2}$ à 2.

QUESTIONS PROPOSÉES

1016 — On considère une droite fixe (D), un point fixe B sur cette droite et un point fixe A en dehors de cette droite.

1° Trouver l'équation générale des cercles passant par le point B et rencontrant la droite (D) en un second point M où la tangente soit la droite AM. Lieu des centres de ces cercles.

2° On associe ces cercles deux à deux de façon qu'ils soient orthogonaux et on demande le lieu du second point de rencontre de ces deux cercles, l'équation de la droite qui joint leurs centres et son enveloppe.

3° Trouver l'équation de la droite qui joint les pôles de la droite (D) par rapport aux deux cercles envisagés et le lieu du point de rencontre de cette droite avec la ligne des centres.

E. H.

1017. — On considère une ellipse fixe et un point M variable sur cette ellipse. Soient P, Q, R les pieds des autres normales abaissées du point M sur l'ellipse. On demande de trouver le lieu des centres des sécantes communes à l'ellipse et au cercle circonscrit au triangle PQR, puis de trouver le lieu du centre et l'enveloppe de ce cercle.

BALABAN.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

937. — *Par un point* F a, b *pris à l'intérieur d'un angle droit* yOx *on trace une droite arbitraire* MN *qui rencontre* Ox *en* M *et* Oy *en* N. *Par ces points on fait passer une circonférence* (C) *orthogonale à la circonférence de centre* O *et de rayon* OF. *La circonférence* (C) *coupe* Ox *en un second point* P, *et* Oy *en un second point* Q.

Cela posé, si on fait tourner MN *autour de* F *on demande :*

1° *L'enveloppe de la droite* PQ ;

2° *Le lieu du centre du cercle* (C) ;

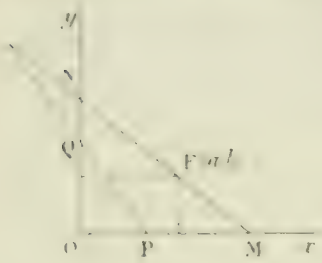
3° *Le lieu du point de rencontre des droites* MN *et* PQ ;

4° *L'enveloppe de la polaire du point* O *par rapport à la circonférence* (C), *et le lieu des points où se rencontrent deux polaires qui correspondent à deux droites* MN *rectangulaires.*

Soient $x - a\cos\varphi + y - b\sin\varphi = 0$ et $ux + vy - a = 0$ les équations des deux droites MN et PQ. Le cercle passant aux quatre points M, N, P et Q aura une équation de la forme

$$x - a\cos\varphi + y - b\sin\varphi + ux + vy + a = 2xy = 0.$$

en donnant à x, y, c, w des valeurs convenables. Or en exprimant d'abord que l'équation représente un cercle, nous trouvons de suite $u = \sin\varphi$, $v = \cos\varphi$, $2\lambda = -1$; le coefficient de $x^2 + y^2$ est $\sin\varphi\cos\varphi$, le terme constant,



$$-w(a\cos\varphi + b\sin\varphi);$$

par conséquent la puissance de l'origine par rapport à ce cercle est

$$\frac{-w(a\cos\varphi + b\sin\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

et, en écrivant qu'elle est égale à $a^2 + b^2$, nous aurons w,

$$w = -\frac{(a^2+b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{a\cos\varphi + b\sin\varphi} \quad \text{ou} \quad w = \frac{-c^2\sin\varphi\cos\varphi}{a\cos\varphi + b\sin\varphi},$$

en posant $c^2 = a^2 + b^2$.

1° L'équation de la droite PQ est alors

$$x\sin\varphi + y\cos\varphi - \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{a\cos\varphi + b\sin\varphi} = 0,$$

et l'équation de son enveloppe s'obtient en considérant celle de la droite comme homogène et du second degré en $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ et écrivant qu'elle a une racine double. Ce calcul donne immédiatement

$$(1) \qquad ax - by - c^2 - 4abxy = 0,$$

équation qui représente une parabole tangente aux deux axes ; la corde des contacts passe au point F et est perpendiculaire à OF ; il en résulte que ce point est le foyer de la parabole. Il serait aisé de trouver les autres éléments de cette ligne.

2° Les coordonnées du centre du cercle (C) sont données par les formules

$$x = \frac{(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\sin\varphi - w\cos\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$y = \frac{(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\cos\varphi - w\sin\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi},$$

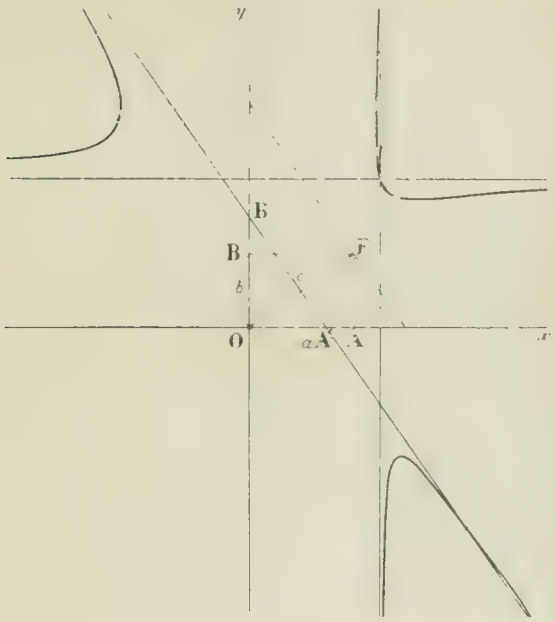
en y remplaçant w par sa valeur, puis posant $t = \operatorname{tg}\varphi$, elles prennent la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{(a + bt)^2 - c^2}{2(a + bt)}, \\ y &= \frac{(a + bt)^2 - c^2 t^2}{2t(a + bt)}. \end{aligned} \right.$$

Ces deux équations représentent une cubique dont les trois directions asymptotiques correspondent aux valeurs de t égales à 0, ∞ et $-\frac{a}{b}$. Pour construire cette ligne, nous supposerons, ce qui est toujours permis, sauf quand $a = b$, que a et b sont tous deux positifs et que a est plus grand que b ; nous aurons alors le tableau ci-contre renfermant les valeurs principales des fonctions x et y et donnant la forme générale de la courbe. Il reste maintenant à trouver l'asymptote qui correspond à la valeur $\frac{a}{b}$ et à placer la courbe par rapport à ses asymptotes. Son coefficient angulaire est la limite de $\frac{y}{x}$ quand t tend vers $-\frac{a}{b}$, c'est $-\frac{a}{b}$. L'ordonnée à l'origine est, dans les mêmes conditions, la limite de $\frac{y}{x} + \frac{a}{b}$, c'est $\frac{a}{2b}$, de sorte que cette asymptote a pour équation $ax + by - \frac{a^2}{2} = 0$.

t	x	y
$-\infty$	$-\infty$	$\frac{b}{2} + \frac{c^2}{2b}$
$\frac{a}{b}$	$-\infty$	$-\infty$
0	$\frac{a}{2} - \frac{c^2}{2a}$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$\frac{b}{2} + \frac{c^2}{2b}$

elle est perpendiculaire à OF et passe au milieu de OF. Les segments OA' et OB' qu'elle intercepte sur les axes ont respectivement pour valeurs $\frac{c^2}{2a}$ et $\frac{c^2}{2b}$; ils servent à construire les deux asymptotes parallèles aux axes et dont les équations sont $x - \frac{a}{2} - \frac{c^2}{2a} = 0$, $y - \frac{b}{2} - \frac{c^2}{2b} = 0$.



En cherchant les signes des trois fonctions $ax + by - \frac{c^2}{2}$, $x - \frac{a}{2} - \frac{c^2}{2a}$, $y - \frac{b}{2} - \frac{c^2}{2b}$, respectivement au voisinage de

$$t = -\frac{a}{b}, \quad t = 0 \quad \text{et} \quad t = \infty,$$

nous aurons la position de la courbe par rapport à chacune de ses asymptotes. Cette ligne est ensuite aisée à tracer.

3° Pour avoir le lieu du point de rencontre des droites MN et PQ, il n'y a qu'à éliminer $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ entre les deux équations

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi - \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{a \cos\varphi + b \sin\varphi} = 0,$$

$$(x - a)\cos\varphi - (y - b)\sin\varphi = 0;$$

cette dernière donne de suite des quantités proportionnelles à $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, $y - b$ et $-(x - a)$; en les portant dans la première, nous avons immédiatement l'équation du lieu

$$(3) \qquad y(y - b) - x(x - a)(ay + bx) + c^2(x - a)(y - b) = 0.$$

Cette équation représente une cubique qui admet le point $F(a, b)$ comme point double. En portant les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point, l'équation se simplifie et devient

$$(4) \qquad (ay - bx)(y^2 - x^2) + ab(x^2 + y^2) = 0.$$

Le point F, origine actuelle, est un point double isolé : les directions asymptotiques sont OF et les deux bissectrices de l'angle des axes. Cette courbe est aisée à construire en posant $y = tx$ et en exprimant x et y en fonction de t.

4° Nous avons trouvé pour équation du cercle (C)

$$\sin\varphi\cos\varphi(x^2 + y^2 + c^2) - (a\cos\varphi + b\sin\varphi)\sin\varphi - w\cos\varphi)x + (a\cos\varphi + b\sin\varphi)\cos\varphi - w\sin\varphi)y = 0.$$

La polaire de l'origine par rapport à ce cercle est donc

$$(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\sin\varphi - w\cos\varphi)x + (a\cos\varphi + b\sin\varphi)\cos\varphi - w\sin\varphi)y - 2c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

ou $xx_0 + yy_0 - c^2 = 0$, en appelant x_0 et y_0 les coordonnées du centre du cercle (C). Cette dernière équation nous montre que la droite considérée est la polaire par rapport au cercle fixe $x^2 + y^2 - c^2 = 0$ du centre du cercle (C), propriété évidente *a priori* si on se rappelle que l'axe radical de deux cercles orthogonaux est la polaire du centre de chacun d'eux par rapport à l'autre. L'enveloppe de cette droite est donc la polaire réciproque du lieu du centre du cercle (C) par rapport au cercle fixe, et les propriétés de cette enveloppe peuvent se déduire de celles du lieu qui a été étudié antérieurement.

Pour étudier directement cette enveloppe, on posera de nouveau $t = \operatorname{tg}\varphi$; on aura pour équation de la droite mobile,

$$t(a + bt)^2 + c^2t(x + (a - bt)^2 + c^2t^2)y - 2c^2t(a - bt) = 0,$$

puis on exprimera que cette équation cubique en t a une racine double, ou bien on prendra la dérivée

par rapport à t, on la joindra à l'équation précédente et on résoudra par rapport à x et à y. Ces deux calculs offrent peu d'intérêt.

Pour obtenir le dernier lieu, désignons par x et y les coordonnées du point où se rencontrent deux polaires qui correspondent à des droites MN rectangulaires, et exprimons que la polaire courante passe en ce point, nous aurons pour déterminer t une équation du troisième degré et nous devrons exprimer que le produit de deux de ses racines est égal à -1. Or le produit des racines est $-\frac{a^2y}{b^2x}$; donc il suffit d'exprimer que la valeur de l'une des racines de l'équation cubique en t est $\frac{a^2y}{b^2x}$.

On trouve ainsi par un calcul facile, et après suppression de la solution étrangère $y = 0$,

$$(5) \qquad ay + bx^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + 2ab\,ay + bx^2 = 0.$$

Ce dernier lieu est une ellipse qui passe à l'origine.

Comme exercice, nos lecteurs feront bien de traiter à nouveau et complètement le cas où $a = b$.

Remarques. — M. Hioux n'emploie pas l'équation du cercle passant aux quatre points M, N, P, Q : il remarque simplement que $\overline{OM}.\overline{OP} = \overline{ON}.\overline{OQ} = c^2$, et, comme $OM = a + bt$, $ON = \frac{a + bt}{t}$, il en déduit de suite OP et OQ, en fonction de t, par suite, l'équation de PQ, puis son enveloppe. Il montre aussi que $a.OP + b.OQ = c^2$, que l'angle $\widehat{PFQ}$ est droit toutes remarques qui conduisent immédiatement à la solution des premières questions. En outre, les coordonnées du centre du cercle sont immédiates : ce sont $x = \frac{OP + OM}{2}$, $y = \frac{OQ + ON}{2}$.

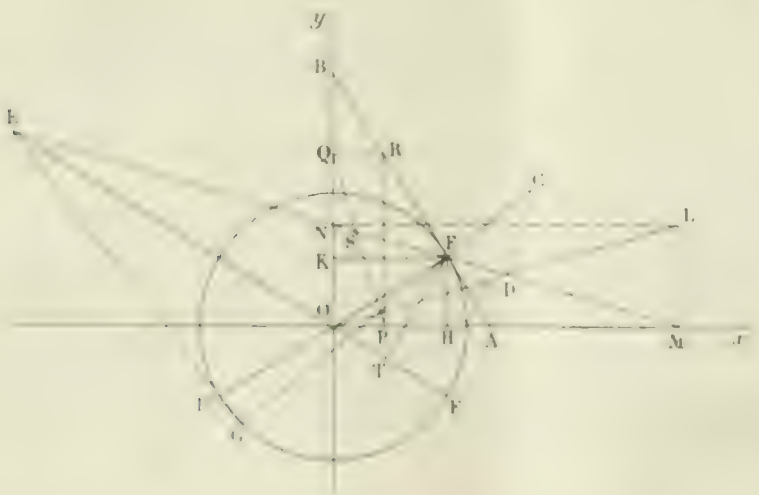
Solution géométrique. — 1° Comme on a

$$\overline{OM}.\overline{OP} = \overline{ON}.\overline{OQ} = a^2 + b^2,$$

les quatrièmes sommets L, R des rectangles OMNL, OPQR sont les pôles des droites PQ, MN par rapport au cercle (O).

De la relation évidente $\overline{HM}.\overline{KN} = \overline{OH}.\overline{OK}$, on déduit, d'autre part, que le lieu du point L est l'hyperbole équilatère (H) d'asymptotes FH, FK, qui passe en O.

La droite PQ enveloppe la polaire réciproque de (H). C'est la parabole (P) tangente aux axes en leurs points de rencontre A, B avec la tangente en F au cercle (O). Cette parabole a évidemment pour foyer le point F.



2° Si C est le centre d'un cercle (C) de rayon ρ, la droite CF rencontre à nouveau le cercle (O) au point G, tel que $\overline{CF}.\overline{CG} = \rho^2$. La polaire du point F dans le cercle (C), droite perpendiculaire à FG, s'obtient donc en joignant G au point F' diamétralement opposé à F.

Le point de rencontre L de cette droite et de MN, conjugué harmonique de F par rapport à MN, est sur OF' symétrique de OF par rapport aux axes. On voit ainsi la correspondance des droites CF et MN, ou CF' et CD (D milieu de MN), et la construction simple qui permet de passer de l'une à l'autre.

Or le point D a pour lieu une hyperbole (H') homothétique à (H) dans le rapport $\frac{1}{2}$, et l'enveloppe des droites DC est l'antipodaire de cette courbe par rapport à un de ses points F. C'est, comme on sait, la polaire réciproque, par rapport à un cercle de centre F, de l'inverse par rapport au même cercle de l'hyperbole (H').

Cette inverse étant une cubique circulaire ayant pour point double F, l'enveloppe de CD est une courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini, et ayant pour foyer le point F. Tout ce qui précède montre que les rayons CF, CD décrivent deux faisceaux d'ordre 1 et 3 rapportés projectivement. Le lieu complet des points C est donc du quatrième ordre. Cependant, les rayons coïncidant dans une de leurs positions (perpendiculaire FT abaissée sur OF'), le lieu des centres se décompose en la droite FT et une cubique (Γ).

La construction indiquée plus haut montre qu'il n'y a qu'un point de la courbe sur toute droite passant en F. Le point F est donc double. D'ailleurs, le point C ne vient en F que si les droites MN et CD coïncident, ce qui exige que MN passe par un des ombilics du plan, I, J. MN et GE (perpendiculaire à CF) ont visiblement des directions conjuguées dans l'angle FOF', par suite CF et CD dans l'angle AFT. Il en résulte que les tangentes en F à la cubique (Γ) sont les conjuguées Fi, Fj des droites isotropes FI, FJ dans l'angle AFT. Le point C s'éloigne à l'infini, soit lorsque CD s'éloigne à l'infini, soit lorsque CD et CF deviennent parallèles. On en conclut que les directions asymptotiques de (Γ) sont Ox, Oy, AB.

3° Le lieu des points de rencontre S de MN et PQ, rayons homologues de faisceaux d'ordre 1 et 2, est une cubique ayant F pour point double. Les tangentes en ce point sont les droites isotropes, car FI, FJ coïncident avec leurs conjuguées, issues de F, par rapport au cercle (O). Enfin, les directions asymptotiques de la courbe sont les bissectrices de l'angle xOy et la droite OF, car MN ayant une de ces directions, PQ lui est parallèle, ou s'éloigne à l'infini.

4° Les cercles (O) et (C) étant orthogonaux, les polaires du centre de l'un par rapport à l'autre sont confondues avec leur axe radical.

L'enveloppe de cet axe est donc la polaire réciproque par rapport à (O) de la cubique (Γ), lieu du centre C. C'est une courbe (Σ) de troisième classe, admettant pour tangente double la droite AB, et pour tangentes simples les droites Ox, Oy, OF.

Au lieu de chercher le lieu des points de rencontre de deux polaires correspondant à deux droites MN rectangulaires, on peut se proposer de trouver l'enveloppe des droites joignant les centres des deux cercles (C) correspondants. Il suffit, pour y arriver, de faire une transformation homographique qui amène les points imaginaires i, j aux points cycliques I, J (en réduisant par exemple les ordonnées de la figure dans le rapport de 1 à $\frac{b^2}{a^2}$). A deux droites CD rectangulaires correspondent deux droites CF conjuguées par rapport à Oi, Oj; elles deviennent donc rectangulaires après la transformation. La cubique (Γ) se transforme en une cubique (Γ'), qui a en F un point double à tangentes isotropes, et qui passe par les points à l'infini sur Ox, Oy, OF'. Le problème revient à chercher l'enveloppe des cordes de la cubique vues du point double sous un angle droit, ou, ce qui revient au même, le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la polaire réciproque (Σ') de Γ' par rapport à un cercle de centre F.

La courbe (Σ') étant une hypocycloïde à trois rebroussements (elle est bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques) tangente aux droites FH, FK, FT, le lieu cherché est, comme on sait, le cercle tritangent à la courbe, lequel passe en F.

L'enveloppe des cordes de la cubique (Γ') est donc une parabole tritangente à cette cubique et ayant pour foyer F, et la polaire réciproque de la transformée homographique de cette parabole est le lieu du point de rencontre des polaires correspondant à deux droites MN rectangulaires. C'est une conique passant en O, tritangente à la courbe (Σ), et passant par ses points de contact avec AB.

VASNIER.

---

966. — *Soient* O *le point de rebroussement d'une cardioïde et* M *un point quelconque de cette courbe ; soient en outre* P *la projection du point* M *sur l'axe de la cardioïde et* O' *le symétrique de* O *par rapport à* P.

Trouver et construire les courbes suivantes :

1° *L'enveloppe de la droite* MO' ;

2° *Le lieu de la projection de* O *sur* MO' ;

3° *Le lieu de l'orthocentre du triangle* OMO' ;

4° *Le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle.*

1° L'équation en coordonnées polaires de la cardioïde est $\rho = R(1 + \cos\omega)$; par conséquent les coordonnées d'un point M quelconque de cette courbe sont

$$x = R\cos\omega(1 + \cos\omega),$$

$$y = R\sin\omega(1 + \cos\omega),$$

et l'abcisse du point O' est

$$OO' = 2R\cos\omega(1 + \cos\omega).$$

D'autre part, le coefficient angulaire de MO' est visiblement égal et de signe contraire au coefficient angulaire de MO. L'équation de MO' est donc

$$y = -\operatorname{tg}\omega\, x - 2R\cos\omega(1 + \cos\omega),$$

ou

$$x\sin\omega + y\cos\omega - 2R\sin\omega\cos\omega(1 + \cos\omega) = 0.$$

Pour obtenir l'enveloppe de cette droite, il faut adjoindre à son équation la dérivée de cette équation par rapport à ω et résoudre ensuite les deux équations ainsi obtenues par rapport à x et à y, ou bien, plus rapidement, diviser successivement l'équation de la droite par $\cos\omega$ et $\sin\omega$ et prendre ensuite la dérivée par rapport à ω ; on trouve ainsi isolément les deux valeurs de x et de y

$$(1)\quad \begin{cases} x = 2R\cos^2\omega(\cos\omega - \cos 2\omega), \\ y = 2R\sin^2\omega(\sin\omega + \sin 2\omega). \end{cases}$$

2° La perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite MO' ayant pour équation $\dfrac{x}{\sin\omega} = \dfrac{y}{\cos\omega}$, nous aurons le second lieu soit en éliminant $\cos\omega$ et $\sin\omega$ entre cette équation, celle de MO et la relation $\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$, soit en résolvant les deux équations par rapport à x et à y. Ce dernier procédé nous donne

$$(2)\quad \begin{cases} x = 2R\sin^2\omega\cos\omega(1 + \cos\omega), \\ y = 2R\sin\omega\cos^2\omega(1 + \cos\omega). \end{cases}$$

3° L'orthocentre du triangle MOO' est le point de rencontre des droites $x = R\cos\omega(1 + \cos\omega)$ et $\dfrac{x}{\sin\omega} = \dfrac{y}{\cos\omega}$; ses coordonnées sont donc

$$(3)\quad \begin{cases} x = R\cos\omega(1 + \cos\omega), \\ y = R\dfrac{\cos^2\omega}{\sin\omega}(1 + \cos\omega). \end{cases}$$

Ce sont les équations paramétriques du troisième lieu.

4° Enfin les équations paramétriques du quatrième lieu s'obtiennent en cherchant le point de rencontre de la droite MP avec la perpendiculaire élevée au milieu de OM, c'est-à-dire en résolvant par rapport à x et y les deux équations

$$x = R\cos\omega(1 + \cos\omega),$$

$$(4)\quad \cos\omega\left[x - \frac{R}{2}\cos\omega(1 + \cos\omega)\right] + \sin\omega\left[y - \frac{R}{2}\sin\omega(1 + \cos\omega)\right] = 0 ;$$

Cette dernière équation se simplifie et s'écrit $x\cos\omega + y\sin\omega - \dfrac{R}{2}(1 + \cos\omega) = 0$, en y pos

tant la valeur de x, on trouve aisément celle de y, et les équations annoncées sont

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{R}\cos\omega(1+\cos\omega), \\ y = -\dfrac{\mathrm{R}\cos 2\omega(1+\cos\omega)}{2\sin\omega}. \end{cases}$$

Reste maintenant à construire les diverses courbes dont nous venons de trouver les équations.

Pour construire la courbe (1), nous remarquons d'abord qu'il suffit de faire varier ω de 0 à π, car en changeant ω en $-\omega$, x ne change pas et y change de signe ; ce résultat indique une symétrie par rapport à Ox et permet de réduire de moitié l'intervalle dans lequel nous devons faire varier ω. Dans l'intervalle $(0, \pi)$ y s'annule trois fois : pour $\omega = 0$, $\omega = \frac{2\pi}{3}$ et $\omega = \pi$; x ne s'annule que deux fois : pour $\omega = \frac{\pi}{3}$ et $\omega = \pi$.

Les dérivées de x et de y par rapport à ω sont

$$x' = -2\mathrm{R}\sin\omega\cos\omega(8\cos^2\omega + 3\cos\omega - 2),$$

$$y' = 2\mathrm{R}\sin^2\omega(8\cos^2\omega + 3\cos\omega - 2);$$

elles s'annulent en même temps pour les valeurs de ω fournies par les équations $\cos\alpha = \frac{-3+\sqrt{73}}{16}$ et $\cos\beta = \frac{-3-\sqrt{73}}{16}$.

Il faut maintenant classer les diverses valeurs de ω ; or ceci se fait aisément, car on a de suite $\frac{-3+\sqrt{73}}{16} < \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\cos\alpha < \cos\frac{\pi}{3}$ ou $\alpha > \frac{\pi}{3}$; et de même $\frac{3+\sqrt{73}}{16} > \frac{1}{2}$ ou $\cos\beta < \cos\frac{2\pi}{3}$, $\beta > \frac{2\pi}{3}$. Dès lors, rien n'est plus simple que de construire le tableau des variations de x et de y, puis d'en déduire la forme de la courbe (*fig.* 1).

ω	x'	x	y'	y
0	0	4R	0	0
		décroît		
$\frac{\pi}{3}$	—	0	—	croît
		décroît		
α	0	min. nég.	0	max. pos.
	+	croît		décroît
$\frac{\pi}{2}$	0	0		2R
				décroît
		décroît		
$\frac{2\pi}{3}$				0
				décroît
β	0	min. nég.	0	min. nég.
	+	croît	+	croît
π	0	0	0	0

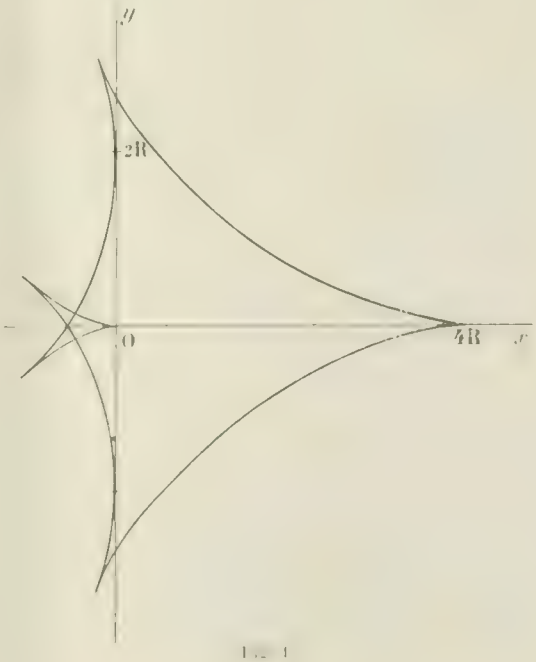


Fig. 1

La courbe (2), de même que la précédente et que les deux suivantes, présente une symétrie par rapport à Ox, et pour la construire, il suffit encore

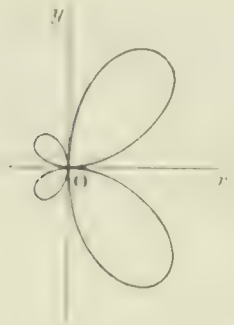


Fig. 2.

de faire varier ω de 0 à π. Dans cet intervalle, les fonctions x et y s'annulent trois fois, pour 0, $\frac{\pi}{2}$ et π.

t	x'	x	y'	y	$\frac{y'}{x'}$
-1	0	0	0	0	∞
			$+$	croît	
$\frac{1-\sqrt{33}}{8}$	$-$	décroît	0	max. pos.	0
				décroît	
$\frac{1-\sqrt{17}}{8}$	0	min. nég.	$-$		∞
		croît			
0	$+$	0	0	min. $= 0$	0
		croît			
$\frac{1+\sqrt{17}}{8}$	0	max. pos.	$+$	croît	∞
		décroît			
$\frac{1+\sqrt{33}}{8}$	$-$		0	max. pos.	0
			$-$	décroît	
1		0		0	∞

Mais le plus simple est de prendre pour paramètre $\cos\omega = t$ et de faire varier t de -1 à $+1$. On a ainsi successivement, en se bornant à la valeur positive de y,

$$x = 2R(t(1-t^2)(1+t)),$$
$$y = 2R(t^2(1+t\sqrt{1-t^2})),$$

puis

$$x' = 2R(t+1)(-4t^2+t+1),$$
$$y' = \frac{2Rt}{\sqrt{1-t^2}}(t+1)(-4t^2+t+2).$$

Il est alors aisé de construire le tableau des variations des fonctions x et y et ensuite de tracer la courbe (*fig.* 2).

On suivra le même procédé pour construire les courbes (3) et (4).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1900). *Suite.*

Géométrie analytique (M. Goujon).

Géométrie analytique à deux dimensions.

1604 — Interpréter l'équation $x^2 + y^2 = x\cos\alpha + y\sin\alpha$.

1605 — Longueur de la tangente menée d'un point (x, y) au cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

1606 — Lieu des centres des cercles tangents à une droite donnée et coupant un cercle donné suivant un diamètre.

1607 — Lieu des points équidistants d'un cercle et d'une droite.

1608 — On donne un point O et une droite D, parallèle à Oy. On joint le point O à un point A de la droite D et on prend sur OA le point M tel que $\overline{OM}\cdot\overline{OA} = p^2$. Lieu du point M.

1609. — On donne un cercle et un point A sur ce cercle. Par le point A, on mène une corde variable AB et on prend sur cette corde le point M tel que $\overline{AB} \times \overline{AM} = k^2$. Lieu du point M.

1610. — Les données étant les mêmes que précédemment, on prend le point M, tel que $\overline{AM} \times \overline{MB} = k^2$. Lieu du point M.

1611. — Construire les courbes

$$y = x^2 - 4x + 3, \qquad y = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \qquad y = \frac{x^2-4}{x^2-1}, \qquad y = \frac{x^2-1}{x^2-4},$$

$$y = \frac{x^2+1}{x-1}, \qquad y = \frac{x^2+1}{x+1}, \qquad y = x + \frac{1}{x}, \qquad y = x + \frac{x}{x^2-1},$$

$$y = x^2 + \frac{1}{x}, \qquad y = x^2 + \frac{1}{x-1} \qquad y = x^2 + \frac{x}{x-1}.$$

1612. — Construire les courbes

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y = x \pm \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y = x \pm \sqrt{(1-x)(1+x)},$$

$$y = x \pm \sqrt{(x-1)(x+1)}, \qquad y = x \pm \sqrt{x^2+1}, \qquad y = x \pm \sqrt{x^2+x+1},$$

$$y = x + 1 \pm \sqrt{x^2+1}, \qquad y = x \pm \sqrt{(x+b)^2 \pm a^2}, \qquad y = x^2 \pm \sqrt{1-x^2},$$

$$y = \sqrt{x^4 - 1}, \qquad y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \qquad y = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}, \qquad y = \sqrt{\frac{x^4-4}{x^2-1}}, \qquad y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}},$$

$$y = \sqrt[3]{x^2}, \qquad y^2 - xy + 1 = 0, \qquad y^2 = x^3 - x, \qquad y = x^2 + \sqrt[3]{x^2}, \qquad y^4 + x^3 = x,$$

$$y^2 - x^4 + c = 0, \qquad y = x \pm \sqrt[3]{x^2}, \qquad y = x(x^2 + y^2), \qquad x^2 = y^4 - 1.$$

1613. — Asymptote de la courbe $2x^2y + y^3 - x = 0$. Construire cette courbe.

1614. — Construire les courbes

$$y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} + a = 0, \qquad y = \sqrt{1 - \cos x}, \qquad y = \pm\sqrt{1 - 2\sin x}, \qquad y^2 = \mathrm{L}x.$$

1615. — Construire les courbes

$$\rho = \frac{1}{\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{a\cos\omega + b\sin\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{\cos\omega + 2\sin\omega}, \qquad \rho = \cos\omega,$$

$$\rho = \frac{1}{1 - \cos\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{2 - \cos\omega}, \qquad \rho = k\omega, \qquad \rho = \frac{k}{\omega},$$

$$\rho = \mathrm{L}\omega, \qquad \rho = \frac{1}{1-\omega}, \qquad \rho = \frac{\omega}{\omega - 1}.$$

1616. — Distance du pôle à une droite en coordonnées polaires.

1617. — Simplifier les équations

$$2x^2 + 3xy + 5y^2 + x = 0, \qquad 2x^2 + 4xy + y^2 + x = 0,$$

par la transformation des coordonnées.

1618. — Faire disparaître le terme en xy dans l'équation

$$x^2 + xy + y^2 - h^2 = 0.$$

1619. — On donne l'équation $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, les axes faisant un angle θ ; longueur des axes.

1620. — Mener par un point une normale à la parabole.

1621. — On donne deux axes Ox, Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy. Equation générale des coniques passant par O, A, B, et pour lesquelles la polaire du point (a, b) est parallèle à AB.

1622. — On donne deux droites parallèles. — Equation générale des coniques tangentes à ces deux droites. — Peut-on avoir des paraboles ?

1623. — On donne une parabole et un point M sur cette parabole. — Equation générale des cercles tangents en M à la parabole.

1624. — Combien font de conditions une asymptote, deux asymptotes, deux directions asymptotiques ?

1625. — Equation d'une hyperbole asymptote à l'axe des x, ayant pour directrice la droite $y = mx$ et passant par un point donné.

1626. — Peut-on construire une hyperbole équilatère connaissant une tangente et le point de contact ?

1627. — Construire une hyperbole équilatère connaissant le centre et deux points.

1628. — On donne un cercle, un diamètre BA et une corde parallèle CD. — Equation de l'hyperbole équilatère qui passe par A, B, C et D. — Lieu des sommets quand CD varie.

1629. — Construire une hyperbole connaissant trois points et une asymptote.

1630. — Construire une hyperbole connaissant trois points et les directions asymptotiques. — Equation de cette hyperbole.

1631. — Equation générale des paraboles circonscrites à un triangle. — Combien de ces paraboles passent par un point donné du plan? — Angle des axes de ces paraboles. — Lieu des points pour lesquels les deux paraboles ont leurs axes rectangulaires.

1632. — Construire une parabole connaissant deux points et la direction des diamètres. — Le problème est-il possible ? Construire une parabole connaissant trois points et la direction des diamètres.

1633. — Construire une parabole connaissant le foyer F et deux points. — Équation de cette parabole. — Calcul du paramètre.

1634. — Construire une parabole connaissant une tangente, le point de contact et deux autres points.

1635. — Équation d'une parabole tangente à Ox en un point A et ayant son foyer sur une droite AD donnée. — Les polaires de l'origine par rapport à toutes ces paraboles passent par un point fixe : quel est ce point ?

1636. — Équation d'une parabole de paramètre donné tangente aux axes. — Lieu du foyer.

1637. — Lieu des foyers des paraboles qui passent par un point fixe et admettent pour directrice une droite donnée.

1638. — Lieu des foyers des coniques qui admettent une directrice donnée et qui passent par deux points donnés.

1639. — Interpréter les équations $PQ + \lambda RS = 0$, $PQ + \lambda R = 0$, $PQ + \lambda = 0$.

1640. — Pour quelles valeurs de λ les équations

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y + \lambda = 0, \qquad x^2 - 2xy + y^2 + x - y + \lambda = 0, \qquad 2x^2 - 3xy + 4y^2 + 5x + y + \lambda = 0,$$

représentent-elles les coniques réduites à deux droites ?

1641. — Équation quadratique du faisceau des droites qui joignent l'origine aux points d'intersection des deux courbes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

1642. Sécantes communes aux coniques représentées par l'équation $x^2 + y^2 - R^2 + \lambda y(x - a) = 0$. Voir à priori que l'équation en λ doit s'abaisser au second degré.

1643. — Même question pour les coniques $x^2 - y^2 + \lambda(x - a)(y - b) = 0$. Prévoir la racine nulle et la racine infinie.

1644. — Quels sont les points communs à toutes les coniques représentées par l'équation $x^2 + y^2 - R^2 + 2\lambda xy = 0$? Équation de la polaire d'un point (α, β). — Chercher le point commun à toutes ces polaires.

1645. — On considère les coniques représentées par l'équation $x^2 + y^2 - R^2 + 2\lambda x(y + c) = 0$. Lieu des centres.

1646. — Étudier les coniques

$$y^2 - 2px + 2\lambda xy = 0, \qquad y^2 - 2px + \lambda x^2 - y^2 - a^2 = 0.$$

1647. — Équation générale des coniques passant par l'intersection de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ avec la droite $y = mx + h$. — Exprimer qu'une pareille conique est un cercle.

1648. — On considère le cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ et la tangente en A à ce cercle. — Équation générale des coniques tangentes au cercle en A. — Exprimer que ces coniques sont des paraboles.

1649. — Équation générale des paraboles bitangentes à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, la corde des contacts étant $y - q = m(x - p)$.

1650. — Équation générale des coniques inscrites dans un parallélogramme (axes de coordonnées parallèles aux côtés du parallélogramme). — Montrer que ces coniques ont pour centre le centre du parallélogramme.

1651. — On donne un cercle, deux axes rectangulaires ne passant pas par le centre ; on demande l'équation d'une droite AB menée par l'origine telle que $OA = OB$. — Équation générale des coniques passant par A et B.

1652. — Propriétés communes aux coniques

$$1 - m^2x^2 + y^2 + 2mxy - r^2 = 0.$$

1653. — Sécantes communes à deux coniques ayant un foyer commun.

1654. — Points communs à deux coniques qui ont une directrice commune et même excentricité.

Géométrie analytique à trois dimensions.

1655. — Équation de la droite d'intersection des deux plans

$$2x + 3y - 4z + 5 = 0, \qquad x - y + z = 0.$$

1656. — Par la droite $x = az + p$, $y = bz + q$, mener un plan perpendiculaire au plan $mx + ny + pz = 0$.

1657. — Angle de Oz avec le plan $2x - 3y + 4z - 1 = 0$.

1658. — Distance de l'origine à la droite $x = az + b$, $y = cz + d$.

1659. — Distance de l'origine à la droite $mx + ny + pz + q = 0$, $m'x + n'y + p'z + q' = 0$.

1660. — Plus courte distance entre Oz et la droite $x = az + p$, $y = bz + q$.

1661. — Lieu des points équidistants de Ox et du point α, β, γ.

1662. — Lieu des points équidistants d'une sphère et d'un plan.

1663. — Longueur de la tangente menée d'un point (x_0, y_0, z_0) à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

1664. — Lieu des points d'où l'on peut mener à deux sphères des tangentes égales.

1665. — Mener à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ un plan tangent par le point (x_0, y_0, z_0). — Enveloppe de tous ces plans tangents.

1666. — Mener par Oz un plan tangent à la sphère $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0$.

1667. — Tangente en un point (x_0, y_0, z_0) aux courbes

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ xy - z = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 0, \\ z^2 - 2pz = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} ax^2 + by^2 + cz + d = 0, \\ ax^2 + cz = 0. \end{cases}$$

1668. — Équation d'un cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice le cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, ou l'ellipse $bx^2 + ay^2 - a^2b^2 = 0$ dans le plan $z = h$.

1669. — Cylindre circonscrit à la sphère $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ et de génératrices parallèles à la direction α, β, γ.

1670. — Cône circonscrit à la sphère $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ et de sommet (x_0, y_0, z_0).

1671. — Cône circonscrit à la surface $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}-1=0$ et ayant pour sommet l'origine.

1672. — Cône circonscrit à la sphère $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ ou à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ suivant la courbe de section par un plan $P=0$.

1673. — Equation de la surface engendrée par une droite qui se déplace parallèlement au plan des xy en s'appuyant sur Oz et sur la droite $y=h$, $z=mx$.

1674. — Surface engendrée par la droite $x=0$, $z=my+h$ en tournant autour de Ox.

1675. — Surface engendrée par la droite $x=a$, $z=my$ en tournant autour de Oz.

1676. — Surface engendrée par la parabole $y=0$, $z^2=2px$ en tournant autour de Ox.

1677. — Montrer que le cône $xy+yz+zx=0$ est de révolution.

1678. — Que représentent les équations

$f(x^2+y^2, z)=0$, $\quad y=\sqrt{x^2+z^2}+c$, $\quad y^2=\sqrt{x^2+z^2}+c$, $\quad y^2-(x^2+z^2)+c=0$,
$y^2-2p\sqrt{x^2+z^2}=0$, $\quad (x^2+y^2)^2+z=0$, $\quad x^2+z^2+\sqrt{x^2-1}=0$, $\quad x^2+y^2-1=\sqrt{3}$,
$x^2+y^2=\sin^2 z$, $\quad y+z^2=\sin^2 x$, $\quad y=e^{x+z}$, $\quad y=L(x^2+z^2)$.

1679.—Faire disparaître les termes en xy, yz, zx de l'équation d'une quadrique par une transformation des coordonnées.

1680. — Plan tangent à la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ parallèlement à une direction α, β, γ.

1681. — Sections planes de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$.

1682. — On donne une surface $x^2-y^2+z=0$. Etudier le plan diamétral des cordes de direction α, β, γ et la section par ce plan.

1683. — On donne la surface $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+z=0$. Diamètre conjugué d'une direction de plan donnée.

1684. — Sections circulaires de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$.

1685. — Equation générale des quadriques qui admettent pour plan diamétral le plan des xy.

1686. — Combien donne-t-on de conditions dans une quadrique en donnant : 1° une génératrice, 2° un point, 3° un plan tangent, 4° un plan tangent et son point de contact.

1687. — Combien de conditions en donnant : 1° une conique, 2° deux génératrices de même système, 3° deux génératrices de systèmes différents.

1688. — Equation générale des quadriques passant par Oz et la droite $x=a$, $y=mz$.

1689. — Equation générale des quadriques passant par Ox et tangentes au plan yOz.

1690. — Equation générale des quadriques admettant $x^2+y^2-R^2=0$, $z=h$ comme section circulaire.

1691. — Propriétés communes aux quadriques $f(x,y,z)+\lambda=0$.

1692. — Interpréter les équations $S+\lambda PQ=0$, $S+\lambda P^2=0$, $S+\lambda P=0$, $PQ+\lambda R^2=0$.

1693. — Equation générale des quadriques bitangentes à $S=0$ en ses points de rencontre avec la droite $P=0$, $Q=0$.

1694. — Intersection de deux quadriques tangentes en deux points.

1695. — Que représentent les équations

$x^2+y^2+z^2-mx+ny+pz+q^2=0$, $\quad (ax+by+cz+d)^2\pm x^2=0$, $\quad z^2+(y-x)^2-z^2=0$, $\quad f(x,y,z)+\varphi(x,y,z)^2=0$,
$yz-x^2=0$, $\quad xy+y^2+zx=0$, $\quad zx-y^2=0$, $\quad x^2+y^2+z^2=0$, $\quad xy-z^2=0$, $\quad xy=z$,
$z^2-y^2+x=0$, $\quad y^2-2xy+z=0$, $\quad (y-x)^2+z^2-2x=0$, $\quad (x+y)(y+z)=z$, $\quad (x+y)(y+z)+z+x=0$,
$y-z^2-x^2=0$, $\quad z^2+x-yz+z=0$, $\quad (y-z)^2-x^2-1=0$, $\quad x^2+y-z=0$, $\quad x^2+y^2-zx+x+y=0$,
$2x^2+y^2+z^2-xy=0$, $\quad 2x^2+y^2+z^2-xy-3x=0$, $\quad x^2+y^2-2x-2y+z=0$, $\quad xy+yz+zx=1$,
$x^2-yz+x+y=0$, $\quad xy+x+y+z+1=0$, $\quad x^2-y=ax+by+cz+d$, $\quad xyz-cy+bz-dy=0$, $\quad (ax+by)^2+cx+dz+\gamma=0$.

1696. — Cônes asymptotes des surfaces

$x^2+y^2-2x+x+y=0$, $\quad xy+z^2+x+y+z=0$, $\quad xy+y^2+z+\lambda x+y=0$

1697. — Quand λ varie, déterminer le lieu de l'intersection des deux plans

$\begin{cases} ax+\lambda y+c=0, \\ bz+\lambda x+d=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} ax+\lambda y=0, \\ \lambda x+by+cz+d=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} ax+by+\lambda=0, \\ a'x+b'y+\lambda z+d'z=0. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} lx+my+\lambda z+p=0, \\ lx+\lambda y+mz+p=0. \end{cases}$

1698. — Que représentent les équations

$y=x+\sqrt{x^2+z^2}$, $\quad y=x+1+\sqrt{x^2-2x+1}$, $\quad y=x+1+\sqrt{x^2+z^2}$, $\quad y=z+1+\sqrt{(x-z)(x+z)+1}$,
$y=x+z+1\pm\sqrt{x^2+z^2}$, $\quad y=z+\sqrt{x^2+y^2+ax+b}$, $\quad y=x+1+\sqrt{x^2-z^2+1}$, $\quad y=z+1+\sqrt{2xz-z^2-2x^2+x}$,
$y=x\pm\sqrt{x^2-z^2+1}$, $\quad y=z+1+\sqrt{x^2-2zx+2}+x$, $\quad y=x\pm\sqrt{z^2-1}$, $\quad y=z+x\pm\sqrt{z^2+2x+2}$,
$y=x\pm\sqrt{z^2+1}$, $\quad y=x\pm\sqrt{z+1}$, $\quad z=y\pm\sqrt{x}$, $\quad y=x\pm\sqrt{z-1}$,
$y=x+\sqrt{z}$, $\quad z=x+y\pm\sqrt{y+1}$, $\quad y=x+z+\sqrt{z}$, $\quad z=mx+ny+\sqrt{y+1}$.

CONCOURS DE 1900

CONCOURS GÉNÉRAUX DE BELGIQUE (ATHÉNÉES)

Rhétorique des Humanités modernes (*Section scientifique*).
Rhétorique des Humanités anciennes (*Section latine*).

MATHÉMATIQUES

Trigonométrie.

On donne deux côtés b, c et l'angle compris A d'un triangle rectiligne ABC inscrit dans une sphère de rayon R.

Déterminer la surface du triangle sphérique ABC correspondant. Appliquer la formule au cas où $R = b = c = 1^m$, $A = 90^\circ$.

Algèbre.

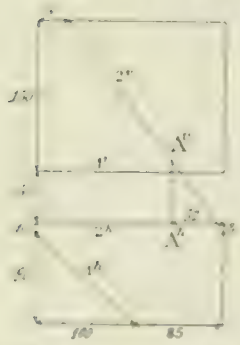
Démontrer la relation

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)+(m-1)m(m+1)\ldots(m+n-2)+\ldots$$
$$+(m-k+1)(m-k+2)\ldots(n-k+n)=\frac{C'_{m+1}-C'_{m-n+1}}{n+1}.$$

$C'_{m,n}$ désignant le nombre de combinaisons avec répétition de m lettres n à n.

Géométrie descriptive.

On donne deux droites 1 et 2, la première horizontale, la deuxième de front. Construire les projections d'une pyramide triangulaire régulière ayant pour hauteur leur perpendiculaire commune et dont la base a l'un de ses sommets en un point A donné sur la droite 2.



Géométrie analytique.

I. — Rechercher les positions d'équilibre d'une masse M d'électricité positive occupant un point d'une ellipse mais assujettie à se mouvoir sous l'action de 2 masses m' et m'' d'électricité de même nom, sans action réciproque et placées respectivement aux foyers f' et f'' de la courbe.

REMARQUE. — On rappelle que les attractions et les répulsions électriques sont proportionnelles aux masses et en raison inverse des carrés des distances.

II. — Un des sommets d'un parallélogramme circonscrit à une hyperbole se meut sur la circonférence ayant l'axe transverse pour diamètre et dans l'un des angles formés par les asymptotes et comprenant l'axe imaginaire. Rechercher les lieux décrits par les autres sommets.

N. B. — Les [illegible] ont 6 heures pour faire leur travail.

QUESTIONS PROPOSÉES

1018. — On considère une parabole (P) et un point A. De A on mène les deux tangentes AD, AE à la courbe (D, E sont les points de contact), puis on considère le cercle (C) circonscrit au triangle ADE et l'hyperbole équilatère (H) passant par A, D, E et par le sommet de la parabole.

Lieu de l'intersection M de (C) et (H) quand A décrit une droite.

Enveloppe de AM dans les mêmes conditions.

1019. — Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, trouver l'équation du conoïde engendré par une droite qui se meut en s'appuyant sur Oz, en restant parallèle à xOy, de façon que sa plus courte distance à une droite donnée passant par O, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, soit égale à une longueur donnée l. Sections par des plans parallèles aux plans de coordonnées.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMPRIMERIE [illegible]

11e Année. N° 8. Mai 1901.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR QUELQUES APPLICATIONS DES TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES INVOLUTIVES

par M. **E. Duporcq**.

Une des leçons de Mathématiques Spéciales inscrites au programme de l'agrégation porte sur les transformations quadratiques et leurs applications. Bien qu'il ne soit pas difficile de multiplier les exemples d'applications élégantes de ces transformations, le suivant, où nous n'établirons d'ailleurs aucun résultat nouveau, intéressera peut-être les lecteurs de la Revue.

1. Soient

$$C = 0, \qquad C_1 = 0, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 = 0$$

les équations tangentielles de quatre coniques ; les coniques représentées par l'équation

$$\lambda C + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0, \tag{1}$$

représentent toutes les coniques harmoniquement inscrites aux coniques d'un faisceau ponctuel : celui-ci est constitué par les coniques harmoniquement circonscrites aux quatre coniques C, C_1, C_2 et C_3.

Or l'équation (1) peut, pour des valeurs convenables des paramètres λ, représenter un système de deux points, dont l'un arbitrairement choisi : ces couples de points constituant des coniques harmoniquement inscrites aux coniques d'un faisceau ponctuel sont conjugués à toutes ces coniques : autrement dit, ils sont associés dans la transformation du second ordre qui a pour points doubles les points de base du faisceau ponctuel considéré.

2. Supposons maintenant que les coniques C_1, C_2 et C_3 soient inscrites à un même triangle $\alpha\beta\gamma$. L'équation (1) représente alors une conique d'un faisceau tangentiel défini par la conique C et par une conique quelconque inscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$: les ombilics de ces faisceaux tangentiels constituent les coniques réduites à deux points représentées par l'équation (1). On voit donc que

Deux ombilics opposés a et a' d'une conique fixe C et d'une conique inscrite à un triangle $\alpha\beta\gamma$ se correspondent dans une transformation du second ordre.

On peut remarquer que le point α et un point quelconque de $\beta\gamma$ constituent une conique inscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$; et il en résulte que si a vient en α, son correspondant a' est indéterminé sur $\beta\gamma$. *Les points α, β et γ sont donc les trois points singuliers de la transformation (a, a').*

3. Si le point a décrit une droite, le point a' décrira donc une conique circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$. Supposons, en particulier, que a décrive une tangente Δ à la conique C : le point a' sera alors un ombilic de C et d'une conique Γ tangente à Δ et inscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$. Ce point viendra donc sur C lorsque Γ lui sera tangente : il sera alors le point de contact de C et de Γ. On voit donc que

Δ désignant une tangente à une conique C, et $\alpha\beta\gamma$ un triangle quelconque, il existe quatre coniques inscrites à $\alpha\beta\gamma$, tangentes à Δ et touchant C en un autre point que Δ ; les quatre points de contact sont sur une conique circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$.

4. Supposons maintenant le triangle $\alpha\beta\gamma$ conjugué à la conique C : par polaires réciproques relativement à C, les quatre coniques obtenues deviendront les quatre coniques circonscrites au triangle $\alpha\beta\gamma$, passant par le point de contact de Δ et touchant C aux mêmes points que les précédentes. Ainsi :

Si $\alpha\beta\gamma$ est un triangle conjugué à une conique C et m un point quelconque de cette courbe, il existe quatre coniques circonscrites à $\alpha\beta\gamma$, passant par m, et tangentes à C en des points différents de m ; ces quatre points sont sur une conique circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$ (¹)

D'après la manière même dont ce résultat a été établi, on voit que cette conique est justement la transformée de la tangente Δ en m, au moyen de la transformation du second ordre précédemment étudiée.

5. Appliquons enfin cette transformation du second ordre au résultat précédent lui-même : à la conique C, conjuguée au triangle $\alpha\beta\gamma$ correspond, comme on sait, une quartique admettant α, β et γ pour points doubles à tangentes d'inflexion touchant C : aux quatre coniques envisagées précédemment correspondent les quatre tangentes à cette quartique issues d'un de ses points : on voit que leurs points de contact sont sur la droite Δ elle-même. Ainsi :

De tout point d'une quartique unicursale à points doubles d'inflexion, on peut mener à cette courbe quatre tangentes : leurs points de contact sont sur une droite dont l'enveloppe est la conique tangente aux six tangentes d'inflexion.

La lemniscate offre un exemple de ces quartiques.

6. On aura un résultat analogue corrélativement pour les courbes de quatrième classe à tangentes doubles bicuspidales, par exemple les développées de coniques ou l'hypocycloïde à quatre rebroussements.

CONJUGUÉES D'UNE DROITE PAR RAPPORT AUX QUADRIQUES QUI PASSENT PAR DEUX DROITES FIXES

par M. **L. Bickart.**

I. — On considère dans toute leur généralité les quadriques Q qui contiennent deux droites données A, B (ces droites ne se rencontrent pas).

On demande d'étudier le complexe des conjuguées par rapport à ces quadriques d'une droite donnée Δ qui ne rencontre aucune des deux premières.

II. — **1. On suppose ensuite que les trois paramètres dont dépendent les quadriques Q vérifient une relation linéaire. Démontrer que dans cette hypothèse les génératrices de ces quadriques qui sont du même système que A, B, sont les droites d'un certain complexe linéaire.**

2. Montrer que sur chacune des droites de ce complexe les quadriques Q tracent une involution dont les points doubles décrivent une quadrique S.

3. Montrer qu'il y a une infinité de droites dont les conjuguées respectives par rapport aux quadriques du réseau sont fixes, et que ces droites, ainsi que leurs conjuguées, sont les génératrices d'un même système de la quadrique S.

4. Étudier la correspondance des conjuguées d'une droite donnée Δ par rapport aux quadriques du réseau.

I

Rappel de formules. — Soient deux droites définies par les coordonnées de Plücker, $a, b, c, p, q, r, a', \ldots, r'$, et la quadrique

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2By^2 + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0;$$

posons

$$\varphi = Ax^2 + \ldots + 2B''xy, \qquad \psi = Cx + C'y + C''z.$$

(¹) Problème proposé en 1870 au Concours général.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux droites soient conjuguées par rapport à la quadrique sont

$$\begin{cases} Aqq' + A'pp' - B''(pq' + qp') + C(cq' + qc') - C'(pc' + cp') + Dcc' = 0, \\ q\varphi_{a'} - p\varphi'_a + c\psi(a, b, c) = 0, \\ q'\varphi_a - p'\varphi'_a + c'\psi(a, b, c) = 0, \\ a'\varphi'_a + b'\varphi'_b + c'\varphi'_c = 0. \end{cases}$$

La condition qui exprime la rencontre des deux droites est

$$ap' + pa' + bq' + qb' + cr' + rc' = 0.$$

Enfin, on a les identités $\quad ap + bq + cr = a'p' + b'q' + c'r' = 0.$

Ceci posé, prenons pour axe des z la droite A ; envoyons la droite B à l'infini dans un plan normal à A par une transformation homographique, et prenons pour plan des xy un plan passant par B.

Soient a, b, c, p, q, r les coordonnées de $\Delta (cr \neq 0,$ puisque Δ ne coupe ni A ni B). L'équation générale des quadriques Q qui contiennent A, B est

$$(1) \qquad Byz - B'zx + Cx - C'y = 0,$$

où B, B′, C, C′ sont quatre paramètres indépendants.

Les quatre conditions qui déterminent la conjuguée Δ' de Δ sont

$$(K) \quad \begin{cases} qc'B' - pc'B + ca'C + cb'C = 0, \\ q'cB' - p'cB + c'aC + c'bC = 0, \\ (qc' + cq')C - (pc' + cp')C = 0, \\ (ac' + ca')B' + (bc' + cb')B = 0. \end{cases}$$

L'élimination de B, B′, C, C′ à l'aide d'un déterminant donne

$$(c'(ap' + pa' + bq' + qb' - cr' - rc')(cr' - rc') = 0.$$

Cette équation se décompose en trois autres.

I. $c' = 0$. Elle exprime que Δ' rencontre B. Or deux droites qui se rencontrent ont pour conjuguées par rapport à une véritable quadrique deux droites qui se rencontrent aussi. Mais les conjuguées de Δ' et de B par rapport aux quadriques Q sont Δ et la droite B elle-même. Ces deux droites ne se rencontrent pas. Donc les quadriques correspondantes ne sauraient être des quadriques proprement dites. On trouve en effet que leur équation devient

$$(p'x + q'y)(Bz + C') = 0,$$

équation de l'ensemble de deux plans.

II. $ap' + pa' + bq' + qb' - cr' - rc' = 0$. Cette équation exprime la rencontre de Δ' avec la droite Δ_1, de coordonnées $a, b, -c, p, q, -r$, qui est la symétrique de Δ par rapport à Oz. Les quatre conditions (K) peuvent se transformer dans les suivantes :

$$C = \lambda(pc' + cp'), \qquad B = -\mu(ac' + ca'), \qquad C' = \lambda(qc' + cq'), \qquad B' = \mu(bc' + cb'),$$

$$c'[(a'p + b'q)c + (ap + bq)c']\mu + c[(a'p + b'q)c' + (a'p' + b'q')c]\lambda = 0,$$

$$c'[(ap' + bq')c' + (a'p' + b'q')c]\mu + c[(ap' + bq')c + (ap + bq)c']\lambda = 0,$$

ou, après suppression du facteur $cc' \neq 0$,

$$(1') \qquad (ap' + bq' - cr')\mu + (ap' + bq' - c'r)\lambda = 0$$

$$(2') \qquad (a'p + b'q - c'r)\mu + (ap + bq - cr)\lambda = 0.$$

Ajoutant membre à membre, il vient

$$(ap + pa' + bq + qb' - cr' - rc')(\lambda + \mu) = 0,$$

équation qui est une identité si l'équation II est satisfaite. Remplaçons dans (2) le coefficient de λ par $-(ap' + bq' - c'r)$. Elle devient

$$(a'p + b'q - c'r)\mu - (ap' + bq' - c'r)\lambda = 0,$$

ou $$(ap - bq) + (ap + bq')x - (ap - bq')x = 0,$$

ou encore $$p(ac' + ca') - q(bc' + cb') + (x + \lambda)(pc' - cp') + (bqc' - cq'),$$

ou enfin

$$(2) \qquad pB - qB + aC + bC' = 0.$$

Si, dans les équations (K), on remplace C' par l'expression déduite de (2), il vient, en supposant B = 1,

$$\begin{cases} (1'') & (q - pB)(bc' + cb') + c(ba' - ab')C = 0, \\ (2'') & (q - pB)(pc' + cp') = (a(pc' + cp) + b(qc' + cq))C, \\ (3'') & (qc' + cq) = (pc' + cp)B, \\ (4'') & (ac' + ca') + (bc' + cb')B = 0, \end{cases}$$

On reconnaît, en tenant compte de l'équation écrite au début de II, que les équations (1'') et (2'') sont équivalentes, ainsi que (3'') et (4'').

Nous n'avons donc à considérer que (2'') et (3''). Or ces équations sont homogènes en $pc' + cp'$ et $qc' + cq'$.

Deux cas se présentent :

1° $(pc' + cp')(qc' + cq') \neq 0$. Alors (2'') et (3'') ne peuvent être compatibles que si

$$(3) \qquad bBC + pB - aC - q = 0,$$

équation que l'on obtient par élimination du rapport $\dfrac{pc' + cp}{qc' + cq'}$. Mais, de cette équation (3) combinée avec (2), on déduit pour équation de Q

$$(z - C(x + By)) = 0,$$

équation de l'ensemble de deux plans.

2° $pc' + cp' = 0$, $qc' + cq' = 0$. Alors la condition du début de II donne $a'p + b'q = rc'$. Les équations (2) et (3) deviennent des identités et les équations (1'') et (4'') s'écrivent, en y remplaçant p', q', c' par les valeurs déduites des dernières conditions,

$$(pq - pB + c(C(ab - ba')) = 0,$$

$$(q - pB)(ab - ba') = 0.$$

Si l'on a $ab - ba' \neq 0$, il faut que $q - pB = 0$, $C = 0$, et, de la condition (2), on déduit $C' = 0$. L'équation de Q se réduit à $yz = 0$, équation de deux plans.

Si $ab - ba' = 0$, on a $\dfrac{a}{a} = \dfrac{b}{b} = \dfrac{c}{-c} = \dfrac{p'}{p} = \dfrac{q}{q} = \dfrac{r}{-r}$, et la droite Δ' vient se confondre avec Δ_1. Ainsi donc,

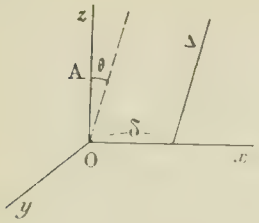
Si Δ rencontre Δ_1 sans se confondre avec cette droite, la quadrique correspondante se décompose en deux plans passant respectivement par A et B.

La droite Δ' est la conjuguée de Δ par rapport à une double infinité de quadriques Q dont les coefficients satisfont à la condition (2).

III. $rc' - cr' = 0$. — Cette équation est celle d'un complexe linéaire. Soient x, y, z, X, Y, Z deux positions N ; on a $(x - X)Z = z$, $(y - Y)X = xY$, d'où $(yX - xY)(Z - z) = 0$.

Cette équation, où l'on considère x, y, z comme fixes, X, Y, Z comme les coordonnées courantes, est celle d'un plan qui contient toutes les droites du complexe issues de x, y, z (plan focal de x, y, z).

Prenons pour axe des x la perpendiculaire commune à A et Δ et pour axe des y la normale au



plan xOz. Soient θ et δ l'angle et la plus courte distance de A, Δ. Les équations et les coordonnées de Δ deviennent

$$\begin{cases} x = \delta, & p = 0, & q = \delta \sin\theta, & r = -\delta \sin\theta, \\ y = z \operatorname{tg}\theta, & a = 0, & b = \sin\theta, & c = \cos\theta, \end{cases}$$

d'où
$$\frac{r}{c} = -\delta \operatorname{tg}\theta.$$

Si donc δ' et θ' sont la plus courte distance et l'angle de A, Δ', on aura

$$\delta' \operatorname{tg}\theta' = \delta \operatorname{tg}\theta.$$

Le moment relatif de A et Δ' est donc constant. A est l'axe central du complexe. La droite Δ et la droite Δ' font partie du complexe.

A et B en sont deux droites conjuguées, c'est-à-dire que toute droite du complexe qui rencontre l'une d'elles rencontre l'autre. En effet, si $\delta = 0$, il faut que $\theta = \frac{\pi}{2}$, et inversement.

Nous pouvons remarquer que les équations (1'), (2') donnent

$$\lambda + \mu = 0,$$

d'où $\quad C = \lambda(pc' + cp'), \qquad B = \lambda(ac' + ca'), \qquad C' = \lambda(qc' + cq'), \qquad B' = -\lambda(bc' + cb').$

L'équation de Q devient

$$(ac' + ca')yz - (bc' + cb')zx + (pc' + cp')x + (qc' + cq')y = 0.$$

En résumé, les droites Δ' engendrent le complexe $rc' - cr' = 0$.

Chacune des droites de ce complexe détermine, et cela d'une seule façon, une quadrique Q de la famille. Il y a exception pour la droite Δ_1, à laquelle correspond une double infinité de ces quadriques, et pour celles qui coupent Δ_1 auxquelles ne correspondent que des quadriques impropres.

II

Supposons que les paramètres B, B', C, C' vérifient une équation linéaire et homogène, que nous écrirons sous la forme

$$(2) \qquad p_0 B - q_0 B' + a_0 C + b_0 C' = 0.$$

Soient a, b, c, p, q, r les coordonnées d'une génératrice. Moyennant les équations

$$(G) \qquad p = bz - cy, \qquad q = cx - az,$$

nous exprimerons que cette droite est entièrement située sur la quadrique par les conditions

$$aB' + bB = 0, \qquad Cq = C'p, \qquad qB' - pB + aC + bC' = 0.$$

On peut encore obtenir ces conditions au moyen des équations (K), en exprimant que la droite se confond avec sa conjuguée. On peut donc poser

$$B' = \mu b, \qquad B = -\mu a, \qquad C = \lambda p, \qquad C' = \lambda q,$$

d'où, en substituant dans la dernière,

$$(\lambda + \mu)(ap + bq) = 0.$$

Or la condition $ap + bq = 0$ n'est pas à considérer, car elle s'écrit $cr = 0$ et elle exprime que (G) rencontre A ou B, ce qu'on ne suppose pas. Reste donc

$$\lambda + \mu = 0, \qquad B' = -\lambda b, \qquad B = \lambda a, \qquad C = \lambda p, \qquad C' = \lambda q.$$

L'équation de condition devient ainsi

$$ap_0 + a_0 p + bq_0 + q b_0 = 0.$$

Elle exprime que la génératrice G fait partie d'un certain complexe linéaire.

Ce complexe est d'ailleurs le plus général possible dans les conditions de la question. En effet l'équation générale d'un complexe linéaire est

$$a_0 p + p_0 a + b_0 q + q_0 b + c_0 r + r_0 c = 0,$$

$a_0, p_0, \ldots, r_0$ étant quelconques.

Or ce complexe doit pouvoir contenir A, dont les coordonnées sont $a = 0$, $b = 0$, $q = 0$, $p = 0$, $r = 0$; donc $r_0 = 0$. De même, il doit pouvoir contenir B, d'où $c_0 = 0$.

Inversement, si les génératrices (G) appartiennent à ce complexe, les coefficients de la quadrique satisferont à l'équation (2).

Avant d'aller plus loin, nous allons profiter de cette condition pour simplifier la forme de l'équation générale (1). Transportons l'origine en un point quelconque de A et dans le nouveau plan des xy prenons pour axes des x et des y deux droites arbitraires distinctes passant par l'origine. Autrement dit, changeons x en $\lambda x + \lambda' y$, y en $\mu x + \mu' y$, z en $z + h$ $(\lambda\mu' - \mu\lambda' \neq 0)$.

L'équation (1) prend la forme

$$B_1 yz + B'_1 zx + C_1 x + C'_1 y = 0,$$

et le détail du calcul transforme la condition (2) en

$$(p_0 - hb_0)\lambda + (q_0 + ha_0)\mu B_1 - (p_0 - hb_0)\lambda' + (q_0 + ha_0)\mu B' + (a_0\mu' - b_0\lambda')C_1 + (b_0\lambda - a_0\mu)C'_1 = 0.$$

Nous allons profiter de l'indétermination laissée sur $\lambda, \lambda', \mu, \mu', h$ pour annuler le plus de coefficients possible de cette relation.

Remarquons qu'on ne peut pas annuler à la fois les coefficients de C_1 et de C'_1, car il en résulterait $\lambda\mu' - \mu\lambda' = 0$, et les nouveaux axes des x et des y coïncideraient.

Annulons le coefficient de C_1. Posons à cet effet $\lambda' = \varepsilon a_0$, $\mu' = \varepsilon b_0$. Si l'on pose $c_0 r_0 = -(a_0 p_0 + b_0 q_0)$, le coefficient de B' devient $\varepsilon c_0 r_0$ et on ne peut plus l'annuler.

Annulons alors celui de B_1, en posant $\lambda = \theta(q_0 + ha_0)$, $\mu = -\theta(p_0 - hb_0)$; le coefficient de C'_1 devient $-\theta c_0 r_0$, et notre relation se réduit à $\theta C' - \varepsilon B'_1 = 0$.

Posons $\frac{\varepsilon}{\theta} = \delta$ et $B' = 1$, ce qui est toujours possible; l'équation prend la forme

$$F = Byz + zx + Cx + \delta y = 0.$$

Nous avons éliminé implicitement le cas où $c_0 r_0 = 0$. Je dis que dans ce cas les quadriques ont une génératrice commune en dehors de AB. En effet, la condition pour que Q passe par un point fixe (x_0, y_0, z_0) est

$$By_0 z_0 + Bz_0 x_0 + Cx_0 + Cy_0 = 0.$$

Si l'on identifie cette condition avec (2), il vient

$$a_0 p_0 + b_0 q_0 = 0.$$

D'ailleurs, dans ce cas, les quadriques contiennent une génératrice fixe qui passe par le point $\left(x_0 = a_0,\ y_0 = b_0,\ z_0 = \frac{p_0}{b_0} = \frac{q_0}{-a_0}\right)$ et rencontre A, B. Prenons cette génératrice pour axe des y; nous obtenons la condition $C' = 0$, et l'équation (1) prend la forme

$$Byz + zx + Cx = 0,$$

équation de la forme F, où $\delta = 0$.

En résumé, l'équation la plus générale et la plus simple à laquelle on puisse ramener l'équation (1) est l'équation F.

Quant au complexe des génératrices, son équation se réduit à

$$q + \delta b = 0.$$

Si $\delta \neq 0$, le complexe est un complexe proprement dit, c'est-à-dire que ses génératrices ne rencontrent pas une droite fixe.

Si $\delta = 0$, il reste $q = 0$; les génératrices rencontrent l'axe des y, lequel est génératrice commune à toutes les quadriques, ce qui était évident.

2° L'équation aux z des points de rencontre de la droite a, b, c, p, q, r et de la quadrique f est

$$(a + \mathrm{B}b)z^2 - (q - p\mathrm{B} + a\mathrm{C} + \delta b)z + \mathrm{C}q - \delta p = 0,$$

et, si la droite fait partie du complexe $\delta b + q = 0$, l'équation devient

$$(a + \mathrm{B}b)z^2 + (a\mathrm{C} - p\mathrm{B})z - \delta(p + \mathrm{C}b) = 0,$$

ou identiquement,

$$z^2 + \frac{1}{b}\left(a\frac{p + \mathrm{C}b}{a + \mathrm{B}b} - p\right)z - \delta\frac{p + \mathrm{C}b}{a + \mathrm{B}b} = 0,$$

équation dont les coefficients sont fonctions linéaires du seul paramètre $\frac{p + \mathrm{C}b}{a + \mathrm{B}b}$. Donc les racines sont liées involutivement, la relation d'involution étant $az'z'' + q(z' + z'') + \delta p = 0$. Les points doubles sont déterminés par $z' = z''$, c'est-à-dire

$$az^2 + 2qz + \delta p = 0, \qquad \text{ou} \qquad z(az + q) + qz + \delta(bz - cy) = 0,$$

ou, puisque $\delta b + q = 0$, $\qquad z(az + q) - \delta cy = 0$;

mais $az + q = cx$, d'où

$$\text{(S)} \qquad zx - \delta y = 0.$$

3° Les équations qui donnent la conjuguée Δ' d'une droite Δ sont

$$\text{(K)} \quad \begin{cases} qc' - pc'\mathrm{B} + ca'\mathrm{C} + cb'\delta = 0, \\ q'c - p'c\mathrm{B} + c'a\mathrm{C} + c'b\delta = 0, \\ (qc' + cq')\mathrm{C} = \delta(pc' + cp'), \\ (bc' + cb')\mathrm{B} + (ac' + ca') = 0. \end{cases}$$

Les conditions pour que ces équations déterminent Δ' indépendamment de B et C sont

$$\begin{array}{llll} qc' + cb'\delta = 0, & p = 0, & a' = 0, & qc' + cq' = 0, \\ q'c + c'b\delta = 0, & p' = 0, & a = 0, & bc' + cb' = 0; \end{array}$$

d'où $a = 0$, $\quad p = 0$, $\quad q - b\delta = 0$; $\qquad a' = 0$, $\quad p' = 0$, $\quad q' - b'\delta = 0$; $\quad \frac{b'}{b} = \frac{q'}{q} = \frac{c'}{-c}$.

Sous cette dernière forme, il est visible que Δ' et Δ étant assujetties aux trois mêmes conditions décrivent la même surface, et les coordonnées de Δ' sont $a, b, -c, p, q, -r$, c'est-à-dire que Δ' est symétrique de Δ par rapport à Oz.

Les équations de Δ, $\qquad p = bz - cy, \qquad q = cx - az,$

deviennent $\qquad cy - bz = 0, \qquad cx - b\delta = 0.$

L'élimination de $\frac{b}{c}$ donne pour lieu

$$zx - \delta y = 0,$$

c'est-à-dire la surface S.

4° a, b, c, p, q, r restant fixes, cherchons les équations qui relient les coefficients de Δ'.

Si l'on porte dans les deux premières des équations (K) les valeurs de B, C tirées des deux dernières, il vient

$$\text{(K')} \quad \begin{cases} (a'p + b'q - c'r)(qc' + cq') + \delta(a'p + b'q - c'r)(bc' + cb') = 0, \\ (ap' + bq' - cr')(qc' + cq') + \delta(ap' + bq' - c'r)(bc' + cb') = 0. \end{cases}$$

1er cas : $qc' + cq' = 0$, $\quad bc' + cb' = 0$. — Ces deux conditions entraînent, comme on a vu (I), ou bien que les quadriques se décomposent, ou bien, d'après même les équations (K), que $ac' + ca' = 0$, $pc' + cp' = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{-c}{c'} = \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'};$$

la droite Δ' se confond avec la symétrique Δ_1 de Δ par rapport à Oz, et alors les deux premières équations (K) se réduisent à

$$(2) \qquad pB - q + aC + b\delta = 0.$$

Supposons d'abord que cette condition soit une identité

$$a = 0, \qquad p = 0, \qquad b\delta - q = 0;$$

la droite Δ est une génératrice de S. Nous avons vu en effet que sa conjuguée Δ_1 était fixe.

Si la condition n'est pas une identité, elle réduit à un seul le nombre des paramètres de l'équation F : la conjuguée de Δ est toujours confondue avec Δ_1. Les quadriques correspondantes perdent de leur généralité ; leur équation ne contient plus qu'un paramètre. Elles ont donc en commun les droites A, B et deux autres droites ; un calcul facile montre que celles-ci s'appuient sur A, B dans les deux plans parallèles à xOy déterminés par

$$az^2 + (q - b\delta)z + p\delta = 0.$$

2e cas : $(qc' + cq')(bc' + cb') \neq 0$. — Ajoutons membre à membre les équations (K') ; il vient

$$(ap' + pa' + bq' + qb' - cr' - rc')[(qc' + cq') + \delta(bc' + cb')] = 0.$$

Si le premier facteur est nul, comme nous avons déjà vu, ou bien Δ' rencontre Δ_1, auquel cas les quadriques se décomposent, ou bien Δ' se confond avec Δ_1, auquel cas les coefficients satisfont à l'équation (2), cas qui vient d'être étudié.

Si le premier facteur n'est pas nul, il faut que

$$\Gamma = qc' + cq' + \delta(bc' + cb') = 0,$$

et alors l'une quelconque des équations (K') donne

$$\Gamma_1 = cr' - rc' = 0.$$

Ces deux équations, qui sont celles de deux complexes linéaires, définissent la congruence dont Δ' fait partie.

D'après un théorème général, Δ' doit rencontrer deux droites fixes. Nous allons le vérifier.

Si $A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0, R_0$ sont les coordonnées d'une droite, c'est-à-dire si

$$d = A_0P_0 + B_0Q_0 + C_0R_0 = 0,$$

l'équation

$$A_0p + P_0a + B_0q + Q_0b + C_0r + R_0c = 0$$

exprimera que la droite $a, b, \ldots, r$ rencontre la première. Dès lors, formons une combinaison linéaire des équations de nos deux complexes, $\Gamma - \lambda\Gamma_1 = 0$. Cette équation est vérifiée quel que soit λ. Elle s'écrit

$$(cq' + \delta cb') + (\lambda c - q + \delta b)c - \lambda cr' = 0;$$

écrivons que les coefficients satisfont à l'équation $d = 0$; il vient

$$r\lambda^2 + (q + \delta b)\lambda - \delta c = 0,$$

équation du second degré, dont les racines sont λ', λ''. Les équations $\Gamma - \lambda'\Gamma_1 = 0$, $\Gamma - \lambda''\Gamma_1 = 0$ peuvent remplacer les équations $\Gamma = \Gamma_1 = 0$, et expriment chacune que Δ rencontre une droite fixe.

Les coefficients de celle de ces droites qui correspond à la racine λ sont

$$A = 0, \quad B = c, \quad C = -\lambda c, \quad P = 0, \quad Q = \delta c, \quad R = \lambda r - q - \delta b.$$

Ces coefficients sont liés par trois équations indépendantes de ceux de Δ,

$$A = P = Q - \delta B = 0.$$

On en déduit que nos deux droites fixes, s'appuyant sur AB, sont génératrices de la quadrique S.

Conclusions. — Les droites de la congruence sont toutes des droites Δ. Les droites Δ' engendrent la congruence. A chacune d'elles correspond une quadrique F proprement dite bien déterminée. Il y a exception pour la droite Δ, à laquelle correspond un faisceau de quadriques, et pour celles qui coupent Δ_1, auxquelles ne correspondent que des quadriques impropres.

Remarques sur le rapport de la quadrique S *avec les quadriques* F. — Le plan polaire d'un point fixe (x_0, y_0, z_0) par rapport aux quadriques F a pour équation

$$zX + xZ + \delta(Y + y) + (Yz + Zy)B + (X + x)C = 0.$$

Ce plan passe généralement par le point fixe $(-x, -y, z)$, conjugué harmonique du point donné par rapport aux deux points où la droite issue du point donné et coupant A et B rencontre ces deux droites. Cherchons le lieu des points dont les plans polaires passent par une même droite. Les équations de cette droite seront évidemment $Yz + Zy = X + x = 0$, et il faudra qu'elle soit contenue dans le plan $zX + xZ + \delta(Y + y) = 0$, d'où la condition

$$x - zy = 0 :$$

le lieu cherché est donc la quadrique S.

La droite correspondante a alors pour équation

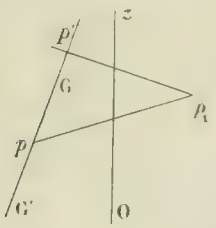
$$(G) \qquad X + x = 0, \qquad \delta Y + Zx = 0,$$

et l'élimination de x entre ces deux équations donne

$$\delta Y - ZX = 0 ;$$

donc cette droite est une génératrice de S, du système A.

Ce résultat pouvait être prévu. Soient en effet, sur la génératrice G' d'une des surfaces F, p et p' les points doubles de l'involution tracée sur G par les quadriques F, et soit p_1 le symétrique de p par rapport à Oz. Le plan polaire de p par rapport aux quadriques F passe en p_1 symétrique de p, comme on a vu, et il doit passer aussi en p'. Donc il contient la droite p_1p'. Le plan pG a pour équation



$$\delta Y + xZ - zX - \delta y = 0.$$

Si nous assujettissons le point p à rester dans un plan

$$(\pi) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

l'équation du plan pG se met sous la forme

$$\delta(BY + D) + x(BZ + A\delta) + Z(C\delta - BX) = 0,$$

et ce plan vient passer par un point fixe déterminé par

$$BY + D = BZ + A\delta = BX - C\delta = 0,$$

point dont les coordonnées vérifient l'équation du plan (π).

Ainsi donc, soit p un point dont les plans polaires concourent sur une droite G; p est un point de S et G une génératrice de S. Coupons par un plan quelconque passant par p, et rencontrant G en p'. Si le point p se déplace dans ce plan tout en restant sur la quadrique S, il décrira, ainsi que p', une conique C, section de S par π, et le plan pG passera par un point fixe ω du plan π. C'est-à-dire que la droite pp' passera par un point fixe ω.

D'ailleurs, si on appele x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point ω, on reconnaît que l'équation de (π) s'écrit

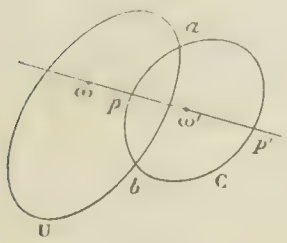
$$-z_0 X + \delta Y + x_0 Z - \delta y_0 = 0.$$

Ce plan est précisément le plan focal du point ω dans le complexe

$$\delta b + q = 0,$$

ce qui pouvait se prévoir, puisqu'on sait que les droites de ce complexe sont divisées harmoniquement par l'une quelconque des quadriques F et par la quadrique S.

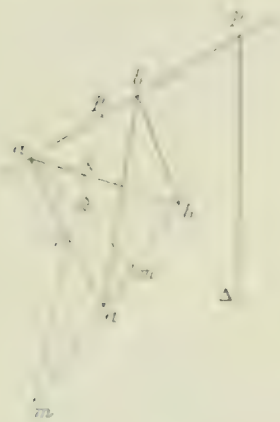
Mais il y a plus : le plan π qui coupe S suivant la conique C coupe F suivant une conique U ; les coniques C et U ont en commun les deux points a, b où (π) coupe A et B, et toute droite issue de ω est divisée harmoniquement par U et C. Or, l'enveloppe des droites divisées harmoniquement par deux coniques est en général une conique. Dans le cas particulier, cette conique se décompose donc en deux points, dont l'un, ω, est fixe : d'après une discussion également connue, ces deux points ω, ω' sont les pôles d'une des cordes communes ab par rapport aux deux coniques.



Si donc nous projetons la figure sur un plan quelconque de façon que a, b deviennent les points cycliques, nous voyons que C deviendra un cercle, que ω sera le centre de ce cercle, et que les coniques U se projetteront suivant les cercles orthogonaux au premier. C'est cette propriété que nous voulions établir.

D'ailleurs les coniques U forment le réseau le plus général de coniques à deux paramètres qui ont deux points fixes. L'étude de ces réseaux a été faite dans la *Revue*. (Notes de M. Gilbert, août et septembre 1900.)

Démonstration géométrique de l'existence du complexe [illegible] $= 0$. — Nous revenons au paragraphe I et nous cherchons les droites Δ' conjuguées de Δ par rapport aux quadriques Q, que l'on peut mener par un point m.



Dire que Δ' passe en m impose une certaine condition aux quadriques Q. Soient Q_m les quadriques qui y satisfont.

Il existe une droite issue de m et coupant A, B. Soient a, b les points de rencontre, et m' le conjugué harmonique de m par rapport à a, b.

Le plan polaire de m par rapport à l'une quelconque des quadriques Q_m devant contenir Δ par hypothèse, et passant d'ailleurs par m', est fixe.

Soient a', b' les traces sur ce plan $m'\Delta$ de A, B et λ un point de A; $m\lambda$ coupe $a'm'$ en θ. Le conjugué λ' de λ par rapport à m et θ doit se trouver sur Q_m. Or λ' décrit une droite, qui n'est autre que $a'b$. Donc toutes les quadriques Q_m vont contenir la droite $a'b$ et de même la droite ab'.

Soit p le point où $a'b'$ coupe Δ. Le plan polaire du point p par rapport à Q_m contient le point fixe p' conjugué de p par rapport à $a'b'$. De plus, les droites ab, $a'b'$ sont conjuguées par rapport à Q_m. Donc le plan polaire de p passe par ab. Donc enfin il est fixe. Dès lors, les droites du complexe qui passent par m doivent s'y trouver. Autrement dit, le complexe est linéaire.

Le raisonnement montre que ab en fait partie. Donc toutes les droites qui rencontrent A et B en font partie, A et B sont deux droites conjuguées dans le complexe. La droite Δ elle-même en fait partie, car elle est à elle-même sa conjuguée par rapport à la quadrique Q qui passe par A, B, Δ.

Le raisonnement ci-dessus suppose le plan $m'\Delta$ bien déterminé. Or si le point m' tombe sur Δ, il n'en est plus ainsi. Le point m est alors sur une certaine droite Δ (qui se transforme dans la symétrique de Δ par rapport à A, quand on rejette B à l'infini dans un plan normal à A). Si la conjuguée Δ' de Δ qui passe en m ne se confond pas avec Δ_1 le plan polaire d'un point quelconque m'_1 de Δ devra contenir cette conjuguée et un certain point m_1 de Δ_1. Il se confondra donc avec le plan $\Delta'\Delta_1$. Tous les points de Δ auraient alors même plan polaire, ce qui est absurde, à moins que les quadriques correspondantes ne se décomposent.

Si au contraire Δ' se confond avec Δ_1 il y a indétermination, et il existe une double infinité de quadriques Q par rapport auxquelles Δ admet Δ_1 pour conjuguée.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

958. — *On donne les deux surfaces*

(1) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = L,$$

(2) $$A(x - p)^2 + B(y - q)^2 + C(z - r)^2 = M,$$

où A, B, C sont des nombres réels, L et M des nombres positifs, n un entier positif, p, q, r les coordonnées d'un point donné. On joint un point [illegible] *de la surface* (1) *à un point de la surface* (2). *Puis, considérant la surface* (2) *comme invariablement liée à la droite ainsi obtenue, on imagine que cette droite, de longueur constante, se déplace parallèlement à elle-même de manière que son origine décrive la surface* (1). *Trouver l'enveloppe de la surface* (2).

Même problème en remplaçant les équations (1) *et* (2) *par*

(1) $$Ax^2 + By^2 + Hz = 0,$$

(2) $$A(x - p)^2 + B(y - q)^2 + K(z - r)^2 = 0$$

Il est évident que pour passer de la position initiale à une position quelconque de la figure mobile il suffit d'effectuer une translation.

Cela posé, soient A le point fixe donné (a, b, c) sur la surface (1), $A'(a', b', c')$ ce qu'il devient après une translation dont les composantes seront désignées par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, M un point quelconque de la figure mobile et M′ ce qu'il devient après la translation ; soient encore x, y, z et x', y', z' les coordonnées de ces deux points. Nous aurons

$$x' = \alpha_1 + x, \qquad y' = \beta_1 + y, \qquad z' = \gamma_1 + z,$$

et

$$a' = \alpha_1 + a, \qquad b' = \beta_1 + b, \qquad c' = \gamma_1 + c;$$

nous devons d'abord exprimer que le point (a', b', c') est sur la surface (1), puis remplacer, dans (2), x, y, z, par $x' - \alpha_1$, $y' - \beta_1$, $z' - \gamma_1$, ou, en supprimant l'accent, par $x - \alpha_1$, $y - \beta_1$, $z - \gamma_1$, pour avoir la nouvelle équation de la surface (2). Nous trouvons ainsi

$$A(\alpha_1 + a)^n + B(\beta_1 + b)^n + C(\gamma_1 + c)^n = L,$$
$$A(x - p - \alpha_1)^n + B(y - q - \beta_1)^n + C(z - r - \gamma_1)^n = M;$$

nous prendrons alors pour paramètres variables $\alpha_1 + a = \alpha$, $\beta_1 + b = \beta$, $\gamma_1 + c = \gamma$, et nous désignerons $x + a - p$, $y + b - q$, $z + c - r$ par X, Y, Z : nous obtiendrons les équations plus simples

$$A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n = L,$$
$$A(X - \alpha)^n + B(Y - \beta)^n + C(Z - \gamma)^n = M.$$

Il reste à trouver l'enveloppe d'une famille de surfaces à deux paramètres arbitraires. Dans le cas actuel, il faut joindre aux deux équations précédentes celles qu'on obtient en égalant les rapports des dérivées de mêmes rangs des deux premiers membres. Ceci donne

$$\frac{\alpha^{n-1}}{(X - \alpha)^{n-1}} = \frac{\beta^{n-1}}{(Y - \beta)^{n-1}} = \frac{\gamma^{n-1}}{(Z - \gamma)^{n-1}};$$

égalons ces rapports à un nombre variable μ^{n-1}, et désignons par μ une des déterminations de la racine $(n-1)^e$ de ce nombre, par $\omega, \omega', \omega''$ trois racines $(n-1)^{es}$ de l'unité ; nous aurons

$$\frac{\alpha}{X - \alpha} = \mu\omega, \qquad \frac{\beta}{Y - \beta} = \mu\omega', \qquad \frac{\gamma}{Z - \gamma} = \mu\omega''.$$

Ces équations nous donneront α, β, γ en fonction de μ, nous remplacerons dans les deux premières et nous éliminerons μ entre les deux équations ainsi obtenues.

Le calcul est très facile dans le cas où $\omega = \omega' = \omega''$: posons alors $\mu\omega = \lambda$, nous aurons

$$X - \alpha = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad Y - \beta = \frac{\beta}{\lambda}, \qquad Z - \gamma = \frac{\gamma}{\lambda},$$

puis,

$$\alpha = \frac{\lambda X}{1 + \lambda}, \qquad \beta = \frac{\lambda Y}{1 + \lambda}, \qquad \gamma = \frac{\lambda Z}{1 + \lambda};$$

en portant $X - \alpha$, $Y - \beta$, $Z - \gamma$ dans la seconde équation puis comparant le résultat obtenu à la première équation, nous obtenons $M\lambda^n = L$, d'où $\lambda = \sqrt[n]{\frac{L}{M}}$; il n'y a plus qu'à remplacer α, β, γ par les valeurs écrites plus haut pour avoir les diverses enveloppes qui correspondent à ce cas, puisque λ est une constante. Elles ont pour équation commune

$$AX^n + BY^n + CZ^n = \frac{L(1 + \lambda)^n}{\lambda^n} = M(1 + \lambda)^n.$$

Ce calcul nous fournit n enveloppes particulières qui correspondent aux n déterminations de λ ; parmi elles, une ou deux ont des équations réelles, suivant la parité de n.

Dans le cas où $n = 2$, le problème est entièrement résolu.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

944. — *Autour d'un axe vertical z tourne un disque circulaire de 9cm de diamètre et dont la position initiale AOB est définie ainsi : son centre O est dans le plan de front de l'axe z à 6cm à droite de cet axe ; son plan, perpendiculaire au plan de front, est incliné à 45° sur z, et de façon à couper z en un point C* ***situé au-dessous du point O.***

Du solide annulaire engendré par le disque on enlève la partie intérieure à l'hyperboloïde de révolution qui a pour génératrice le diamètre de front AB du disque, et pour axe la verticale du point le plus en ***avant du disque.***

Le solide restant repose sur un sol horizontal par son parallèle inférieur.

Le représenter par ses deux projections, avec les ombres qu'il détermine sur lui-même et sur le sol, quand on l'éclaire par des rayons parallèles dont la direction et le sens sont ceux de la flèche OC après une rotation de 45° dans le sens des aiguilles d'une montre autour de z. On placera les projections de z sur l'axe de la feuille parallèle aux grands côtés, sa projection horizontale à 16cm au-dessus du bord inférieur ; ***la projection verticale du point O à 34cm au-dessus du même bord.***

On indiquera en traits pleins rouges les constructions nécessaires pour déterminer les points remar- ***quables de l'épure. On ne tracera que les parties vues des courbes d'ombres.***

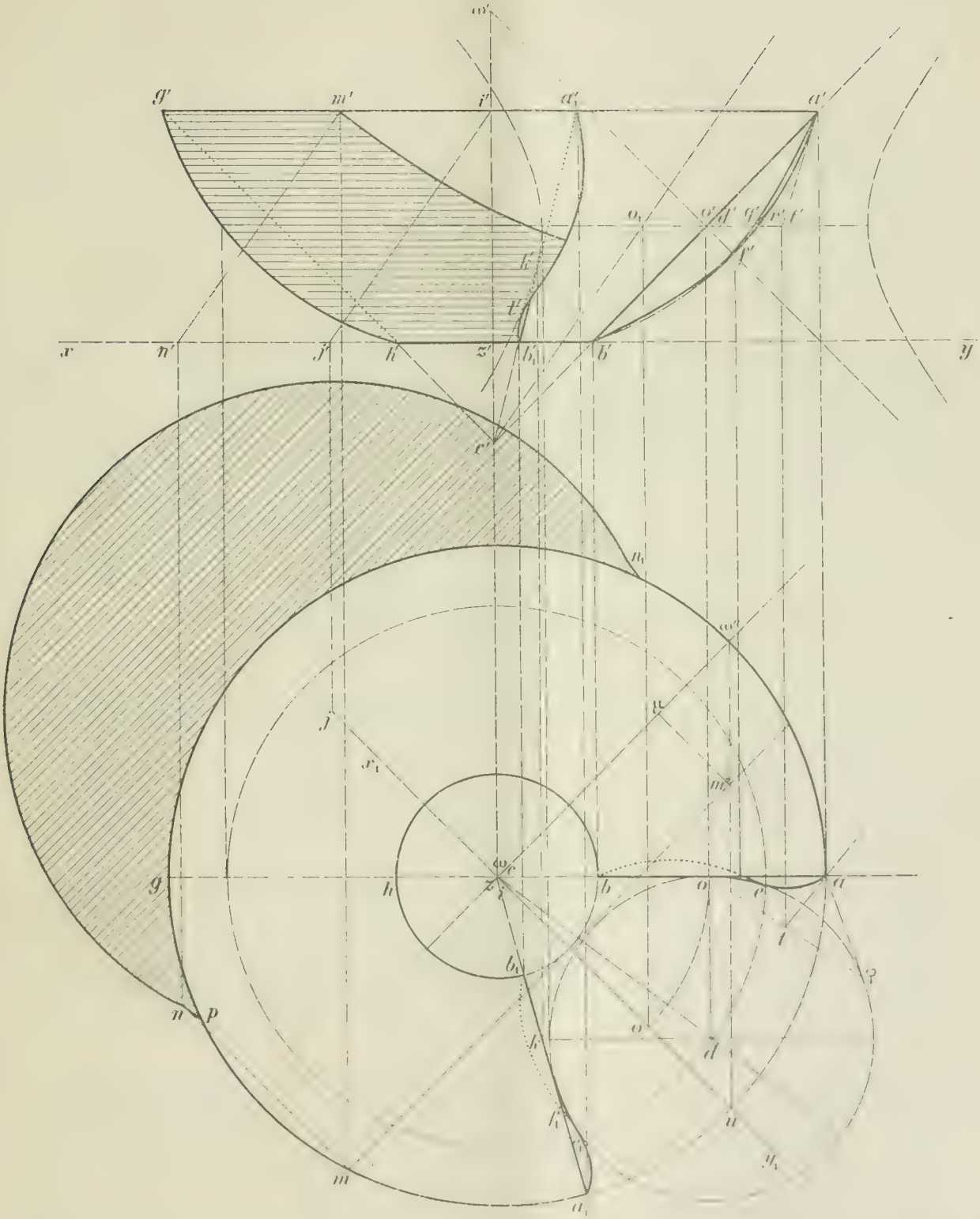
(*Ecole Polytechnique, concours de 1900.*)

Représentation du solide annulaire. — La perpendiculaire élevée en O au plan du disque donné rencontre l'axe de révolution en un point Ω qui est équidistant de tous les points de la circonférence de ce disque ; dans la rotation, tous ces points appartiendront donc à la surface de la sphère de centre Ω et qui passe par l'un d'eux. Le solide considéré est alors limité d'une part par la portion de surface sphérique de centre Ω comprise entre les parallèles décrits par A et B, et d'autre part par la surface conique de centre C, d'axe Cz et dont CBA est une génératrice, surface qu'enveloppe le plan du disque dans sa rotation. Ce solide est ordinairement nommé anneau sphérique ; sa représentation est immédiate. Son contour apparent vertical se compose des arcs de cercle $a'b'$, $g'h'$ et des portions de droites ab et gh. Les droites $a'g$ et $b'h'$, projections verticales des parallèles horizontaux, limitent cette projection verticale. Horizontalement ce solide est limité par les deux parallèles de diamètres ag et bh

Intersection du solide annulaire et de l'hyperboloïde. — L'hyperboloïde a pour axe la verticale d, d' ; $(ab, a'b')$ est une génératrice de front de cette surface. On obtient son intersection avec le solide annulaire en cherchant successivement ses intersections avec la surface sphérique et avec la surface conique qui limitent ce solide.

Pour l'intersection de l'hyperboloïde et de la sphère on emploie des plans horizontaux auxiliaires ; nous avons fait la construction pour le plan du cercle de gorge de l'hyperboloïde, ce qui nous donne deux points projetés horizontalement en e et e_1. On a directement les points a, b, a_1, b_1 sur les parallèles limites dans la sphère ; nous avons construit la tangente $(at, a't)$ au point (a, a') en déterminant les traces $\alpha\alpha$ et tt sur le plan du cercle de gorge des plans tangents en ce point aux deux surfaces. Pour avoir le point (f, f') sur le contour apparent vertical de la sphère on coupe par le plan de front de (ω, ω') qui est tangent à l'hyperboloïde et contient, outre la génératrice $(ab, a'b')$, une seconde génératrice $(\omega\omega_1, \omega'\omega'_1)$, d'où f et par suite f et f_1. La projection horizontale de l'intersection admet pour axe de symétrie $d\omega$.

L'intersection de l'hyperboloïde et du cône se compose de AB, qui est génératrice commune, et de la symétrique de AB par rapport au plan vertical de symétrie cd. Cette dernière touche au point (k, k') l'hyperbole équilatère, méridienne principale de l'hyperboloïde.



g'
m'
i'
a'₁
a'
o₁
o'
d'
q'
r'
t'
f'
k'
l'
x
n'
j'
h'
z'
b'₁
b'
y
c'
n₁
ω'
μ
j
x₁
m'
g
h
z
c
i
b
o
e
a
t
b₁
n
p
o
k
d
f₁
u
y₁
m
a₁

Cette hyperbole touche d'ailleurs au point (l, l') l'intersection de l'hyperboloïde et de la sphère.

On en déduit les deux projections du solide annulaire entaillé.

Ombre propre du solide. — Les rayons lumineux sont parallèles à la droite (co_1, co').

La partie intérieure du solide est complètement éclairée. Pour avoir la séparatrice sur la surface extérieure on prend le cylindre circonscrit, dont les génératrices sont parallèles aux rayons lumineux. Un changement de plan vertical x_1y_1 donne immédiatement la courbe de contact dont le plan est de bout dans ce système. On obtient (m, m') point de la séparatrice sur le parallèle supérieur en prenant $c\omega' = z\omega$, puis $\omega\mu = z\mu$, d'où m', et par suite m.

On construira par points cette séparatrice dont la projection verticale est une ellipse dont nous n'avons conservé que les arcs utiles mv et $q'r'$ qui limitent les deux portions d'ombre propre.

Ombre portée sur le sol. — Cette ombre est limitée par l'arc de cercle nn_1, trace horizontale du cylindre qui a pour directrice le parallèle supérieur du solide et dont les génératrices sont parallèles aux rayons lumineux, et d'autre part par des arcs de l'ellipse, trace horizontale du cylindre de révolution qui a pour directrice la séparatrice obtenue plus haut sur la sphère. Nous n'en avons conservé que les arcs np et n_1p_1 extérieurs à la projection horizontale du solide.

Sur le sol on a alors comme contour d'ombre pnn_1p_1. N.C.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1900)

313. — On considère les deux quadriques

$$zP + zQ + R = 0, \qquad zP' + zQ' + R' = 0$$

Équation de la projection de leur intersection sur le plan des xy. Dans quel cas est-elle unicursale ?

314. — Étudier la série dont le terme général est $U_n = \dfrac{1}{(q+n)^2}$.

315. — On considère deux divisions homographiques dans l'espace. Lieu de la droite joignant deux points correspondants. Dans quel cas a-t-on un paraboloïde ?

316. — On donne quatre points A, B, C, D dans un plan. Lieu des points d'où l'on voit les deux segments AB, CD sous les angles égaux. C'est une cubique circulaire. L'étudier géométriquement.

317. — Équation générale des quadriques homofocales d'un ellipsoïde. Combien passe-t-il de telles quadriques par un point ? Combien y en a-t-il tangentes à un plan ? Lieu des points par où il en passe deux confondues. Enveloppe. C'est une développable. Section par un plan tangent. Arête de rebroussement.

318. — Racines cubiques d'un nombre imaginaire.

319. — On considère l'équation du troisième degré

$$x^3 - px + q = 0, \qquad p > 0,$$

p devenant très grand, les trois racines de cette équation sont réelles, l'une d'elles devenant très petite. Valeurs approchées des racines dans ce cas. Construire la courbe $x^3 - yx + q = 0$. Examiner les intersections de cette courbe avec la droite $y = p$.

320. — Courbes diamétrales des cubiques planes. Cas où ce sont des droites.

321. — Dans un tétraèdre, les quatre hauteurs et les quatre perpendiculaires aux faces menées par leurs orthocentres sont sur un même hyperboloïde. Que peut-on dire de cet hyperboloïde ?

322. — Racines primitives des équations binomes. Démontrer que $z^m p_0 = z^m z^p$.

323. — On considère l'équation $(y - bx)(1 + t^2) + at^2 + bt + ct + d = 0$ où x, y sont les coordonnées d'un point du plan. Discuter l'équation en t suivant la position de ce point. Lieu des points donnant une racine double. C'est un hypo-[illegible] Ses propriétés.

324. — Détermination des axes d'une quadrique. Méthode géométrique.

325. — Étude de la quartique $(x^2 + 2y^2)^2 - a^2xy = 0$. Elle est unicursale. Propriétés des courbes unicursales.

326. — Démontrer au moyen des faisceaux homographiques qu'il passe une conique par cinq points d'un plan.

327. — On considère la courbe

$$x = t^3 \qquad y = t^2 \qquad z = t.$$

Intersection de cette courbe avec un plan, une sphère. Condition pour que quatre points d'intersection soient sur un cercle. Démontrer que les quatre autres points d'intersection sont alors sur un autre cercle. Équation du plan de ce cercle.

328. — On considère la somme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \mathrm{L}n.$$

Démontrer que cette somme a une limite quand n augmente indéfiniment. Dans quel cas l'expression $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p}$ a-t-elle une limite quand n et p augmentent tous deux indéfiniment ?

329. — Complexe des normales à des quadriques homofocales. Complexe des droites perpendiculaires à leurs conjuguées. C'est le même. Cône et courbe du complexe.

330. — Expression du moment d'une force par rapport à un axe quelconque. Droites de moment nul.

331. — Plans cycliques. Étude géométrique.

332. — On considère sur la courbe

$$x = \frac{1}{t-a}, \qquad y = \frac{1}{t-b}, \qquad z = \frac{1}{t-c},$$

quatre points formant un tétraèdre orthogonal. Relations entre les paramètres de ces points. Etude de ces tétraèdres. Lieu du cercle passant par les trois points d'intersection de la courbe avec un plan se déplaçant parallèlement à lui-même.

333. — Théorème de Descartes.

334. — Discuter l'équation en t

$$t^3x + t^2y + tz - 1 = 0,$$

suivant la position du point (x, y, z). Lieu du point (x, y, z) quand il y a une racine double. C'est une développable. Son arête de rebroussement. Généralités sur les arêtes de rebroussement.

QUESTIONS PROPOSÉES [1]

1020. — Démontrer que les quadriques Q conjuguées par rapport à deux couples de droites données (D, D') et (D_1, D'_1), ont en général quatre droites communes.

Qu'arrive-t-il si les quatre droites données sont quatre génératrices d'un même système d'une quadrique ?

L. Bickart.

1021. — Trouver le lieu des points de concours des tangentes communes à deux cercles, quand l'un d'eux reste fixe et que l'autre varie en passant par deux points fixes. Etudier les diverses formes de la courbe ainsi obtenue.

Vassilief.

* **1022**. — On dit qu'un pentagone gauche est conjugué à une quadrique lorsque la droite qui joint deux quelconques de ses sommets passe par le pôle du plan défini par les trois autres.

1° Prouver l'existence de ces pentagones.

2° A combien de conditions assujettit-on une quadrique en se donnant un pentagone conjugué ?

3° Les dix sommets de deux pentagones conjugués à une même quadrique sont sur une quadrique.

4° Les neuf sommets d'un pentagone gauche et d'un tétraèdre conjugués à une même quadrique sont sur une même biquadratique gauche.

E. Duporcq.

* **1023**. — On dit qu'un hexagone gauche est conjugué à une quadrique lorsque tout plan défini par trois de ses sommets est conjugué du plan défini par les trois autres.

1° Prouver l'existence de ces hexagones.

2° Nombre de conditions imposées à une quadrique par la donnée d'un hexagone gauche.

3° Les dix sommets d'un hexagone gauche et d'un tétraèdre conjugués à une quadrique sont sur une même quadrique.

[1] Les questions marquées d'un astérisque sont publiées pour procurer des sujets de recherches à nos lecteurs ; mais elles ne recevront pas de solution dans la *Revue*, à cause de l'encombrement inévitable qui résulte déjà des autres questions proposées et des sujets d'examens.

« Il existe deux sphères conjuguées à un hexagone gauche. Leurs centres appartiennent à tous les hyperboloïdes équilatères circonscrits à l'hexagone. E. Duporcq.

1024. — Un tube en U à branches verticales, dont le coefficient de dilatation linéaire est λ, contient deux liquides de poids spécifiques différents d et d' et de coefficients de dilatation m et m'. L'appareil étant à 0°, on trace sur le tube un repère à chacun des niveaux A, B, C. On porte ensuite le tout à $t°$; chercher à quelle condition l'un ou l'autre des trois niveaux reste en regard du repère correspondant. On pourra négliger les quantités du second ordre par rapport aux coefficients de dilatation.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

970. — *On donne une conique et deux points A et B de son plan. On joint un point M variable de la conique aux points A et B. La perpendiculaire élevée en A à AM rencontre BM en P. Le lieu de P est en général une quartique.*

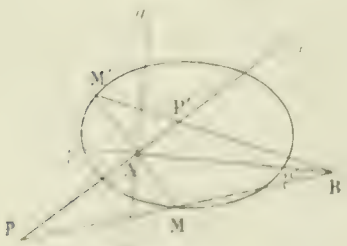
1° *Voir pour quelles positions des points A et B le lieu peut se réduire à un degré moindre.*

2° *Construire la courbe lorsque les points A et B sont les foyers de la conique.*

3° *Lorsque les points A et B sont les deux sommets d'un même axe, le lieu de P devient une ligne droite.*

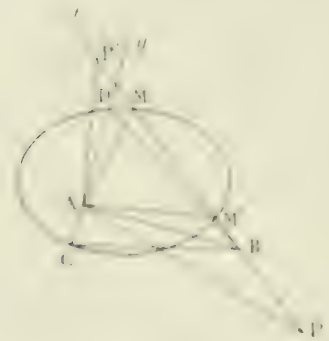
4° *Construire le lieu de P lorsque la conique est une ellipse et que A et B sont l'un un sommet du grand axe, et l'autre un sommet du petit axe.*

Nous allons chercher combien il y a de points du lieu sur une droite quelconque Ax passant par le point A. Pour cela, nous remarquons que la perpendiculaire menée par A à Ax rencontre la conique en deux points M et M′; les droites BM et BM′ rencontrent Ax aux points P et P′ qui appartiennent au lieu géométrique considéré. Donc sur toute droite passant par le point A il y a *deux* points du lieu.



Voyons maintenant si le point A appartient au lieu. Pour que le point P vienne coïncider avec le point A, il faut que la droite MM′ se confonde avec AB; les points M et M′ sont alors en μ et μ', et les deux points P et P′ viennent se réunir au point A. Il en résulte que le point A est un point double du lieu. De plus, quand MM′ se rapproche indéfiniment de $\mu\mu'$, la droite PAP′ a pour limite la droite Ay perpendiculaire à AB ; par suite, les tangentes au point double A sont confondues avec la droite Ay.

On conclut de là que le lieu est une quartique admettant le point A pour point double.



On peut encore le démontrer en déterminant les points du lieu qui se trouvent sur une droite quelconque Bt passant par le point B. Cette droite rencontre la conique en deux points M et M′, les perpendiculaires aux droites AM et AM′ menées par le point A rencontrent Bt aux points P et P′ qui sont des points du lieu ; donc sur toute droite passant par B il y a *deux* points du lieu. Je dis maintenant que B est un point double du lieu. En effet, pour que le point P vienne coïncider avec le point B, il faut que AP coïncide avec AB, et pour cela que le point M coïncide avec l'un des points C ou D où la perpendiculaire Ay à AB rencontre la conique. On voit ainsi que le point B est un point double, et que les tangentes en ce point sont les droites BC et BD.

Cherchons maintenant si le lieu a des points à l'infini. Pour que le point P s'éloigne à l'infini, il faut que les droites AP et BP soient parallèles ou que AM et BM soient perpendiculaires. Le point M correspondant est donc sur le cercle de diamètre AB. Ce cercle rencontre la conique en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, ce qui montre que le lieu admet quatre directions asymptotiques BM_1, BM_2, BM_3 et BM_4, qui peuvent être réelles ou imaginaires.

On peut contrôler analytiquement ces divers résultats. Prenons le point A pour origine, AB pour axe des x et une perpendiculaire à AB pour axe des y. Désignons par a l'abscisse du point B et par

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 2Dx - 2Ey + F = 0$$

l'équation de la conique.

Soient x', y' les coordonnées d'un point M de la conique ; la droite BM a pour équation $y(x'-a) - y'(x-a) = 0$, la perpendiculaire menée en A à AM est représentée par $xx' + yy' = 0$. Ces deux équations résolues par rapport à x' et y' nous donnent

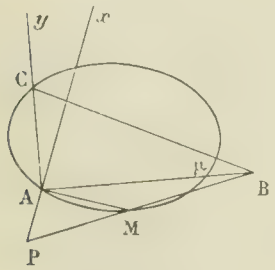
$$x' = \frac{ay^2}{x^2 + y^2 - ax}, \qquad y' = \frac{-axy}{x^2 + y^2 - ax},$$

et en écrivant que ce point est sur la conique, nous avons l'équation du lieu

$$(1) \qquad a^2y^2(Ay^2 - 2Bxy + Cx^2) + 2ay(Dy - Ex)(x^2 + y^2 - ax) + F(x^2 + y^2 - ax)^2 = 0.$$

1. Pour que le degré du lieu s'abaisse, il est nécessaire que l'un des points A, B ou tous les deux soient situés sur la conique.

a. Supposons d'abord que le point A soit sur la conique. En raisonnant comme plus haut, on reconnaît que sur une droite quelconque Ax passant par A, il existe *un seul* point P du lieu. Pour que ce point coïncide avec le point A, il faut que le point M soit ou bien au point A, ou bien au point μ. Le point A est encore un point double, mais les tangentes en ce point sont la normale au point A à la conique et la droite Ay perpendiculaire à AB. Le lieu est donc une cubique. On verra aisément que le point B est un point simple du lieu et que la tangente en ce point est la droite BC.



En se reportant à l'équation (1) et en y faisant $F = 0$, le premier membre de l'équation est divisible par y, et en supprimant ce facteur, dont l'existence s'explique aisément, il reste l'équation d'une cubique.

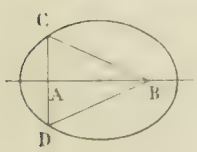
Si, de plus, la droite AB est normale en A à la conique, cette droite fait partie de la cubique, car elle la rencontre en quatre points (trois points confondus au point A et un au point B) ; le véritable lieu est alors une conique ainsi qu'on le vérifie analytiquement.

b. Supposons que le point B soit sur la conique. Le lieu est encore une cubique ; le point A est un point simple, la tangente en ce point étant la droite Ay perpendiculaire à AB ; le point B est un point double, les tangentes en ce point passant par les points de rencontre de la conique et de Ay.

c. Si les points A et B sont tous les deux sur la conique, on voit aisément que les droites AP et BP sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques. Le lieu est alors une conique passant par les points A et B, la tangente en A est la normale en A à la conique donnée, et la tangente en B passe par le point où Ay rencontre la conique.

Dans le cas particulier où la droite AB est normale à la conique en A, la droite AB se correspond à elle-même dans les deux faisceaux, le lieu est une droite.

2. Nous allons supposer maintenant que la conique est une ellipse et que les points A et B sont les foyers de cette ellipse. D'après ce qui précède, le lieu est une quartique admettant les points A et B comme points doubles, les tangentes au point A étant confondues suivant la droite CD, et les tangentes au point B étant les droites BC et BD.



La courbe est d'ailleurs symétrique par rapport à AB, et on peut la construire géométriquement point par point en suivant le mouvement du point M sur l'ellipse.

1° Si l'on a $b = c$, le cercle de diamètre AB ne rencontre pas l'ellipse, la quartique n'a pas de points à l'infini (*fig.* 1).

2° Si l'on a $b < c$, le cercle de diamètre AB rencontre l'ellipse en quatre points réels ; la courbe admet quatre directions asymptotiques réelles et quatre asymptotes (*fig.* 2).

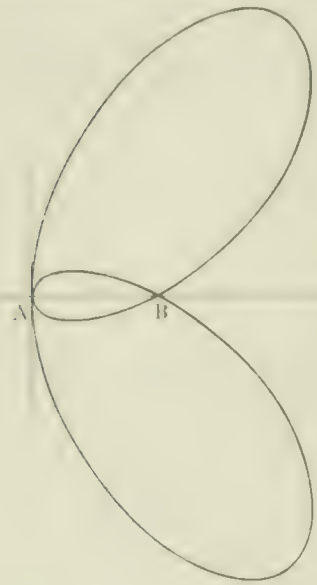


Fig. 1

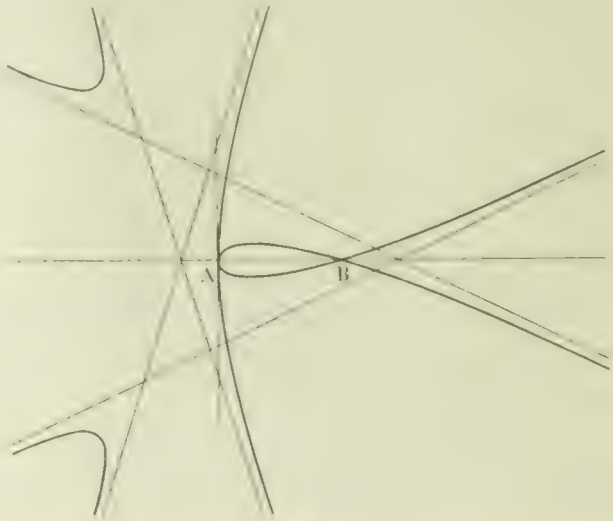


Fig. 2

3° Si $b = c$, le cercle de diamètre AB est tangent à l'ellipse aux sommets du petit axe, la courbe admet deux directions asymptotiques doubles et des branches paraboliques dans ces directions (*fig.* 3).

On peut d'ailleurs faire une étude plus détaillée de cette courbe en déterminant son équation.

Prenons comme axes de coordonnées les axes de l'ellipse ; un point M de cette courbe a pour coordonnées $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$. Les équations des droites BM et AP sont alors

$$(2)\qquad \frac{y}{x-c} = \frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi - c}, \qquad \frac{y}{x+c} = -\frac{a\cos\varphi + c}{b\sin\varphi}.$$

On en déduit

$$\cos\varphi = -\frac{c(x^2+y^2-c^2)}{a(x^2+y^2-c^2)}, \qquad \sin\varphi = \frac{-2cy(x+c)}{b(x^2+y^2-c^2)},$$

et en faisant la somme des carrés, on obtient l'équation du lieu

$$4c^2y^2(x+c)^2 = b^2(x^2+y^2-c^2)^2 - a^2b^2(x^2+y^2-c^2)^2 = 0.$$

L'équation de l'ensemble des directions asymptotiques peut se mettre sous la forme

$$b^2(x^2+y^2-c^2)^2 - 4c^2y^2(x+c)^2 = 0,$$

ou

$$(x^2+y^2-c^2)^2 - 2c^2xy(x^2+y^2-2c^2xy) = 0.$$

On voit qu'elles ne sont réelles que si l'on a $c \geq b$, et, dans ce cas, on peut calculer les équations des asymptotes.

Si on résout les équations (2) par rapport à x et y, on a

$$x = \frac{-c(a^2+b^2\cos^2\varphi - a^2)}{c^2\cos^2\varphi - c^2 - b^2}, \qquad y = \frac{-2bc\sin\varphi(a\cos\varphi + c)}{c^2\cos^2\varphi - c^2 - b^2}.$$

En faisant varier φ de 0 à π, et en discutant les variations correspondantes de x et de y, on obtiendra aisément les formes de courbes construites plus haut.

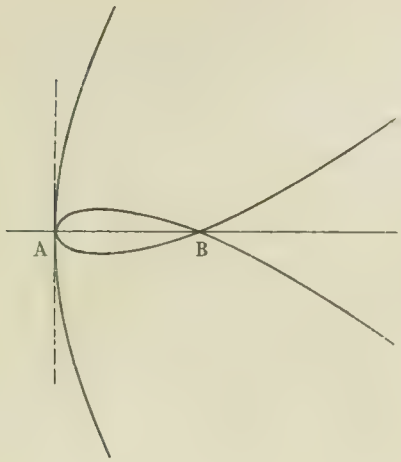


Fig. 3

3. Lorsque les points A et B sont les deux sommets d'un même axe, la droite AB étant normale à la conique au point A, le lieu du point P est une droite, d'après ce qu'on a vu précédemment (**1**, *c.*) L'équation de cette droite est $c^2x+a(a^2+b^2)=0$, dans le cas où l'ellipse est reportée à ses axes et où les points A et B sont les sommets du grand axe.

4. Si le point A est sommet du grand axe, et le point B sommet du petit axe, le lieu est une conique passant par A et B, tangente en A à l'axe OA et tangente en B à la droite BC. (AC est perpendiculaire à AB.)

On a aisément l'équation de cette conique de la manière suivante.

Soit $y-b=\lambda x$ l'équation d'une droite passant par le point B, elle rencontre l'ellipse en un point M, qui a pour coordonnées $-\dfrac{2a^2b\lambda}{a^2\lambda^2+b^2}$ et $\dfrac{-b(a^2\lambda^2-b^2)}{a^2\lambda^2+b^2}$.

Le coefficient angulaire de AM est alors $\dfrac{b(a\lambda-b)}{a(a\lambda+b)}$, et par suite, l'équation de AP est $\dfrac{y}{x-a}=-\dfrac{a(a\lambda+b)}{b(a\lambda-b)}$. En éliminant λ entre les équations de BM et de AP on a l'équation du lieu

$$ab(x^2+y^2)+(a^2-b^2)xy-2a^2bx-ay(a^2+b^2)+a^3b=0.$$

P. TRIBIER.

PHYSIQUE ET CHIMIE

960. — *La surface sphérique AB sépare deux milieux d'indices absolus n_1 et n_2 pour une radiation déterminée ; en son sommet S et en son centre O, on élève sur l'axe principal des perpendiculaires sur lesquelles on prend*

$$SN_1 = ON'_1 = n_1 \qquad et \qquad SN_2 = ON'_2 = n_2 ;$$

démontrer que les droites $N_2N'_1$ et N'_2N_1 déterminent en F_2 et F_1 les foyers principaux correspondant à cette radiation.

(*École centrale, concours de 1900, 1re session.*)

On sait que, si l'on pose $SO = r$, les distances focales f_1 et f_2 sont données par les formules

$$f_1 = \frac{n_1}{n_1-n_2}r, \qquad f_2 = \frac{n_2}{n_2-n_1}r.$$

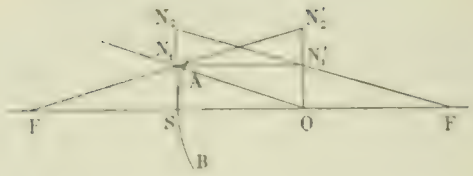
Traçons la droite $N_1N'_1$. La similitude des triangles N_1SF_1 et $N'_2N'_1N_1$ donne

$$\frac{SF_1}{N'_1N_1} = \frac{SN_1}{N'_1N_2},$$

ou bien, si l'on remarque que $N'_1N_1 = OS = -r$,

$$SF_1 = \frac{n_1}{n_1-n_2}r = f_1.$$

De même la similitude des triangles N_2SF_2 et $N_2N_1N'_1$ montrerait que SF_2 est égal à f_2.



Autre méthode. — Il est évident que la position des points F_1 et F_2 déterminés par la construction donnée est indépendante de l'échelle adoptée pour représenter les quantités n_1 et n_2. Supposons cette échelle assez petite pour que le point N_1 puisse être confondu avec un point de la surface réfringente, et soit un rayon incident dirigé suivant F_1N_1 ; il faut démontrer que le rayon réfracté est $N_1N'_1$, c'est à dire que, l'angle d'incidence étant ON_1N_2, l'angle de réfraction est $ON_1N'_1$. Or ces angles sont assez petits pour qu'on puisse 1° les confondre avec leurs sinus, 2° les mesurer respectivement par les longueurs ON'_2 et ON'_1. Ils satisfont donc à la relation

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Solutions exactes de MM. G. Bouju et J.-D. Dufaut.

---

961. — *On attaque à chaud par l'acide sulfurique en excès, un mélange de 15 grammes de sel marin chlorure de sodium avec 10 grammes de peroxyde de manganèse impur naturel, contenant 25 % de carbonate de calcium. Le produit gazeux obtenu est recueilli par déplacement de l'air dans un flacon de verre.*

On demande :

1° *De calculer le volume de ce mélange gazeux et de dire sa composition ;*

2° *D'indiquer les expériences à faire pour évaluer le volume de chacun des gaz du mélange ;*

3° *De dire ce qui arriverait si on agitait le mélange gazeux primitif avec une solution étendue d'iodure de potassium en excès. Calculer le poids du précipité formé ;*

4° *Même question dans le cas où on ferait l'expérience avec une solution d'azotate d'argent ammoniacal.*

Pour simplifier on supposera les gaz secs et mesurés dans les conditions normales.

(Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques. En particulier, Na = 23, Mn = 55, Ca = 40.)

École Centrale, concours de 1900, 1re session.

Désignons par x le nombre de molécules de peroxyde de manganèse qui entrent en réaction avec le sel marin et l'acide sulfurique. Nous aurons d'abord

$$x\,2\,NaCl + MnO^2 + 3\,SO^4H^2 = 2\,SO^4NaH + SO^4Mn + 2\,H^2O + Cl^2.$$

Or $2\,NaCl = 117$ et $MnO^2 = 87$; le sel marin donné est donc évidemment en excès et l'on a en outre

$$y\,NaCl + SO^4H^2 = SO^4NaH + HCl.$$

Enfin le carbonate qui accompagne le sel marin donne

$$z\,CO^3Ca + SO^4H^2 = SO^4Ca + H^2O + CO^2.$$

Les coefficients x, y et z sont déterminés par les conditions

$$12x + y\,NaCl = 15, \qquad x\,MnO^2 = 7.5, \qquad z\,CO^3Ca = 2.5,$$

d'où l'on tire, après avoir remplacé les poids moléculaires par leurs valeurs,

$$x = 0.0862, \qquad y = 0.0840, \qquad z = 0.0250.$$

1° Volume du mélange

$$x + y + z = 22^{lit}.32 = 4^{lit},357.$$

Composition du mélange

$$xCl^2 + yHCl + zCO^2,$$

c'est-à-dire,

chlore,	$1^{lit},924$;
acide chlorhydrique,	1 ,875 ;
gaz carbonique,	0 ,558

2° Pour analyser le mélange, on pourra absorber le chlore par le mercure, puis l'acide chlorhydrique par le borax et enfin le gaz carbonique par la potasse, ou bien encore : absorber le mélange par de la potasse étendue et déterminer le titre chlorométrique de la liqueur obtenue, ce qui donne le chlore libre, puis, dans le produit de cette première opération, doser le chore total par l'azotate d'argent, ce qui permet de calculer l'acide chlorhydrique primitif; on aura enfin le gaz carbonique par différence.

3° La réaction fournie par l'iodure de potassium sera

$$x(Cl^2 + 2KI = 2KCl + I^2),$$

et le poids du précipité sera

$$xI^2 = 0,0862 \times 254 = 21^{gr},895.$$

4° L'action sur l'azotate d'argent ammoniacal est difficile à prévoir et dépendra des proportions de ce dernier. Le premier effet du chlore sera de détruire l'ammoniaque en produisant de l'azote libre et celui de l'acide chlorhydrique sera de neutraliser une autre partie de cette ammoniaque. Le chlorure d'ammonium ainsi formé ne pourrait décomposer à son tour l'azotate d'argent que s'il ne subsistait plus une quantité d'ammoniaque suffisante pour dissoudre le chlorure d'argent résultant de cette nouvelle réaction. S'il y avait un très grand excès de sel ammoniacal, on ne verrait donc rien qu'un dégagement d'azote.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ECOLE CENTRALE (1900, *Suite*).

Géométrie (M. Lévi).

1699. — Mener une droite de longueur l parallèle à une direction donnée et s'appuyant sur deux cercles donnés.

1700. — Lieu des centres des cercles coupant orthogonalement deux cercles donnés. Construire un cercle coupant orthogonalement trois cercles donnés.

1701. — Lieu des centres des cercles qui rencontrent deux cercles donnés en des points diamétralement opposés.

1702. — Construire la longueur x, sachant que l'on a

$$\frac{x}{a} = \frac{b^2}{c^2}, \qquad \frac{x^2}{a^2} = \frac{b}{c}, \qquad x = \sqrt{a^2 + b^2c^2}, \qquad x = \sqrt{a^2 + b^2c^2 + d^2}.$$

1703. — Produit de deux côtés d'un triangle.

1704. — Diviser une droite en moyenne et extrême raison.

1705. — Mener par un point un cercle tangent à deux droites.

1706. — Construire un cercle passant par un point donné et tangent à un cercle et à une droite donnés.

1707. — On considère un polygone régulier de $2n$ côtés inscrit dans une circonférence de rayon R. Lieu des points dont la somme des carrés des distances aux sommets du polygone est constante.

1708. — On donne un plan P et deux droites A et B. Mener entre les deux droites et parallèlement au plan P une droite de longueur donnée.

1709. — Une droite se déplace parallèlement à un plan P en s'appuyant sur deux droites fixes A, B. Lieu de son milieu.

1710. — Lieu du milieu d'une droite de longueur constante s'appuyant sur deux droites rectangulaires de l'espace non situées dans un même plan.

1711. — On considère un trièdre SABC ; on le coupe par un plan P ; lieu du point de rencontre des médianes du triangle ainsi obtenu quand le plan P se déplace parallèlement à lui-même.

1712. — Dans un trièdre, au plus grand angle est opposée la plus grande face.

1713. — Définition des trièdres supplémentaires. Propriétés.

1714. — Dans un trièdre, les plans menés par chaque arête et la bissectrice de la face opposée se coupent suivant une même droite. Les plans menés par chaque arête perpendiculairement à la face opposée se coupent suivant une même droite. Les droites menées dans chaque face perpendiculairement à l'arête opposée sont dans un même plan.

1715. — Dans un tétraèdre, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés sont concourantes.

1716. — Condition pour que deux hauteurs d'un tétraèdre soient dans un même plan. Condition pour que les quatre hauteurs soient concourantes.

1717. — Lieu des points de l'espace dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est constante. Même problème pour la différence des carrés des distances.

1718. — Lieu des centres des sphères tangentes à deux droites données situées dans un même plan.

1719. — Sphère passant par trois points et tangente à un plan.

1720. — Montrer qu'un cône à base circulaire admet une autre direction de sections circulaires.

1721. — On donne une ellipse, le grand axe AA' et les tangentes en A et A'. On mène une tangente mobile TT'. Démontrer que cette tangente est vue des foyers sous un angle droit. Que vaut le produit $AT \times A'T'$?

1722. — Construire une ellipse connaissant son grand axe en grandeur et position et un point.

1723. — Construire une ellipse connaissant trois points et un foyer ; — trois tangentes et un foyer ; — un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles ; — un foyer, une tangente et l'un des sommets du petit axe. — Peut-on construire une ellipse connaissant les deux directrices et un point ?

1724. — Intersection d'une droite et d'une hyperbole définie par ses foyers et son axe transverse.

1725. — Construire une hyperbole connaissant ses foyers et la direction d'une asymptote ; — un foyer, une asymptote et la longueur de l'axe transverse.

1726. — Lieu des points également distants d'une droite et d'une circonférence.

1727. — Sous-tangente et sous-normale dans la parabole.

1728. — Lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une parabole.

1729. — Construire une parabole connaissant un foyer et deux points ; — un foyer et deux tangentes ; — une tangente, le point de contact et la directrice ; — la directrice et deux tangentes ; — deux tangentes et leurs points de contact ; — trois tangentes parmi lesquelles la tangente au sommet ; — quatre tangentes.

1730. — Lieu des foyers des paraboles ayant même directrice et passant par un point donné.

1731. — Lieu des foyers des paraboles ayant même directrice et tangentes à une droite donnée.

1732. — Construire la tangente en un point d'une conique dont on connaît un foyer et la directrice correspondante.

1733. — Construire une conique connaissant un foyer, un point, une tangente et son point de contact.

1734. — Théorème de Dandelin dans le cas du cylindre de révolution.

1735. — On donne un cône de révolution et une sphère inscrite. Enveloppe des plans tangents à la sphère qui coupent le cône suivant une parabole. — Lieu du foyer de ces paraboles. On coupe le cône par des plans parallèles à un plan tangent. Lieu des foyers des paraboles de section.

Géométrie descriptive (M. Lévi).

1736. — On donne un plan par sa ligne de plus grande pente ; lui mener une perpendiculaire par le point m_{23}.

1737. — Angle de deux plans dont on connaît l'intersection et les traces sur le plan horizontal.

1738. — On donne une droite AA' dans le plan horizontal, une autre droite BB' dans le plan vertical. — Trouver leur perpendiculaire commune et leur plus courte distance.

1739. — On donne un plan par trois points. — Le faire tourner autour d'un axe vertical, de façon à le rendre perpendiculaire à un plan donné par ses traces.

1740. — Étant données deux droites quelconques invariablement liées, peut-on les amener par une rotation à être de front ?

1741. — Une droite $(oa, o'a')$ rencontrant la ligne de terre au point (o, o') est la bissectrice de l'angle des traces d'un plan. Déterminer ce plan.

1742. — Mener par un point (ω, ω') un plan faisant des angles donnés α, β avec deux plans donnés, l'un vertical, l'autre de bout.

1743. — On donne dans le premier bissecteur un cercle de rayon R et de centre (o, o'), contour apparent d'un cône ayant ce cercle pour directrice et pour sommet un point donné S.

1744. — On donne un plan par ses traces et dans ce plan un cercle dont on a le rabattement ; ce cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée. — Contours apparents de ce cylindre.

1745. — On donne trois droites concourantes par leurs projections ; ce sont les génératrices d'un cône de révolution. — Contours apparents de ce cône.

1746. — On considère un tétraèdre régulier *sabc*, dont la base *abc* est dans le plan horizontal ; on considère le cône ayant pour sommet le point *b* et pour directrice le cercle circonscrit au triangle *sac*. — Section de ce cône par le plan bissecteur du dièdre AC.

1747. — On considère un cône dont la base est dans le plan horizontal ; on le coupe par un plan P_2Q' dans lequel on prend une droite (D, D'). Chercher le point de la section plane pour lequel la tangente est parallèle à (D, D').

1748. — On donne un tétraèdre et un cône ayant pour sommet un sommet du tétraèdre et pour base le cercle circonscrit au triangle de la face opposée. Intersection du tétraèdre et du cône.

1749. — On considère un tétraèdre régulier *sabc*, dont la base est dans le plan horizontal. Contour apparent horizontal du cylindre ayant pour base le cercle circonscrit à la face *asc* et pour directrice la génératrice *sb*. — Intersection de ce cylindre [illegible] le plan *asb*. — Intersection avec le plan bissecteur du dièdre *ab*.

1750. — Point d'inflexion du développement de la section d'un cylindre par le bissecteur du premier dièdre.

1751. — On considère une hyperbole dans le plan horizontal et une droite *ab* : c'est la trace d'un plan qui contient deux droites *oa*, *ob* se coupant en un point de cote donnée. — *oa*, *ob* sont les directions des génératrices de deux cylindres qui ont pour directrice commune l'hyperbole donnée. — Intersection des deux cylindres. — Peut-on déterminer le plan de la [illegible]

1752. — Déterminer dans le plan P_2Q' un cercle de rayon donné qui soit tangent aux deux plans de projection. Ce cercle est la base de deux cônes dont les sommets sont sur *xy*. On demande l'intersection des deux cônes.

1753. — On donne un cercle par son plan P_2Q' et son rabattement sur le plan horizontal. On prend sur une horizon-

tale de l'espace deux points (a,a'), (b, b'). Ce sont les sommets de deux cônes qui ont pour directrice commune le cercle donné. Intersection de ces deux cônes.

1754. — On considère un cône dont la base est dans un plan de bout et le sommet sur xy ; un cylindre dont la base est dans un plan vertical et dont les génératrices sont horizontales. Intersection de ces surfaces.

1755. — On considère un tétraèdre régulier dont la base abc est dans le plan horizontal ; un premier cylindre a pour base le cercle circonscrit à la face sbc et pour génératrice sa, un second cylindre a pour base le cercle circonscrit au triangle sab et pour génératrice sc. Intersection des deux cylindres.

1756. — On donne un cône de sommet (s, s') ayant pour base un cercle du plan horizontal. Quelle sera la nouvelle base de ce cône transporté parallèlement à lui-même de façon que son sommet vienne en un point (σ, σ') ? Intersection de ces deux cônes.

1757. — Centre et rayon de la sphère inscrite dans un tétraèdre.

1758. — Plans tangents à une sphère par une droite donnée.

1759. — Plans tangents communs à un cône et à une sphère.

1760. — On donne trois points dans le plan horizontal et un plan P ; déterminer la sphère passant par ces trois points et tangente au plan P.

1761. — Sphère passant par trois points dans le plan vertical et tangente au bissecteur du premier dièdre.

1762. — On considère deux plans donnés par leurs lignes de plus grande pente et deux points. Faire passer par ces deux points une sphère tangente aux deux plans.

1763. — On considère deux plans, l'un vertical, l'autre de bout ; déterminer un cylindre de révolution tangent à ces deux plans : 1° sachant qu'il passe en outre par un point donné ; 2° connaissant le rayon R de ce cylindre.

1764. — Mener une droite parallèle à une direction donnée et à des distances a, b de deux points A et B.

1765. — Mener par un point une droite rencontrant une droite donnée et passant à une distance donnée d'un point donné.

1766. — Mener par un point A une droite située à une distance donnée d'un point donné et à une autre distance donnée d'une droite donnée.

1767. — Mener par un point une droite à une distance donnée d'une droite donnée et faisant un angle α avec une droite donnée.

1768. — Mener par un point une droite à une distance donnée d'une droite donnée et faisant un angle donné avec un plan donné.

1769. — On donne deux droites A et B ; mener une droite située à une distance a de A, à une distance b de B et parallèle à une droite donnée Δ.

1770. — Mener une droite s'appuyant sur deux droites A et B et faisant avec les plans de projection des angles donnés α et β.

1771. — Résoudre un trièdre connaissant deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles.

1772. — Résoudre un trièdre connaissant les trois dièdres.

1773. — On considère un cercle défini par trois points (a, a'), (b, b'), (c, c') ; on fait tourner ce cercle autour de xy. Méridienne de la surface de révolution ainsi obtenue.

1774. — Etant donnée la projection horizontale d'une courbe située dans un plan quelconque et une droite de front trouver un point de la surface engendrée par cette courbe en tournant autour de la droite. Plan tangent en ce point.

1775. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe de bout ; lui mener un plan tangent par une droite.

1776. — On donne un ellipsoïde de révolution autour d'un axe de front ; lui mener un plan tangent par une verticale donnée.

1777. — Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde de révolution : 1° à axe vertical ; 2° à axe de front.

1778. — On donne en géométrie cotée un ellipsoïde à axe horizontal (de cote 8). Intersection de cette surface avec une droite.

1779. — On donne une courbe dans un plan déterminé par sa ligne de plus grande pente ; on la fait tourner autour d'une horizontale. Intersection de la surface ainsi engendrée avec un plan donné également par sa ligne de plus grande pente.

1780. — On considère une sphère : dans le plan de front du centre, on prend une droite sa, $s'a'$, comme axe de révolution d'un cône (s, s'), dont on donne le demi-angle au sommet α. Intersection de ce cône avec la sphère.

1781. — On considère une sphère et un cône ayant pour sommet un point de la ligne de terre et pour directrice la section de la sphère par un plan de bout. Intersection des deux surfaces.

1782. — On considère un tore à axe vertical : on le coupe par un plan de bout ; on obtient ainsi la directrice d'un cône dont le sommet est le pied de l'axe du tore sur le plan horizontal. Déterminer l'intersection des deux surfaces.

1783. — On donne un cône de révolution défini par son axe et son angle au sommet. Peut-on lui mener une normale parallèle à une direction donnée (Δ, Δ') ?

1784. — On donne un cône de révolution dont l'axe est xy et la génératrice $(sa, s'a')$. Mener une normale à ce cône par un point (ω, ω').

1785. — On considère un hyperboloïde défini par son cercle de gorge et sa trace sur le plan horizontal. Déterminer les génératrices dont la projection verticale est parallèle à une direction donnée. Déterminer le point de cette génératrice où le plan tangent fait l'angle α avec le plan horizontal.

1786. — On considère l'hyperboloïde engendré par la ligne de terre en tournant autour d'une horizontale. Contour apparent vertical de la surface.

1787. — On donne un hyperboloïde engendré par une droite (G, G') en tournant autour de xy. Lui mener des plans tangents parallèles à une droite donnée (Δ, Δ') le point de contact étant sur un parallèle donné.

1788. — On donne une droite quelconque tournant autour d'un axe vertical ; construire une génératrice quelconque de la surface engendrée, puis menant par cette génératrice un plan quelconque, trouver le point où ce plan est tangent à la surface.

1789. — On considère un hyperboloïde défini par deux cercles concentriques ; l'un de cote 0 est la trace sur le plan horizontal, l'autre de cote 8 est le cercle de gorge ; construire une génératrice, plus le point de contact d'un plan tangent mené par cette génératrice. Ce point peut-il être à l'infini ?

1790. — On donne un hyperboloïde à axe vertical. Section par le plan bissecteur du premier dièdre.

1791. — Déterminer la courbe de contact d'un cône de sommet S circonscrit à un hyperboloïde à axe vertical.

1792. — Peut-on mener à un hyperboloïde de révolution un plan le coupant suivant une parabole : 1° par un point donné ; — 2° par une droite donnée ?

1793. — On considère un hyperboloïde de révolution. Peut-on lui mener un plan asymptote à une distance donnée d'un point donné ?

1794. — Mener à un hyperboloïde de révolution à axe quelconque un plan asymptote qui fasse un angle α avec un plan donné.

1795. — Chercher si l'on peut mener à deux hyperboloïdes de révolution des plans asymptotes parallèles.

1796. — On considère une droite de front autour de laquelle tourne une droite (G, G') ; par un point de l'axe, on mène une verticale (Z, Z') ; intersection de cette droite avec l'hyperboloïde engendré par (G, G').

1797. — Un hyperboloïde a pour axe la droite de front (F, F') et est engendré par une droite (D, D'). Intersection par une droite dont la projection verticale est aussi D'. Mener par cette droite un plan tangent à l'hyperboloïde.

1798. — Intersection d'un hyperboloïde à axe vertical avec une droite ne rencontrant pas l'axe.

1799. — Intersection d'un cône ayant pour base une courbe donnée dans le plan horizontal et d'un hyperboloïde à axe de bout.

1800. — Intersection de deux hyperboloïdes qui ont une génératrice commune. Branches infinies.

1801. — Intersection de deux hyperboloïdes engendrés par une même droite en tournant autour de deux axes parallèles, verticaux par exemple.

1802. — On donne deux droites dans un plan de front ; ce sont les axes de deux hyberboloïdes engendrés par une troisième droite quelconque. Intersection des deux surfaces.

QUESTIONS PROPOSÉES

1025. — Pour construire une parabole tangente en A et B à deux droites données, OA et OB, on mène par A et B les parallèles AA' et BB' à la médiane du triangle OAB issue de O ; puis, on fait tourner une droite autour de O, qui rencontre AA' en Q, BB' en P ; on joint AP et BQ ; le point de rencontre M de ces deux droites décrit la parabole. De plus, la tangente en M est parallèle à PQ.

Donner une démonstration géométrique et adapter cette construction convenablement modifiée au cas d'une conique tangente à deux droites données OA et OB en A et B et passant en un troisième point donné C.

J. Grigo.

1026. — On considère trois axes rectangulaires et un plan variable P qui coupe ces axes aux points A, B et C, de telle sorte qu'en désignant par a, b et c les longueurs des côtés du triangle ABC, on ait [illegible], et on demande les lieux du centre de gravité, du centre du cercle circonscrit, des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC.

Balaban.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

[illegible]

11e Année. N° 9. Juin 1901.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

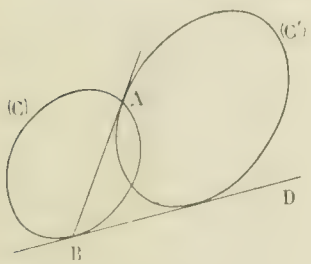
SUR LE THÉORÈME DE PONCELET

par M. **Mathieu Weill**.

On sait que si deux coniques sont telles qu'il existe un polygone de n côtés inscrit dans l'une et circonscrit à l'autre, il existe une infinité de pareils polygones, un sommet d'un de ces polygones étant un point quelconque de la conique circonscrite. Nous allons présenter, sur les cas très simples et bien connus du triangle et du quadrilatère, quelques considérations d'une nature tout à fait élémentaire.

Étude du triangle. — Considérons un triangle inscrit à une conique C et circonscrit à une conique C′.

Soit A un point commun aux deux coniques : menons en A la tangente à la conique C′ ; cette droite coupe la conique C en un point B, qui est le point de contact d'une tangente BD commune aux deux coniques, car il existe un triangle aplati, formé de la droite AB prise deux fois et de la droite BD, qui est inscrit dans la conique C et circonscrit à la conique C′.



Réciproquement, si deux coniques C et C′ présentent la propriété indiquée, il existe une infinité de triangles inscrits dans la première et circonscrits à la seconde.

Le système de ces deux coniques est représenté, comme le montre un calcul très simple, par les équations

$$(C) \qquad \alpha\beta - \gamma^2 = 0,$$

$$(C') \qquad A\beta^2 + \alpha(B\beta + C\gamma) = 0,$$

α, β, γ, désignant les premiers membres des équations de trois droites, A, B, C, désignant des constantes.

En donnant diverses valeurs aux fonctions linéaires α, β, γ, et aux constantes A, B, C, on obtient tous les systèmes de coniques répondant à la question ; on en conclut, en particulier, que si l'on considère les deux coniques ayant pour équations

$$y^2 - 2px = 0,$$
$$xy - m^2 = 0,$$

il existe une infinité de triangles inscrits dans *l'une quelconque* de ces deux coniques, et circonscrits à l'autre.

L'équation en λ des deux coniques générales est

$$\lambda(B + \lambda)^2 - AC^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad \lambda^3 + 2B\lambda^2 + B^2\lambda - AC^2 = 0.$$

Comparons cette équation à l'équation générale

$$\Delta\lambda^2 + \theta\lambda^2 + \theta'\lambda + \Delta = 0;$$

nous en concluons que

$$\frac{\theta^2}{4\Delta^2} = \frac{\theta'}{\Delta}, \qquad \text{ou} \qquad \theta^2 - 4\Delta\theta' = 0,$$

condition bien connue.

Appliquons cette formule au cas de deux cercles ayant pour équations

$$(C) \qquad (x-\delta)^2 + y^2 - \rho^2 = 0,$$

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

L'équation en λ est

$$\lambda^2(\rho^2 - \lambda(\delta^2 - 2\rho^2 - R^2)) - \lambda(2R^2 + \rho^2 - \delta^2) + R^2 = 0;$$

d'où la relation

$$\delta^2 - 2\rho^2 - R^2)^2 - 4\rho^2(2R^2 + \rho^2 - \delta^2) = 0,$$

ou

$$\delta^2 = R^2 \pm 2R\rho.$$

C'est la relation entre la distance des centres et les rayons du cercle circonscrit à un triangle et du cercle inscrit ou ex-inscrit, le signe — convenant au premier cas.

On peut, par d'autres procédés, sans parler des méthodes de la géométrie élémentaire, arriver simplement à ces formules.

Soit, en effet, A l'un des deux points cycliques, communs aux deux circonférences C et C'; la tangente en A à C' coupe C en un point B qui est le point de contact de C avec une des tangentes communes aux deux circonférences; or les équations d'une tangente commune *extérieure* sont

$$x - \delta_1 \cos\alpha + y \sin\alpha - \rho = 0,$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - R = 0;$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{R-\rho}{\rho}.$$

Les coordonnées x_1, y_1 du point B satisfont aux relations

$$x_1 = R\cos\alpha, \qquad y_1 = R\sin\alpha, \qquad y_1 = i(x_1 - \delta_1) \quad i \text{ désignant l'imaginaire } \sqrt{-1},$$

d'où l'on déduit

$$(R\cos\alpha - \delta)^2 - R^2\sin^2\alpha = 0, \qquad \text{ou} \qquad R^2 + \delta^2 - 2\delta R\cos\alpha = 0,$$

d'où

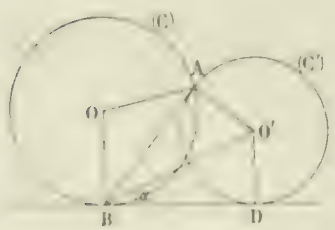
$$\delta^2 = R^2 - 2R\rho.$$

Opérant de même pour une tangente commune intérieure, on trouve $\delta^2 = R^2 + 2R\rho$.

Il est remarquable que les deux cas du cercle inscrit et du cercle exinscrit, s'obtiennent ainsi séparément.

On peut encore obtenir, par des considérations de géométrie réelle, la seconde formule.

Soient ρ, R, δ, les rayons et la distance des centres; désignons BD par l et $\widehat{DBO}$ par α; nous aurons



$$\rho = l\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$BA = l = 2R\sin 2\alpha = 2R\frac{2l\rho}{l^2+\rho^2},$$

$$\delta^2 = R - \rho)^2 + l^2,$$

d'où

$$\delta^2 = (R - \rho)^2 + 4R\rho - \rho^2 = R^2 + 2R\rho.$$

1re Remarque. — En appelant ω l'angle sous lequel se coupent les circonférences, on a $\delta^2 = R^2 + \rho^2 + 2R\rho\cos\omega$,

d'où

$$\delta^2 = 2R^2(1 - \cos\omega).$$

On en conclut que si dans un triangle les cercles circonscrit et exinscrit sont égaux, ils se coupent

sous un angle de 60°; si le rayon du cercle exinscrit est double de celui du cercle circonscrit, ces cercles sont orthogonaux, etc.

2e Remarque. — En prenant

$$\alpha = x(t^2-1) - 2ty + \rho(t^2+1), \quad \beta = x(t'^2-1) - 2t'y + \rho(t'^2+1), \quad \gamma = x(1-tt') + y(t-t') - \rho(1+tt'),$$

l'équation $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$ représente le cercle

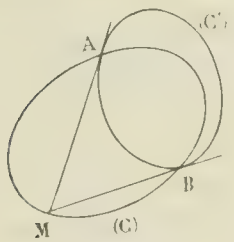
$$x^2 + y^2 - \rho^2 = 0.$$

Dès lors, en disposant des quantités A, B, C, dans l'équation

$$A\gamma^2 + \alpha(B\beta + C\gamma) = 0,$$

de manière qu'elle représente un cercle, on retrouve, à l'aide d'un calcul qui constitue un exercice intéressant, la relation entre R, ρ, et δ.

Etude du quadrilatère. — Soient deux coniques C et C′ telles qu'il existe un quadrilatère inscrit dans C et circonscrit à C′. Si en un point A commun aux deux coniques, on mène la tangente à C′, elle coupe la conique C en un point M par lequel passe la tangente à C′ en un autre point B commun aux deux coniques, et le quadrilatère aplati AMBMA répond à la question, et réciproquement.



Dès lors, le système des deux coniques répondant à la question a pour équation

$$(C') \qquad \alpha\beta - \gamma^2 = 0,$$

$$(C) \qquad A\alpha\beta + B\alpha\gamma + C\gamma\beta = 0,$$

A, B, C, étant des constantes.

L'équation en λ est

$$\lambda(A+\lambda)^2 + BC(A-\lambda) = 0;$$

l'une des racines, λ', est égale à $-A$, et la somme des deux autres est aussi égale à $-A$;

on a donc

$$\lambda'' + \lambda''' = \lambda'.$$

D'autre part, l'équation développée est

$$\Delta\lambda^3 + \theta\lambda^2 + \theta'\lambda + \Delta' = 0,$$

et l'on a

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' = -\frac{\theta}{\Delta} = 2\lambda';$$

donc $\dfrac{-\theta}{2\Delta}$ est racine, d'où résulte la relation

$$\theta^3 - 4\Delta\theta\theta' + 8\Delta'\Delta^2 = 0.$$

Considérons en particulier les deux cercles qui ont pour équations

$$(C) \qquad (x-\delta)^2 + y^2 - \rho^2 = 0,$$

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

1re méthode. — L'équation en λ est

$$(\lambda+1)(\lambda^2\rho^2 + \lambda(\rho^2 + R^2 - \delta^2) + R^2) = 0,$$

ou bien

$$\lambda^3\rho^2 + \lambda^2(2\rho^2 + R^2 - \delta^2) + \lambda(\rho^2 + 2R^2 - \delta^2) + R^2 = 0.$$

Appliquons à cette équation la condition générale; nous trouvons

$$(2\rho^2 + R^2 - \delta^2)^2 - 4\rho^2(2\rho^2 + R^2 - \delta^2)(\rho^2 + 2R^2 - \delta^2) + 8R^2\rho^2 = 0,$$

formule qui se décompose en

$$\delta^2 - R^2 = 0, \qquad \text{et} \qquad (R^2 - \delta^2)^2 - 2\rho^2(R^2 - \delta^2) = 0.$$

La première relation montre que si une circonférence passe par le centre d'une autre il existe des

quadrilatères inscrits dans la première et circonscrits à la seconde ; ce résultat n'est, d'ailleurs, qu'un cas particulier du théorème établi pour deux coniques. La seconde relation correspond à des circonférences qui ne se coupent pas ; on voit, en effet, que δ est supérieur à $R + \rho$, ou inférieur à $R - \rho$. On peut chercher les valeurs entières de ρ, R, δ, satisfaisant à la relation

$$2\rho^2 = \frac{(R^2 - \delta^2)^2}{R^2 - \delta^2}.$$

Une analyse facile conduit aux formules suivantes :

$$\rho = 4ab(a^2 - b^2), \qquad R = (a^2 - 2ab - b^2)(a^2 + 2ab - b^2), \qquad \delta = (a^2 + 2ab - b^2)(a^2 + b^2),$$

a et b étant deux entiers quelconques premiers entre eux ; on peut d'ailleurs permuter δ et R. En faisant par exemple $b = 1$, $a = 2$, on trouve les deux solutions

$$\begin{cases} \rho = 24, \\ R = 5, \\ \delta = 35, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \rho = 24, \\ \delta = 5, \\ R = 35. \end{cases}$$

La première correspond à deux cercles extérieurs l'un à l'autre et la seconde à deux cercles intérieurs l'un à l'autre.

2e méthode. — On peut trouver très simplement les conditions qui conviennent à deux cercles de la manière suivante : l'équation en λ des deux coniques donne, entre les trois racines, la relation $\lambda'\lambda''\lambda''' = \lambda'$. Or, l'équation en λ des deux cercles admet une racine égale à -1 et les deux autres racines sont données par l'équation

$$\lambda^2\rho^2 + \lambda(\rho^2 + R^2 - \delta^2) + R^2 = 0.$$

1° Si la racine λ' est égale à -1, on aura

$$\lambda' + \lambda'' = -1, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho^2 + R^2 - \delta^2}{\rho^2} = +1,$$

d'où $R = \delta$, ce qui est la première solution.

2° Si c'est λ'' qui est égale à -1, on aura

$$\lambda' - 1 = \lambda', \qquad \text{ou} \qquad \lambda'^2 = \lambda'\lambda'' = 1,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\rho^2 + R^2 - \delta^2}{\rho^2}\right)^2 - \frac{4R^2}{\rho^2} = 1,$$

ou

$$(R^2 - \delta^2)^2 - 2\rho^2 R^2 + \delta^2 = 0,$$

ce qui est la seconde solution.

3e méthode. — On peut, enfin, arriver directement à tous ces résultats par la considération des points cycliques. En effet, le quadrilatère aplati AMB est formé par les tangentes au cercle C aux deux points A et B communs aux deux cercles ; il peut arriver que ces points A et B soient les deux points cycliques, auquel cas M est le centre du cercle C, et comme il est sur le cercle C, on retrouve la première solution. Même conclusion si les points A et B sont les deux points autres que les points cycliques communs aux deux cercles ; car, s'ils sont réels, il y a un quadrilatère aplati réel AMB, et il en résulte que le cercle C passe par le centre de C, et, s'ils sont imaginaires et associés, il suffira de raisonner sur les points cycliques qui alors sont aussi associés ; dans ce cas, il n'y a pas de quadrilatères réels. Il en est tout autrement, si, les quatre points de rencontre étant imaginaires, on associe un point cyclique A à un point B non cyclique ; appelons x_1, y_1 les coordonnées du point imaginaire B commun aux deux cercles et non cyclique ; les tangentes en A et B ont pour équations

$$y = mx, \qquad xx_1 + yy_1 = \rho^2 = mxx_1 + \rho^2 = \delta^2.$$

Exprimons que leur point commun est sur le cercle C ; nous aurons la relation

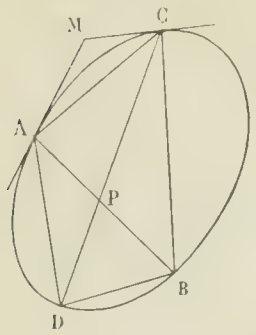
$$(mx_1 - y_1)^2 = (mx_1 - y_1)^2 - (x_1 + y_1^2 - \delta^2)^2 = 4my_1^2 - R^2(x_1^2 + y_1^2 - \delta^2).$$

ou
$$-\rho^2 - (\rho^2 + \delta z)^2 - R^2 z^2 = 0,$$
en posant
$$z = x_1 - \delta + iy_1.$$

On a d'ailleurs
$$x_1 = \frac{\delta^2 - \rho^2 + R^2}{2\delta}, \qquad iy_1 = \sqrt{x_1^2 - R^2}.$$

Après simplification, on retrouve la relation qui convient à la seconde solution :
$$R^2 - \delta^2{}^2 - 2\rho^2(R^2 + \delta^2) = 0.$$

Théorème. — *Si, autour d'un point fixe, on fait tourner deux droites formant une involution, les droites qui joignent les points où ces deux droites rencontrent une conique fixe sont les côtés d'un quadrilatère qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes.*



En effet, soit P le point fixe et soient AB et CD les deux droites qui forment involution ; on voit immédiatement que d'un point A pris sur la conique fixe on ne peut mener à l'enveloppe des droites telles que AC que deux tangentes, qui sont AC et AD. Les tangentes à la conique en A, B, C, D se coupent en quatre points M, M′, M″, M‴, sommets d'un quadrilatère qui se déplace en même temps que ACBD, et qui est, lui aussi, inscrit et circonscrit à deux coniques fixes ; les droites doubles de l'involution des droites AB, CD, sont deux sécantes communes à ces deux coniques, comme le montre un raisonnement géométrique très simple.

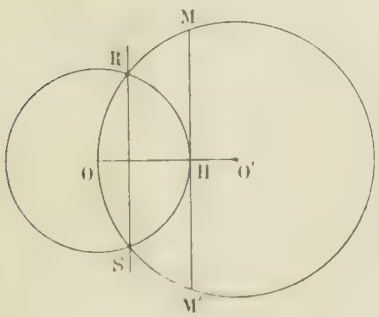
Théorème réciproque. — *Lorsqu'un quadrilatère se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques, les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés passent par un point fixe et forment une involution, dont les droites doubles sont deux sécantes communes aux deux coniques.*

La démonstration est facile.

Considérons par exemple deux circonférences *intérieures* l'une à l'autre ; si un quadrilatère MM′M″M‴ se déplace en restant inscrit et circonscrit à ces deux circonférences, les droites AB et CD qui joignent les points de contact des côtés avec la circonférence intérieure passent par un point fixe P, et y forment une involution dont les droites doubles sont les isotropes partant de P ; donc les droites AB et CD sont rectangulaires ; ce théorème est le réciproque d'un théorème bien connu de géométrie élémentaire. On peut remarquer que le point P est un des *points limites* du système des deux circonférences.

Même résultat si les circonférences sont extérieures l'une à l'autre.

Mais, si les circonférences se coupent, P est à l'infini, et la corde commune forme avec la droite de l'infini le système des droites doubles de l'involution ; en d'autres termes, les droites AB et CD sont parallèles à la corde commune aux deux circonférences, et équidistantes de cette corde : on peut donc énoncer le théorème suivant :



Théorème. — *Lorsqu'une circonférence O′ passe par le centre O d'une autre circonférence et la rencontre en R et S, deux droites parallèles à RS et équidistantes de RS coupent la circonférence O en quatre points A, B, C, D, qui sont les points de contact de la circonférence O avec les côtés d'un quadrilatère inscrit dans la circonférence O′ et circonscrit à la circonférence O.*

En particulier, si au point H où OO′ coupe la circonférence O, nous menons la tangente MM′ à cette circonférence, le quadrilatère aura pour sommets les points M et M′ pris chacun deux fois, et ces points seront les points de contact des tangentes communes aux deux circonférences.

Remarque générale. — Lorsqu'un polygone est inscrit dans une circonférence O et circonscrit à

une circonférence O, les points de contact des côtés sont les sommets d'un polygone inscrit dans la circonférence O et circonscrit à une ellipse dont un des foyers est en O.

Pour le triangle on a l'énoncé suivant :

On peut circonscrire à une ellipse des triangles inscrits dans le cercle directeur relatif à un foyer; dans tous ces triangles la somme des carrés des côtés est constante.

Pour le quadrilatère, on a l'énoncé suivant :

On peut circonscrire à une ellipse des quadrilatères inscrits dans une circonférence ayant pour centre un foyer F et pour rayon $\sqrt{2a^2 + 2c^2}$ (avec les notations ordinaires); pour tous ces quadrilatères, la somme des carrés des côtés est constante.

On peut, en général, énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsqu'un polygone convexe* P *se déplace en restant inscrit dans une circonférence et circonscrit à une autre circonférence :*

1° *Le rapport entre la surface du polygone* P *et celle du polygone* Q *qui a pour sommets les points de contact des côtés du premier demeure constant ;*

2° *La somme des carrés des côtés du polygone* Q *reste constante ;*

3° *La somme des distances d'un point fixe du plan aux côtés du polygone* P *reste constante ; la valeur de la constante varie avec la position du point fixe.*

4° *Le centre des moyennes distances des sommets du polygone* P *décrit une circonférence, celui des sommets du polygone* Q *est fixe.*

La démonstration des diverses parties de ce théorème est très facile pour les cas du triangle et du quadrilatère ; elle l'est beaucoup moins pour le cas général.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

947. — *On considère une quadrique* Q *et un point* O.

1 *Trouver le lieu* C *des cordes* AB *de la quadrique* Q *qui passent en* O, *et telles que* $\frac{OA}{OB} = k$, k *étant un nombre donné.*

2 *Discuter l'équation du cône* C, *trouver son intersection avec la quadrique* Q, *et interpréter géométriquement les résultats trouvés.*

3 *Lieu des centres des sections de la quadrique* Q *par les plans tangents au cône* C.

4° *On suppose que le nombre* k *varie et on demande :* 1° *le lieu des axes du cône* C ; 2° *le lieu de ses lignes focales,* 3° *l'enveloppe de ses plans de section circulaire qui passent par un point donné. Que deviennent les résultats si la quadrique* Q *est de révolution ?*

1. — Prenons pour axes de coordonnées trois axes rectangulaires quelconques passant par le point O, et soit

$$(Q) \qquad \varphi(x, y, z) + 2Cx + 2Cy + 2Cz + D = 0$$

l'équation de la quadrique Q; $\varphi(x, y, z)$ désigne l'ensemble des termes du second degré.

Une droite quelconque passant par le point O a pour équations

$$x = \alpha\rho, \qquad y = \beta\rho, \qquad z = \gamma\rho,$$

et les ρ des points A et B où elle rencontre la quadrique sont racines de l'équation

$$(1) \qquad \rho^2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + 2\rho(C\alpha + C\beta + C\gamma) + D = 0.$$

Ces valeurs de ρ sont proportionnelles aux segments $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$. Pour que la droite considérée appartienne au lieu cherché, il faut que le rapport des racines de l'équation (1) soit égal à k.

Soient ρ_1 et ρ_2 ces racines; nous avons

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}, \qquad \rho_1\rho_2 = \frac{D}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Remplaçons ρ_2 par $k\rho_1$, ces égalités deviennent

$$(1 + k)\rho_1 = -\frac{2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}, \qquad k\rho_1^2 = \frac{D}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}$$

et, en éliminant ρ_1, nous obtenons

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - \frac{4k}{D(1 + k)^2}(C\alpha + C'\beta + C''\gamma)^2 = 0.$$

Il en résulte que l'équation du lieu des droites OAB est

$$\varphi(x, y, z) + h(Cx + C'y + C''z)^2 = 0,$$

où l'on pose $h = -\dfrac{4k}{D(1 + k)^2}$.

Ce lieu est un cône (C) du second ordre ayant pour sommet le point O; il est bitangent au cône des directions asymptotiques de la quadrique (Q), qui a pour sommet le point O $[\varphi(x, y, z) = 0]$, le long des génératrices sections de ce cône par le plan P qui a pour équation $Cx + C'y + C''z = 0$. Ce plan est parallèle au plan polaire du point O par rapport à la quadrique Q.

2. Pour avoir l'intersection du cône C et de la quadrique Q, retranchons les équations de ces deux surfaces; nous obtenons l'équation

$$(2) \qquad h(Cx + C'y + C''z)^2 - 2(Cx + C'y + C''z) - D = 0$$

qui représente deux plans parallèles au plan P.

Il en résulte que le cône C coupe la quadrique Q suivant deux coniques situées dans des plans parallèles. Ces plans sont toujours réels, car en résolvant l'équation (2) par rapport à $Cx + C'y + C''z$, on trouve, en tenant compte de la valeur de h,

$$Cx + C'y + C''z = -\frac{D(1 + k)}{2}, \qquad \text{et} \qquad Cx + C'y + C''z = -\frac{D(1 + k)}{2k}.$$

Ce résultat pouvait se prévoir. En effet, l'intersection de la quadrique Q et du cône C est formée par le lieu des points A et B. Comme on a $\overline{OA} = k.\overline{OB}$, quand le point B décrit la quadrique Q, le point A décrit la quadrique Q′ homothétique de Q dans le rapport k. Par conséquent, le lieu de B est une conique intersection de Q et de Q′.

Or Q′ a pour équation

$$\varphi(x, y, z) - 2k(Cx + C'y + C''z) + Dk^2 = 0;$$

par suite, le plan de la conique intersection de Q et Q′ est représenté par

$$2(k - 1)(Cx + C'y + C''z) + D(k^2 - 1) = 0,$$

ou

$$Cx + C'y + C''z + \frac{D(1 + k)}{2} = 0.$$

De même, le lieu de A est l'intersection de Q avec la quadrique Q″ homothétique de Q dans le rapport $\dfrac{1}{k}$; le plan de cette conique a pour équation

$$Cx + C'y + C''z + \frac{D(1 + k)}{2k} = 0.$$

3. Prenons pour axes des parallèles aux directions principales de Q, de sorte que $\varphi(x, y, z)$ a

la forme $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2$, et l'équation du cône C est

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + h(Cx + C'y + C''z)^2 = 0.$$

Cherchons la condition pour qu'un plan $ux + vy + wz = 0$ soit tangent à ce cône. Il faut éliminer x, y, z entre les équations

$$(3) \qquad \frac{Ax + hCP}{u} = \frac{A'y + hC'P}{v} = \frac{A''z + hC''P}{w},$$

$$ux + vy + wz = 0,$$

où P désigne la quantité $Cx + C'y + C''z$.

Désignons par ρ les rapports (3) ; nous en tirons

$$x = \frac{\rho u - hCP}{A}, \qquad y = \frac{\rho v - hC'P}{A'}, \qquad z = \frac{\rho w - hC''P}{A''};$$

nous portons ces valeurs dans les relations

$$ux + vy + wz = 0 \qquad \text{et} \qquad Cx + C'y + C''z = P,$$

nous obtenons

$$\rho\left(\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{A'} + \frac{w^2}{A''}\right) - hP\left(\frac{Cu}{A} + \frac{C'v}{A'} + \frac{C''w}{A''}\right) = 0,$$

$$\rho\left(\frac{Cu}{A} + \frac{C'v}{A'} + \frac{C''w}{A''}\right) - hP\left(\frac{C^2}{A} + \frac{C'^2}{A'} + \frac{C''^2}{A''}\right) - P = 0,$$

et nous éliminons le rapport $\frac{P}{\rho}$ entre ces équations, ce qui nous donne

$$(4) \qquad \frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{A'} + \frac{w^2}{A''} + h_1\left(\frac{Cu}{A} + \frac{C'v}{A'} + \frac{C''w}{A''}\right)^2 = 0,$$

en posant $h_1 = \dfrac{-h}{h\left(\frac{C^2}{A} + \frac{C'^2}{A'} + \frac{C''^2}{A''}\right) + 1}$.

Considérons alors un plan tangent au cône (C)

$$(5) \qquad ux + vy + wz = 0,$$

u, v, w vérifiant la relation (4). Le centre de la conique section de ce plan et de la quadrique Q est à l'intersection du plan et de son diamètre conjugué par rapport à Q ; ce diamètre a pour équation

$$(6) \qquad \frac{Ax + C}{u} = \frac{A'y + C'}{v} = \frac{A''z + C''}{w}.$$

Nous aurons le lieu demandé en éliminant u, v, w entre les équations (4), (5) et (6). Cette élimination est fort simple ; il nous suffit de remplacer dans (4) et (5) u, v, w respectivement par les quantités proportionnelles $Ax + C$, $A'y + C'$, $A''z + C''$, ce qui nous donne

$$x(Ax + C) + y(A'y + C') + z(A''z + C'') = 0,$$

$$\frac{(Ax + C)^2}{A} + \frac{(A'y + C')^2}{A'} + \frac{(A''z + C'')^2}{A''} + h_1\left[\frac{C(Ax + C)}{A} + \frac{C'(A'y + C')}{A'} + \frac{C''(A''z + C'')}{A''}\right]^2 = 0,$$

ou, en posant $\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2$, $\quad P = Cx + C'y + C''z$, $\quad E = \frac{C^2}{A} + \frac{C'^2}{A'} + \frac{C''^2}{A''}$,

$$\varphi + P = 0,$$

$$\varphi + 2P + E + h_1(P + E)^2 = 0.$$

Retranchons la première équation de la seconde, celle-ci devient

$$P + E + h_1(P + E)^2 = 0.$$

ou
$$(P+E)[1+h_1(P+E)] = 0,$$
ou encore, en remplaçant h_1 par sa valeur $\dfrac{-h}{hE+1}$,
$$(P+E)(-hP+1) = 0.$$

Il en résulte que le lieu est défini par les deux équations

(7) $$\varphi + P = 0,$$

(8) $$(P+E)(hP-1) = 0.$$

La première représente une quadrique Q_1 homothétique de Q. cette quadrique est le lieu des milieux des cordes de Q qui passent par le point O ; l'équation (8) représente deux plans parallèles au plan P.

Le lieu demandé se compose donc de deux coniques situées dans des plans parallèles.

Ce résultat peut s'expliquer aisément. En effet, les points A et B décrivent des coniques homothétiques appartenant à la quadrique Q et situées dans des plans parallèles. Les tangentes T′ et T″ en A et B à ces coniques sont parallèles ; leur plan est le plan tangent au cône le long de la génératrice OAB. Or ce plan coupe la quadrique Q suivant une conique tangente en A et B aux tangentes T′ et T″ ; par suite AB est un diamètre de cette conique, le milieu I de AB est le centre de cette conique. Le lieu du point I est alors l'intersection de la quadrique Q_1 et du plan P_1 équidistant des plans des coniques lieux de A et de B. On voit facilement que le plan P_1 a pour équation $hP-1=0$.

Mais ceci suppose que les points A et B sont à distance finie.

Considérons maintenant les génératrices du cône (C) qui rencontrent la quadrique (Q) en deux points à l'infini. Pour avoir ces génératrices, nous menons par le point O des plans tangents Π_1 et Π_2 au cône asymptote de (Q), et par le point O nous menons des parallèles D_1 et D_2 aux génératrices de contact G_1 et G_2 des plans Π_1 et Π_2. Les droites D_1 et D_2 sont les génératrices de (C) rencontrant (Q) en deux points à l'infini. Or le plan tangent à (C) le long de D_1 est précisément le plan Π_1, le diamètre conjugué de ce plan par rapport à (Q) est la droite G_1 ; tous les points de cette droite sont des points du lieu.

Par conséquent les droites G_1 et G_2 font partie du lieu. On vérifiera aisément que le plan $P+E=0$ est tangent à la quadrique Q_1 et la coupe suivant les droites G_1 et G_2.

4. *Lieu des axes du cône* C. — Ces axes sont définis par les équations
$$\frac{Ax+hCP}{x} = \frac{A'y+hC'P}{y} = \frac{A''z+hC''P}{z}.$$

Eliminons h entre ces équations. Pour cela, désignons par $-\rho$ ces trois rapports ; nous avons
$$Ax+hCP+\rho x = 0,$$
$$A'y+hC'P+\rho y = 0,$$
$$A''z+hC''P+\rho z = 0,$$
et en éliminant hP et ρ, nous avons
$$\begin{vmatrix} Ax & C & x \\ A'y & C' & y \\ A''z & C'' & z \end{vmatrix} = 0,$$
ou
$$C(A'-A'')yz + C'(A''-A)zx + C''(A-A')xy = 0.$$

Cette équation représente un cône du deuxième degré ayant pour sommet l'origine.

Si la surface est de révolution deux des nombres A, A′, A″ sont égaux, et le lieu se réduit à deux plans.

Lieu des lignes focales du cône C. — Soit (x, y, z) un foyer du cône (C), nous écrirons que les plans tangents menés de ce point au cône (C) sont tangents au cône isotrope de sommet O, et pour cela, que

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{A'} + \frac{w^2}{A''} + h_1\left(\frac{Cu}{A} + \frac{C'v}{A'} + \frac{C''w}{A''}\right)^2 - S(u^2 + v^2 + w^2)$$

est divisible par $ux + vy + wz$, ce qui donne l'identité

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{A'} + \frac{w^2}{A''} + h_1\left(\frac{Cu}{A} + \frac{C'v}{A'} + \frac{C''w}{A''}\right)^2 - S(u^2 + v^2 + w^2) = (ux + vy + wz)(ux' + vy' + wz'),$$

ou

$$\frac{1}{A} + h_1\frac{C^2}{A^2} - S = xx', \qquad \frac{1}{A'} + h_1\frac{C'^2}{A'^2} - S = yy', \qquad \frac{1}{A''} + h_1\frac{C''^2}{A''^2} - S = zz',$$

$$2h_1\frac{C'C''}{A'A''} = yz' + zy', \qquad 2h_1\frac{C''C}{A''A} = zx' + xz', \qquad 2h_1\frac{CC'}{AA'} = xy' + yx'.$$

Tirons x, y, z des trois premières égalités et portons les valeurs obtenues dans les trois suivantes ; nous avons

$$\frac{y^2}{A'} + \frac{z^2}{A''} - S(y^2 + z^2) + h_1\left(\frac{C''}{A''}y - \frac{C'}{A'}z\right)^2 = 0,$$

$$\frac{z^2}{A''} + \frac{x^2}{A} - S(z^2 + x^2) + h_1\left(\frac{C}{A}z - \frac{C''}{A''}x\right)^2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{A'} - S(x^2 + y^2) + h_1\left(\frac{C'}{A'}x - \frac{C}{A}y\right)^2 = 0.$$

Éliminons S et h_1 entre ces équations ; nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \frac{y^2}{A'} + \frac{z^2}{A''} & y^2 + z^2 & \left(\frac{C''}{A''}y - \frac{C'}{A'}z\right)^2 \\ \frac{z^2}{A''} + \frac{x^2}{A} & z^2 + x^2 & \left(\frac{C}{A}z - \frac{C''}{A''}x\right)^2 \\ \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{A'} & x^2 + y^2 & \left(\frac{C'}{A'}x - \frac{C}{A}y\right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente un cône du sixième degré.

Supposons que la quadrique Q soit de révolution, par exemple $A' = A''$. Remplaçons dans le déterminant précédent A' par A, puis ajoutons aux éléments de la première colonne les éléments de la seconde multipliés respectivement par $-\frac{1}{A'}$; l'équation devient

$$\begin{vmatrix} 0 & y^2 + z^2 & \left(\frac{C''}{A}y - \frac{C}{A'}z\right)^2 \\ z^2\left(\frac{1}{A''} - \frac{1}{A}\right) & z^2 + x^2 & \left(\frac{C}{A}z - \frac{C''}{A}x\right)^2 \\ y^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A}\right) & x^2 + y^2 & \left(\frac{C'}{A}x - \frac{C}{A}y\right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Divisons les éléments de la première colonne par $\frac{1}{A''} - \frac{1}{A}$, puis retranchons-les de ceux de la seconde ; il vient

$$\begin{vmatrix} 0 & y^2 + z^2 & \left(\frac{C}{A}y - \frac{C}{A}z\right)^2 \\ z^2 & x^2 & \left(\frac{C}{A}z - \frac{C''}{A''}x\right)^2 \\ y^2 & x^2 & \left(\frac{C}{A'}x - \frac{C}{A}y\right)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$\left(\frac{C''}{A'}y - \frac{C'}{A'}z\right)^2 x^2(z^2 - y^2) + \left(\frac{C}{A}z - \frac{C''}{A'}x\right)^2 y^2(y^2 + z^2) - \left(\frac{C'}{A'}x - \frac{C}{A}y\right)^2 z^2(y^2 - z^2) = 0.$$

Mettons $y^2 + z^2$ en facteur dans les deux derniers termes ; le coefficient de $y^2 + z^2$ est une différence de deux carrés qu'on peut remplacer par un produit, ce qui fait apparaître le facteur $\frac{C'}{A'}y - \frac{C'}{A'}z$; on reconnaît ensuite la présence du facteur xyz et l'équation s'écrit

$$xyz\left(\frac{C''}{A'}y - \frac{C'}{A'}z\right)\left[\frac{C}{A}(y^2 + z^2) - \frac{C'}{A'}xy - \frac{C''}{A'}xz\right] = 0.$$

Le véritable lieu est le cône du deuxième degré qui a pour équation

$$\frac{C}{A}(y^2 + z^2) - \frac{C'}{A'}xy - \frac{C''}{A'}xz = 0.$$

Enveloppe des plans de section circulaire du cône (C) *qui passent par un point donné.* — L'enveloppe des plans de section circulaire qui passent par un point A est un cône parallèle au cône enveloppe des plans de section circulaire qui passent par l'origine. Nous allons chercher cette dernière enveloppe.

Soit $ux + vy + wz = 0$ un plan de section circulaire passant par l'origine ; nous devons écrire que

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + h(Cx + C'y + C''z)^2 - S(x^2 + y^2 + z^2)$$

est divisible par $ux + vy + wz$, c'est-à-dire que l'on a

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + h(Cx + C'y + C''z)^2 - S(x^2 + y^2 + z^2) = (ux + vy + wz)(u'x + v'y + w'z),$$

ou

$$A + hC^2 - S = uu', \qquad A' + hC'^2 - S = vv', \qquad A'' + hC''^2 - S = ww',$$

$$2hC'C'' = vw' + wv', \qquad 2hC''C = wu' + uw', \qquad 2hCC' = uv' + vu'.$$

Tirons u', v', w' des trois premières égalités et portons les valeurs obtenues dans les trois dernières, nous obtenons trois équations du premier degré par rapport à h et S, et en éliminant ces variables, nous avons l'équation tangentielle de l'enveloppe

$$\begin{vmatrix} A'v^2 + A'w^2 & v^2 + w^2 & (Cv - C'w)^2 \\ Aw^2 + A''u^2 & w^2 + u^2 & (Cw - C''u)^2 \\ A'u^2 + Av^2 & u^2 + v^2 & (C'u - Cv)^2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

cette équation représente un cône de sixième classe.

Si la surface est de révolution, par exemple $A' = A''$, on verra par un calcul analogue au précédent que l'équation de l'enveloppe peut s'écrire

$$uvw(C'w - C''v)\,C(v^2 + w^2) - C'uv - C''uw = 0.$$

L'enveloppe est dans ce cas un cône de seconde classe.

On aurait pu déduire l'enveloppe des plans cycliques du lieu des focales, en se rappelant que les focales d'un cône sont perpendiculaires aux plans cycliques du cône supplémentaire.

967. — *On donne un ellipsoïde et un point P; à un point M de l'espace, on fait correspondre le point de rencontre M' de la droite PM et du plan polaire de M.*

1° *Lorsque M est assujetti à rester dans un plan (K), le point M reste sur une quadrique (Q). Montrer qu'on peut remplacer le point P et le plan (K) respectivement par un point P' et un plan (K') sans changer la quadrique (Q). Discuter la nature des quadriques (Q) suivant la position du plan (K) dans l'espace.*

2° *Trouver, lorsque le plan (K) tourne autour d'un point R, le lieu des centres des quadriques (Q). Ce lieu est une quadrique qui passe par un point fixe et une ellipse fixe, lorsque le point R se déplace d'une manière quelconque dans l'espace. Indiquer la nature de cette quadrique d'après la position du point R.*

1° Soient
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$
l'équation de l'ellipsoïde donné (E), x_1, y_1, z_1, x, y, z, x', y', z' les coordonnées des points P, M, M'.

On a les relations
$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-1=0,$$
$$\frac{x'-x_1}{x-x_1}=\frac{y'-y_1}{y-y_1}=\frac{z'-z_1}{z-z_1}.$$

En égalant les rapports à λ et portant dans la première équation de condition, on trouve
$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1+\left[\frac{x(x-x_1)}{a^2}+\frac{y(y-y_1)}{b^2}+\frac{z(z-z_1)}{c^2}\right]\lambda=0.$$

Soit alors $ux+vy+wz+r=0$ l'équation du plan (K).

On a $ux'+vy'+wz'+r=0$, ou, en remplaçant x', ... par $x_1+\lambda(x-x_1)$, ... et λ par sa valeur,
$$(ux_1+vy_1+wz_1+r)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-(ux+vy+wz+r)\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1\right)=0.$$

C'est l'équation de la quadrique (Q).

Si l'on écrit l'équation du plan polaire de P, $ux+vy+wz+r=0$, la quadrique (Q) prend la forme symétrique
$$(a^2uu'+b^2vv'+c^2ww'+rr')\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-(ux+vy+wz+r)(ux'+vy'+wz'+r')=0.$$

On voit qu'on peut remplacer le point P par le pôle P' du plan (K), et le plan (K) par le plan polaire (K') de P, sans changer la surface (Q).

La quadrique (Q) passe par les points P, P' et les ellipses (e), (e') d'intersection de l'ellipsoïde par les plans polaires de P, P'.

Pour discuter aisément la quadrique (Q), nous supposerons l'ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués dont l'un, Ox, passe par le point P ($x=d$, $y=0$, $z=0$).

On a alors pour l'équation de (Q)
$$(ud+r)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{dx}{a^2}-1\right)(ux+vy+wz+r)=0.$$

La décomposition en carrés donne
$$-X^2+LY^2+Z^2+4(du+r)^2M=0,$$
où l'on a
$$L=d^2(b^2v^2+c^2w^2)-4a^2(du+r)r,\qquad M=(a^2-d^2)(b^2v^2+c^2w^2)-(a^2u+dr)^2.$$

$$X = L\frac{x}{a^2} - [d(b^2v^2 + c^2w^2) + 2(du + r)(a^2u - dr)], \qquad Y = 2(du + r)\frac{y}{b} - \frac{bv}{a^2}(dx - a^2),$$

$$Z = 2(du + r)\frac{z}{c} - \frac{cw}{a^2}(dx - a^2).$$

u, v, w, r étant les coordonnées tangentielles courantes, l'équation $L = 0$ représente un ellipsoïde (E') homothétique à l'ellipsoïde donné, et qui a son centre au milieu de OP. On voit, d'après son équation, que les extrémités du diamètre dirigé suivant OP sont les points O et P. L'ellipsoïde (E') contient évidemment l'ellipse (e).

L'équation $M = 0$ peut se mettre sous la forme

$$(d^2 - a^2)(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2) - a^2(du + r)^2 = 0.$$

Elle représente une quadrique circonscrite à l'ellipsoïde donné le long de l'ellipse (e). Mais comme le discriminant du premier membre est nul, cette quadrique se réduit à une conique : c'est donc l'ellipse (e). Cette courbe est imaginaire si P est extérieur à l'ellipsoïde. Dans ce cas, M est positif quelle que soit la position du plan (K).

La discussion demandée est contenue dans le tableau suivant :

Plan (K)				Quadrique (Q)
1° Ne passe pas par P				
Coupe (E')	$L > 0$	Ne coupe pas (e)	$M > 0$	Hyperboloïde à deux nappes
		Est tangent à (e)	$M = 0$	Cône réel
		Coupe (e)	$M < 0$	Hyperboloïde à une nappe
Est tangent à (E')	$L = 0$	Ne coupe pas (e)	$M > 0$	Paraboloïde elliptique
		Est tangent à (e) [c.-à d. tangent au cône (C)]	$M = 0$	Cylindre elliptique
Ne coupe pas (E')	$L < 0$. — Ne coupe pas (e)		$M > 0$	Ellipsoïde réel
2° Passe par P				Deux plans réels

Pour abréger, on a employé l'expression *couper* pour indiquer que l'intersection (ellipse ou points) était réelle.

2° Pour plus de commodité dans les calculs, nous conserverons les mêmes axes de coordonnées. Les équations du centre sont

$$2(ud + r)\frac{x}{a^2} - u\left(\frac{dx}{a^2} - 1\right) - \frac{d}{a^2}(ux + vy + wz + r) = 0,$$

$$2(ud + r)\frac{y}{b^2} - v\left(\frac{dx}{a^2} - 1\right) = 0,$$

$$2(ud + r)\frac{z}{c^2} - w\left(\frac{dx}{a^2} - 1\right) = 0.$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point R. Pour avoir le lieu cherché, il faut éliminer u, v, w, r entre les équations précédentes et $ux_0 + vy_0 + wz_0 + r = 0$.

Il est plus simple de prendre pour inconnues

$$\frac{u}{ud+v} = \lambda, \qquad \frac{v}{ud+v} = \mu, \qquad \frac{w}{ud+v} = \nu.$$

On tire immédiatement μ et ν de deux des équations, et en portant dans les deux autres, on a

$$\lambda\left(\frac{dx}{a^2} - 1\right)(2dx - a^2 - d^2) + 2d\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - (2x - d)\left(\frac{dx}{a^2} - 1\right) = 0,$$

$$\lambda\left(\frac{dx}{a^2} - 1\right)(x_0 - d) + 2\frac{y_0 y}{b^2} + 2\frac{z_0 z}{c^2} + \frac{dx}{a^2} - 1 = 0.$$

L'élimination de $\lambda\left(\frac{dx}{a^2} - 1\right)$ donne

$$(x_0 - d)\left[2d\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - (2x - d)\left(\frac{dx}{a^2} - 1\right)\right] - (2dx - a^2 - d^2)\left(2\frac{y_0 y}{b^2} + 2\frac{z_0 z}{c^2} + \frac{dx}{a^2} - 1\right) = 0,$$

équation d'une surface du deuxième ordre.

Cette surface passe, quels que soient x_0, y_0, z_0, par le point $x = \frac{a^2}{d}$, $y = 0$, $z = 0$, conjugué par rapport à (E) du point P sur le diamètre OP, et par la conique

$$2d\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - (2x - d)\left(\frac{dx}{a^2} - 1\right) = 0, \qquad 2dx - a^2 - d^2 = 0.$$

Par une combinaison des deux équations, on aperçoit facilement que cette conique est située sur l'ellipsoïde

$$(E') \qquad \frac{(2x - d)^2}{a^2} + \frac{4y^2}{b^2} + \frac{4z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

homothétique à (E) dans le rapport $\frac{1}{2}$, et qui a son centre au milieu de OP. Le plan $2dx - a^2 - d^2 = 0$ est d'ailleurs le plan polaire du point P par rapport à cet ellipsoïde (E'). Pour discuter la surface lieu des centres, nous ferons comme précédemment la décomposition en carrés :

$$-X^2 + L(Y^2 + Z^2) + \frac{(x_0 - d)^2}{4a^4}M = 0,$$

où l'on a

$$L = \frac{a^2(x_0 - d)}{a^2}, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad M = (2a^2 - d^2)x_0 - a^2d^2 + 4a^4(a^2 - d^2)\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$X = 2L\,dx - (a^2 + d^2)\left(\frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2}\right) - \frac{(x_0 - d)}{2a^2}(2a^2 + d^2)x_0 + a^2d,$$

$$Y = 2d(x_0 - d)\frac{y}{b} - (2dx - a^2 - d^2)\frac{y}{b}, \quad Z = 2d(x_0 - d)\frac{z}{c} - (2dx - a^2 - d^2)\frac{z_0}{c}.$$

Si l'on regarde x_0, y_0, z_0 comme coordonnées courantes, l'équation $L = 0$ est celle de l'ellipsoïde (E') déjà vu. $M = 0$ représente un cône réel si $d^2 > a^2$. Comme on peut écrire son équation

$$4a^4(a^2 - d^2)L - d^2(x_0 - a^2)^2 = 0,$$

on voit que c'est le cône C_0 circonscrit à l'ellipsoïde (E') le long de la section par le plan $x = \frac{a^2}{d}$, c'est-à-dire le long de l'ellipse (Γ). Si $d^2 = 2a^2$, au lieu d'un cône on a un cylindre.

Nous appellerons plan (H) le plan tangent à (E) au point P, $x - d = 0$.

La discussion, identique à celle déjà faite, est indiquée ci-après :

Point R				Quadrique
1° N'est pas dans le plan (H)				
Est extérieur à (E')	$L' > 0$	Est intérieur à (C)	$M' > 0$	Hyperboloïde à deux nappes
		Est sur (C)	$M' = 0$	Cône réel
		Est extérieur à (C)	$M < 0$	Hyperboloïde à une nappe
Est sur (E')	$L' = 0$	Est intérieur à (C)	$M' > 0$	Paraboloïde elliptique
		Est sur (C) [c.-à.-d. sur l'ellipse (e)]	$M' = 0$	Cylindre elliptique
Est intérieur à (E')	$L' > 0$	— Est intérieur à (C)	$M' > 0$	Ellipsoïde réel
2° Est dans le plan (H)				Deux plans réels.

VASNIER.

TRIGONOMÉTRIE

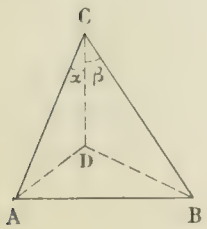
977. — *Deux points* A *et* B, *séparés par une colline, sont à une même cote de* $48^m,263$. *D'un point* C, *situé au sommet de cette colline et ayant pour cote* $163^m,842$, *on mesure les angles*

$$\alpha = 61^\circ 32', \qquad \beta = 76^\circ 28',$$

que font les directions CA *et* CB *avec la verticale* CD, *ainsi que l'angle des deux plans verticaux* ACD *et* BCD ; *ce dernier angle est de* $117^\circ 16'$. *Evaluer la distance* AB.

(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours spéciaux, 1900.*)

Soit $$h = CD = 163^m,842 - 48^m,263 = 115^m,579.$$



On a $$DA = h \operatorname{tg} \alpha, \qquad DB = h \operatorname{tg} \beta,$$

et tout revient à calculer le côté AB du triangle DAB, dans lequel on connaît les côtés DA, DB et l'angle compris $D = 117^\circ 16'$.

AB est donné par la relation $\dfrac{AB}{\sin D} = \dfrac{AD}{\sin B}$, d'où l'on tire

$$AB = \frac{AD \sin D}{\sin B} = \frac{h \operatorname{tg} \alpha \sin D}{\sin B}.$$

Pour calculer l'angle B, on doit se servir de la formule

$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{DB - DA}{DB + DA} \operatorname{cotg} \frac{D}{2} = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha} \operatorname{cotg} \frac{D}{2}.$$

Or, $$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta}, \qquad \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

par suite, $$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \operatorname{cotg} \frac{D}{2}.$$

On trouve ainsi $$\frac{A - B}{2} = 13^\circ 12' 43'',47.$$

D'autre part $$\frac{A + B}{2} = 90^\circ - \frac{D}{2} = 31^\circ 22';$$

d'où $$B = 18^\circ 9' 16'',53.$$

On en déduit $$AB = 608^m,121.$$

Calcul numérique.

CALCULS AUXILIAIRES

$\alpha = 61^\circ 32'$

$\beta = 76^\circ 28'$

$\beta - \alpha = 14^\circ 56'$

$\beta + \alpha = 138^\circ \qquad \sin 138^\circ = \sin 42^\circ$

$\frac{D}{2} = 58^\circ 38'$

$\log \sin(\beta - \alpha) = \bar{1},4111059$

$\log \sin(\beta + \alpha) = \bar{1},8255109$

$\log \operatorname{tg} \frac{D}{2} = 0,2149519$

Calcul de $\log h$

$115,57 \ldots\ldots 0628451 \quad \Delta = 376$

$0,9 \ldots \quad 338,4$

$\log 115,579 = 2,0628789$

Calcul de $\log \sin B$

$18^\circ 9' 10'' \ldots \bar{1},4935304 \quad \Delta = 642$

$6'' \quad 385,2$

$0'',5 \quad 32,1$

$0'',03 \quad 1,9$

$\log \sin B = \bar{1},4935723$

$\log \operatorname{tg} \alpha = 0,2658384$

$\log \sin D = \bar{1},9488450$

CALCULS DÉFINITIFS

Calcul de $\frac{A - B}{2}$.

$\log \sin(\beta - \alpha) = \bar{1},4111059$

$\operatorname{colog} \sin(\beta + \alpha) = 0,1744891$

$\operatorname{colog} \operatorname{tg} \frac{D}{2} = \bar{1},7850481$

$\log \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \bar{1},3706431$

$13^\circ 12' 40'' \ldots\ldots \quad 102 \quad \Delta = 946$

$3'',47 \ldots\ldots \quad 329$

$\frac{A - B}{2} = 13^\circ 12' 43'',47$

$\frac{A + B}{2} = 31^\circ 22'$

$B = 18^\circ\ 9' 16'',53$

Calcul de AB

$\log h = 2,0628789$

$\log \operatorname{tg} \alpha = 0,2658384$

$\log \sin D = \bar{1},9488450$

$\operatorname{colog} \sin B = 0,5064277$

$2,7839900$

$60812 \ldots\ldots 893 \quad \Delta = 71$

$0,1 \quad 7$

$AB = 608,421$

Solutions exactes : C. Nain, élève Chaptal ; H. Sournie, élève à Dieppe.

CONCOURS DE 1901

CONCOURS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Mathématiques (Paris et Départements).

1027. — Étant donnés un ellipsoïde E et une sphère S concentrique à cet ellipsoïde, on prend le plan polaire P d'un point quelconque M par rapport à l'ellipsoïde E, puis le pôle p du plan P par rapport à la sphère S. Soit D la droite qui joint le point M au point p.

1° On demande le lieu C que doit décrire le point M pour que les droites D passent par un même point donné. Trouver l'équation du cône décrit par les droites D.

2° Trouver le lieu que doit décrire M pour que les droites D soient situées dans un plan donné H, et l'enveloppe des droites D dans ce plan.

3° Trouver la surface engendrée par les droites D quand le point M décrit une droite donnée quelconque.

4° On assujettit les droites D à rencontrer une droite donnée Δ et à rester parallèles à un plan donné Π ; trouver le degré de la surface Σ engendrée par ces droites D.

Chercher les conditions dans lesquelles la surface Σ se décompose.

(20 mai, de 8 h. 1/2 à 1 h. 1/2.)

Physique (Paris).

I. — Lunette astronomique.

II. — **1028.** — Sur une bulle de savon ayant la forme d'une sphère de rayon R, on fait tomber un faisceau de lumière convergente (fournie par exemple par une lentille recevant de la lumière parallèle et recouverte d'un diaphragme qui ne laisserait passer la lumière que par l'intervalle annulaire compris entre deux circonférences concentriques de rayons presque égaux) formant une nappe conique circulaire dont l'axe coïncide avec un diamètre de la sphère. La nappe conique de sommet M est transformée par la réflexion en une nappe conique de sommet M'.

On demande de suivre les variations de position des sommets M et M'.

Comme application, on supposera que la bulle est restée adhérente et suspendue au tube qui a servi à la gonfler, que ce tube est vertical, que l'axe du faisceau conique coïncide avec le diamètre vertical de la bulle et que la lumière est dirigée de bas en haut. On demande dans ce cas comment variera la position du sommet M', la bulle se dégonflant, si on suppose que le sommet M coïncide avec l'extrémité supérieure du diamètre vertical et que l'angle au sommet du cône, 2γ, soit égal à 90° ; en particulier, calculer le déplacement de M' dans le cas où la bulle ayant atteint un rayon de 10^{cm}, la pression intérieure viendrait à varier d'une quantité égale à $0^{mm},1$ de mercure. On supposera la tension superficielle égale à 75 dynes par centimètre et la densité du mercure égale à 13,56.

(22 mai, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.)

Chimie (Paris).

I. — Étude des combinaisons formées seulement d'azote et d'oxygène ; préparation et propriétés.

II. — **1029.** — Un mélange d'hydrogène protocarboné, d'hydrogène bicarboné, d'acide carbonique et d'hydrogène silicié occupe 20 centimètres cubes. Après avoir été traité par la potasse, le volume est réduit à 18^{cc}. On ajoute alors à ces 18^{cc} un volume de 50^{cc} d'oxygène et on fait détoner le mélange dans un eudiomètre ; après cette détonation, le volume est de 36^{cc} ; traités par la potasse, ces 36^{cc} se réduisent à 22^{cc} qui sont entièrement absorbés ensuite par un bâton de phosphore.

Tous ces volumes ont été mesurés à la même température et à la même pression et corrigés de la tension de la vapeur d'eau qu'ils contiennent après l'action de la solution de potasse et après la combustion eudiométrique.

On demande : 1° les formules des diverses réactions qui ont eu lieu ; 2° le volume de chacun des gaz du mélange.

(24 mai, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1030. — Deux paraboles de sommets fixes et de paramètres constants varient de façon que leurs quatre points communs soient sur un même cercle. Trouver le lieu du centre de ce cercle.

M. O.

1031. — On considère la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ et le paraboloïde $xy - az = 0$. Trouver la condition pour que les droites conjuguées de la droite

$$(D) \qquad x - az - p = 0, \qquad y - bz - q = 0$$

par rapport à ces deux surfaces se rencontrent.

1° Trouver le lieu de ces droites qui passent par un point A donné ; le lieu des points A pour lesquels ce cône se décompose en deux plans rectangulaires.

2° Trouver l'enveloppe des droites de cette espèce situées dans un plan. Cette enveloppe est une hyperbole. Trouver l'enveloppe des plans pour lesquels c'est une hyperbole équilatère.

E. H.

***1032.** — On donne un cercle et deux diamètres rectangulaires fixes. La tangente en un point M quel-

conque du cercle rencontre les deux diamètres en deux points P et Q et l'on considère la parabole tangente à ces diamètres aux points P et Q. Trouver, pour cette parabole :

1° Le lieu du foyer ;
2° Le lieu du sommet ;
3° Le lieu du pied de la directrice sur l'axe ;
4° L'enveloppe de l'axe ;
5° L'enveloppe de la tangente au sommet.

E.-N. Barisien.

***1033.** — Soient M et M' les extrémités variables de deux diamètres conjugués d'une ellipse dont les foyers sont F et F'. Trouver les courbes lieux des points d'intersection des côtés du quadrangle MFF'M' et construire ces courbes.

E.-N. Barisien.

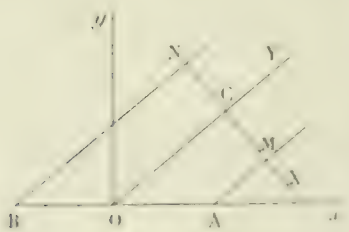
1034. — De l'air tiède et humide, dont la température est t et dans lequel la vapeur d'eau a une tension f, est dirigé lentement, sous la pression atmosphérique, au travers d'un serpentin disposé de façon que l'eau qui s'y condense puisse s'y accumuler. Ce serpentin est placé dans un calorimètre soustrait à tout échange de chaleur avec le milieu ambiant et contenant de l'alcool dont la température initiale est inférieure à zéro de θ degrés. On supposera que la température τ, à laquelle la tension maxima de la vapeur d'eau est égale à f, est supérieure à 0 et inférieure à t. Que se passe-t-il dans le serpentin, et comment varie la température du calorimètre ?

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

975. — *A et B sont deux points fixes par lesquels on mène deux droites variables et parallèles, AM et BN. Trouver le lieu des foyers des coniques tangentes à AB et admettant AM et BN comme tangentes aux sommets situés sur un de leurs axes.*

Je prends comme axes la droite AB et la perpendiculaire au milieu. Si on désigne par a l'abscisse du point A et par m le coefficient angulaire des droites AM et BN, les équations de ces droites sont



$$y - mx + ma = 0, \qquad y - mx - ma = 0.$$

Soit $x + my + \lambda = 0$ l'équation d'une droite quelconque MN perpendiculaire aux droites AM et BN ; l'équation générale des coniques tangentes en M et N aux droites AM et BN est

$$(y - mx + ma)(y - mx - ma) + \mu(x + my + \lambda)^2 = 0,$$

ou

$$(y - mx)^2 - m^2a^2 + \mu(x + my + \lambda)^2 = 0.$$

Toutes ces coniques ont évidemment pour sommets les points M et N ; il nous reste à écrire qu'elles sont tangentes à la droite AB, et pour cela qu'en faisant $y = 0$ dans l'équation précédente on obtient une équation du second degré en x qui a une racine double. On trouve ainsi

$$(1 + \mu m^2)x^2 + 2\mu m\lambda x + \mu\lambda^2 - m^2a^2 = 0;$$

on en tire $x = \dfrac{m^2a^2}{\lambda^2 - a^2}$, de sorte que l'équation générale des coniques considérées est

$$(\lambda^2 - a^2)(y - mx)^2 - m^2a^2(x + my + \lambda)^2 = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{(x+my+\lambda)^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{(y-mx)^2}{m^2a^2}-1=0.$$

Nous avons ainsi en évidence les équations des axes, et il est aisé de faire apparaître les longueurs de ces axes. Prenons en effet pour axes de coordonnées les droites MN et OC. Les formules de transformation sont

$$X=\frac{y-mx}{\sqrt{1+m^2}},\qquad Y=\frac{x+my+\lambda}{\sqrt{1+m^2}},$$

attendu que X et Y représentent respectivement les distances d'un point du plan aux droites OC et MN. Il en résulte que l'équation de la conique par rapport aux nouveaux axes est

$$\frac{X^2}{\frac{m^2a^2}{1+m^2}}-\frac{Y^2}{\frac{\lambda^2-a^2}{1+m^2}}-1=0.$$

Les carrés des demi-longueurs d'axes sont alors $\frac{m^2a^2}{1+m^2}$ et $\frac{\lambda^2-a^2}{1+m^2}$, et les foyers sont définis par les équations

$$\begin{cases} X^2=\dfrac{m^2a^2}{1+m^2}-\dfrac{\lambda^2-a^2}{1+m^2}, \\ Y=0, \end{cases}\qquad \text{ou}\qquad \begin{cases} Y^2=\dfrac{\lambda^2-a^2}{1+m^2}-\dfrac{a^2m^2}{1+m^2}, \\ X=0. \end{cases}$$

Remplaçons X et Y par leurs valeurs en fonction de x et y, nous obtenons

$$(1)\quad \begin{cases} (y-mx)^2=m^2a^2-\lambda^2+a^2, \\ x+my+\lambda=0, \end{cases}\qquad \text{et}\qquad (2)\quad \begin{cases} (x+my+\lambda)^2=\lambda^2-a^2-a^2m^2, \\ y-mx=0. \end{cases}$$

Pour avoir le lieu des foyers, il faut éliminer m et λ entre les équations (1) d'une part, et aussi entre les équations (2). Comme nous avons deux paramètres indépendants à éliminer entre deux équations, il semble que ce soit impossible et qu'il n'y ait pas de lieu.

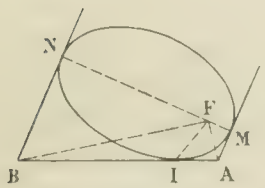
Il en est ainsi pour le système (2), car si on tire m de la seconde équation, $m=\frac{y}{x}$, et qu'on porte dans la première, on obtient une équation du premier degré en λ. Par suite, on peut déterminer λ et m de façon que les équations (2) soient vérifiées par les coordonnées d'un point quelconque du plan.

Considérons maintenant le système (1); la deuxième équation nous donne $\lambda=-(x+my)$; portons cette valeur dans la première, nous pouvons diviser par $1+m^2$, et nous obtenons l'équation

$$x^2+y^2-a^2=0,$$

qui est l'équation du lieu, et qui représente le cercle de diamètre AB.

On remarquera que ce cercle est le lieu des foyers situés sur l'axe MN.



Solution géométrique. — Si l'axe focal de la conique est dirigé suivant OC, les foyers peuvent occuper une position quelconque sur cette droite, et comme sa direction est arbitraire, un point quelconque du plan peut être foyer.

Supposons maintenant que MN soit l'axe focal; soit F un foyer et I le point de contact de la conique avec la droite AB. La droite FA est bissectrice de l'angle IFM, FB est de même bissectrice de l'angle IFN. Il en résulte que l'angle AFB est droit; par suite, le lieu du point F est le cercle de diamètre AB.

Solutions géométriques par MM. Cans, Fauvernier, Tribier, Vasnier.

976. — *Calculer la surface du parallélogramme déterminé par les quatre droites* $ax + by = \pm c$ *et* $a'x + b'y = \pm c'$.

En appelant h la distance des deux droites $ax + by = \pm c$, h' celle des deux droites $a'x + b'y = \pm c'$, et θ l'angle des droites $ax + by = 0$, $a'x + b'y = 0$, les longueurs des côtés du parallélogramme sont $\frac{h}{\sin\theta}$ et $\frac{h'}{\sin\theta}$; l'aire du parallélogramme est donc $\frac{hh'}{\sin\theta}$. Or, on a $h = \frac{2c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $h' = \frac{2c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$ et $\operatorname{tg}\theta = \frac{m' - m}{1 - mm'}$, ou $\operatorname{tg}\theta = \frac{ab' - ba'}{aa' + bb'}$. Par conséquent

$$\frac{\sin\theta}{ab' - ba'} = \frac{\cos\theta}{aa' + bb'} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

Il en résulte immédiatement que l'aire demandée est

$$\left| \frac{4cc'}{ab' - ba'} \right|.$$

Les calculs que nous avons faits supposent les axes de coordonnées rectangulaires. Si on ne suppose pas qu'il en soit ainsi, il vaut mieux procéder de la façon suivante. Calculer les coordonnées de deux sommets consécutifs du parallélogramme, former l'aire du triangle ayant pour sommets l'origine et ces deux points et multiplier cette aire par 4. Or deux sommets consécutifs du parallélogramme sont les points de rencontre des droites $a'x + b'y = \pm c'$ avec la droite $ax + by = c$; les coordonnées de ces deux points sont donc

$$\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}, \quad \text{et} \quad \frac{cb' + bc'}{ab' - ba'}, \quad -\frac{ac' + ca'}{ab' - ba'}.$$

L'aire demandée a pour valeur

$$4\frac{\sin\theta}{2(ab' - ba')^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ cb' - bc' & ac' - ca' & ab' - ba' \\ cb' + bc' & -ac' - ca' & ab' - ba' \end{vmatrix},$$

en désignant maintenant par θ l'angle des axes. Tous calculs faits, on trouve pour valeur de l'aire

$$\sin\theta \left| \frac{4cc'}{ab' - ba'} \right|.$$

J. MARCHAL.

Bonnes solutions : MM. G. Fauvernier, H. Dinvant, élève au lycée de Nancy, Cans, à Versailles, R. Manen, petit séminaire de Massais, Lemoyne, à Troyes, E.-N. Barisien.

---

989. — *Par un point fixe* A *de l'axe d'une parabole, on mène un rayon variable* AM *qui rencontre la parabole en* M ; *on prend la projection* H *de ce point sur l'axe et le symétrique* A_1 *du point* A *par rapport à* H.

Trouver les lieux de la projection de A *sur* MA_1, *de la projection de* A_1 *sur* MA *et de l'orthocentre du triangle* MAA_1.

Construire ces courbes quand le point A *est au foyer.*

Nous prendrons pour axe des x l'axe de la parabole, et pour axe des y la perpendiculaire passant

par le point A. L'équation de la parabole est alors

$$y^2 - 2p(x + a) = 0,$$

en désignant par $-a$ l'abscisse du sommet.

Soit m le coefficient angulaire de AM et α l'abscisse du point A ; l'équation de AM est $y - mx = 0$, celle de A_1M est $y = -m(x - \alpha)$, car les deux droites AM et A_1M sont également inclinées sur l'axe des x. Le point de rencontre de ces deux droites a pour coordonnées $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{m\alpha}{2}$. Écrivons que ce point est sur la parabole ; nous obtenons

$$m^2\alpha^2 - 4p\alpha - 8pa = 0, \tag{1}$$

relation qui lie les paramètres m et α.

Cela posé la projection du point A sur MA_1 est déterminée par les équations

$$y = -m(x - \alpha), \qquad y = \frac{1}{m}x ;$$

nous aurons le lieu de ce point en éliminant m et α entre ces équations et l'equation (1). Nous avons immédiatement $m = \frac{x}{y}$, $\alpha = \frac{x^2 + y^2}{x}$, et en portant ces valeurs dans la relation (1) nous obtenons l'équation du lieu

$$x(x^2 + y^2)^2 - 4py^2(x^2 + y^2) - 8paxy^2 = 0.$$

Cette équation représente une courbe du cinquième degré.

Si le point A est au foyer de la parabole, a est égal à $\frac{p}{2}$ et l'équation du lieu devient

$$x(x^2 + y^2)^2 - 4py^2(x^2 + y^2) - 4p^2xy^2 = 0.$$

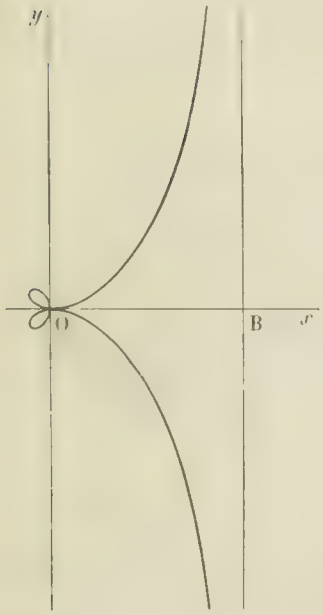


Fig. 1.

Passons en coordonnées polaires ; l'équation s'écrit

$$\rho^2 \cos\omega - 4p\rho \sin^2\omega - 4p^2 \cos\omega \sin^2\omega = 0,$$

ou, en résolvant par rapport à ρ,

$$\rho = \frac{2p\sin^2\omega \pm 2p\sin\omega}{\cos\omega}.$$

Or si on considère les deux équations $\rho = \frac{2p\sin^2\omega + 2p\sin\omega}{\cos\omega}$ et $\rho = \frac{2p\sin^2\omega - 2p\sin\omega}{\cos\omega}$, on voit que l'une se déduit de l'autre en changeant ω en $\pi + \omega$ et ρ en $-\rho$; il en résulte que ces deux équations représentent la même courbe. Il nous suffira de discuter l'une d'elles, par exemple

$$\rho = \frac{2p\sin\omega(\sin\omega + 1)}{\cos\omega}.$$

En changeant ω en $\pi - \omega$, ρ change de signe ; donc la courbe est symétrique par rapport à Ox. Nous ferons varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, et nous prendrons la symétrique de la portion de courbe obtenue par rapport à l'axe polaire (*fig.* 1).

Pour $\omega = -\frac{\pi}{2}$, ρ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; mais on peut remarquer que $\frac{1 - \sin\omega}{\cos\omega} = \frac{1 - \sin\omega}{\sqrt{1 - \sin^2\omega}} = \sqrt{\frac{1 - \sin\omega}{1 - \sin\omega}}$, et l'on voit que ρ est nul pour $\omega = -\frac{\pi}{2}$. Quand ω varie à partir de $-\frac{\pi}{2}$, ρ demeure négatif et prend la valeur zéro pour $\omega = 0$. Ensuite, quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ρ est positif et varie de 0 à ∞.

La limite de $\rho\cos\omega$ pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ est égale à $4p$, on en conclut que l'asymptote rencontre Ox au point B d'abscisse $4p$.

Le pied de la perpendiculaire abaissée de A_1 sur MA est déterminé par les équations

$$y = mx, \qquad y = -\frac{1}{m}x + \alpha.$$

Nous aurons le lieu de ce point en éliminant m et α entre ces équations et l'équation (1), ce qui donne sans difficulté

$$y^2(x^4 + y^2)^2 - 4pa(x^2 + y^2) - 8pax^4 = 0.$$

Remplaçons a par $\frac{p}{2}$ et passons en coordonnées polaires : nous obtenons

$$\rho^2\sin^2\omega - 4p\rho\cos^2\omega - 4p^2\cos^4\omega = 0.$$

et en résolvant par rapport à ρ,

$$\rho = \frac{2p\cos^2\omega \pm 2p\cos^2\omega}{\sin^2\omega}.$$

On verra comme plus haut qu'il suffit de prendre l'un des signes. Considérons, par exemple, l'équation

$$\rho = \frac{2p\cos^2\omega(\cos\omega - 1)}{\sin^2\omega},$$

ou, en divisant haut et bas par $1 - \cos\omega$,

$$\rho = \frac{2p\cos^2\omega}{1 - \cos\omega}.$$

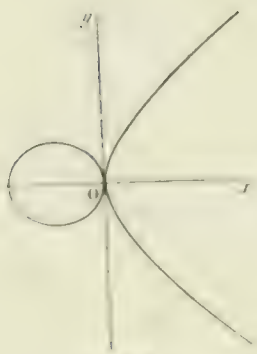


Fig. 1

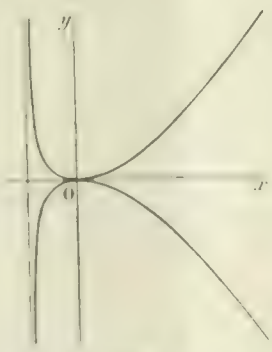


Fig. 2

En changeant ω en $-\omega$, ρ ne change pas, donc la courbe est symétrique par rapport à Ox ; nous ferons varier ω de 0 à π, et nous achèverons par symétrie.

Quand ω croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ρ varie de $-\infty$ à 0, et quand ω croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, ρ reste positif et varie de 0 à p. On voit aisément que $\rho\sin\omega$ croît indéfiniment quand ω tend vers zéro, par suite les branches infinies sont paraboliques (*fig.* 2).

Enfin les hauteurs du triangle AMA' issues des sommets M et A ont respectivement pour équations $y = \frac{x}{2}$, $y = \frac{x}{m}$. Nous en tirons $m = \frac{x}{y}$, $x = 2y$, et en portant ces valeurs dans la relation (1),

nous obtenons l'équation

$$x^4 - 2pxy^2 - 2pay^2 = 0,$$

qui représente le lieu de l'orthocentre du triangle AMA_1.

En remplaçant a par $\frac{p}{2}$, l'équation devient

$$x^4 - 2pxy^2 - p^2y^2 = 0.$$

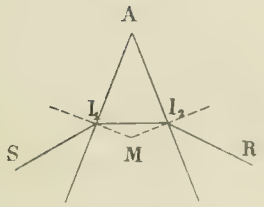
Elle représente une courbe du quatrième ordre symétrique par rapport à Ox, admettant pour asymptote la droite $2x + p = 0$, et des branches paraboliques dans la direction Oy. L'origine est un point double, et les tangentes en ce point sont confondues suivant Ox.

On construit aisément cette courbe en résolvant son équation par rapport à y (*fig.* 3).

SOULS, à Condom.

Bonnes solutions par MM. J. Marchal; Portalier et Barbaroux, à Alger.

PHYSIQUE ET CHIMIE



982. — *Démontrer que le rayon incident* SI_1 *et le rayon émergent* I_2R *sont équidistants du point* M *d'intersection des normales aux points d'incidence et d'émergence.*

(*Ecole centrale, concours de 1900, deuxième session.*)

Soient i, r, r', i' les angles d'incidence et de réfraction successifs.

La distance du point M au rayon incident SI_1 est

$$d = MI_1 \sin i,$$

celle de M à I_2R est de même

$$d' = MI_2 \sin i'.$$

Or dans le triangle MI_1I_2, on a

$$\frac{MI_1}{\sin r'} = \frac{MI_2}{\sin r}.$$

Remplaçons MI_1 et MI_2 en fonction de d et d', il vient

$$\frac{d}{d'} = \frac{\sin i}{\sin r} \cdot \frac{\sin r'}{\sin i'}.$$

On sait en outre que

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i}{\sin r'},$$

donc

$$d = d'.$$

P. THONET.

Bonnes solutions de MM. J.-D. Dufau; G. Fauvernier; J. Marchal, à Paris; L. Pegorier; P. Saintin; P. Tribier.

983. — *Calculer la chaleur de formation de l'acétylène en partant des éléments.*

La chaleur de formation de l'anhydride carbonique est **94** *calories* 3.

La chaleur de formation de l'eau est **69** *calories.*

La chaleur de combustion de l'acétylène est 315 *calories* 7.

(*École centrale, concours de 1900, deuxième session.*)

Désignons par x la chaleur de formation de l'acétylène ; on a

$$C^2 + H^2 = C^2H^2 + x.$$

D'autre part, les équations de combustion de ce gaz et de ses éléments sont

$$C^2H^2 + \frac{5}{2}O^2 = H^2O + 2CO^2 + 315{,}7,$$

$$C^2 + 2O^2 = 2CO^2 + 188{,}6,$$

$$H^2 + \frac{1}{2}O^2 = H^2O + 69.$$

Or quand un système de corps $\left(C^2 + H^2 + \frac{5}{2}O^2\right)$ subit des transformations qui l'amènent d'un état initial déterminé à un état final déterminé, la quantité de chaleur mise en jeu est indépendante des états intermédiaires. On a donc

$$x + 315{,}7 = 188{,}6 + 69, \qquad \text{d'où} \qquad x = -58{,}1.$$

Par conséquent l'acétylène, en partant du carbone diamant, a *absorbé* 58 calories,1 au moment de sa formation.

P. SAINTIN.

Bonne solution de M. T. LEMOYNE, à Troyes.

QUESTIONS PROPOSÉES

1035. — Équation générale des hyperboles équilatères tangentes en O à Ox et ayant leurs centres sur la droite $x = a$.

Par chaque point P du plan, il en passe deux. Régions du plan où doit se trouver le point P pour qu'elles soient réelles. Enveloppe des axes de ces hyperboles.

1036. — On considère dans un plan deux systèmes d'axes xOy, $x'O'y'$. Trouver un point qui ait mêmes coordonnées dans les deux systèmes. Discussion.

1037. — Deux cercles dont les centres sont fixes, A et B, varient en restant tangents extérieurement. Trouver le lieu des points de contact des tangentes communes extérieures et l'enveloppe de ces tangentes.

E. N. BARISIEN.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC, IMP. COMTE-JACQUET.

11e Année. N° 10. Juillet 1901.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

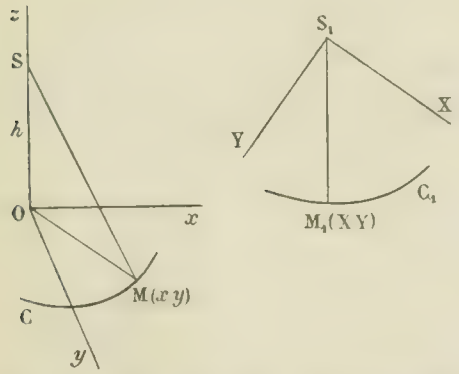
PREMIÈRE PARTIE

SUR LES POINTS D'INFLEXION DANS LE DÉVELOPPEMENT DE LA SECTION PLANE D'UN CONE OU D'UN CYLINDRE

par M. **Spinnler**, professeur au lycée Hoche

Une méthode analogue à celle qui suit a déjà été donnée dans cette Revue. Cependant nous la présentons d'une façon un peu différente et nous l'appliquons au cas du cylindre en la modifiant légèrement.

Cas du cône. — Rapportons le cône à trois axes rectangulaires : Oz perpendiculaire au plan sécant passant par le sommet S, Ox et Oy rectangulaires passant par O dans le plan sécant. Soit M un point de coordonnées x, y appartenant à la section C et h la hauteur OS.



Rapportons maintenant le développement C_1 à deux axes rectangulaires quelconques passant par S_1 transformé du point S et soient X, Y les coordonnées de M_1 transformé de M.

Nous admettrons que la longueur des arcs se conserve dans le développement et qu'en regardant x et y, coordonnées d'un point d'une courbe, comme fonctions d'un paramètre t, la dérivée de la longueur de l'arc par rapport à t, est $x_t'^2 + y_t'^2$ ou simplement $x'^2 + y'^2$.

Nous aurons les deux relations :

$$X^2 + Y^2 = x^2 + y^2 + h^2, \tag{1}$$

$$X'^2 + Y'^2 = x'^2 + y'^2 \tag{2}$$

qui expriment : la première que $SM = S_1M_1$, la seconde que les dérivées des arcs correspondants de la section C et de la transformée C_1 sont égales.

Dérivons (1) deux fois de suite ; on a successivement :

$$XX' + YY' = xx' + yy', \tag{3}$$

$$XX'' + YY'' = xx'' + yy''; \tag{4}$$

pour la seconde, on tient compte de (2).

En dérivant (2), on a, d'autre part,

$$X'X'' + Y'Y'' = x'x'' + y'y''; \tag{5}$$

tirant X″ et Y″ de (4) et (5), on conclut que

$$Y''_{X^2} = \frac{XY' - Y'X'}{X'^3} = \frac{-(X'^2 + Y'^2)(xx'' + yy'') + (XX' + YY')(x'x'' + y'y'')}{X'(XY'' - YX'')}.$$

Mais à cause de (2) et (3), le numérateur se transforme et on trouve finalement

$$Y''_{x^2} = \frac{(xy' - yx')(x'y' - y'x')}{X'^3(XY - YX')},$$

qui peut s'écrire

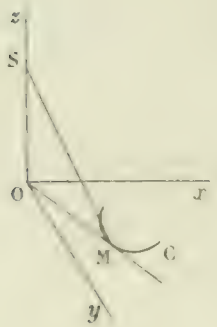
$$(6) \qquad Y''_{x^2} = \frac{x^2 \cdot x'^3 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x \cdot y''_{x^2}}{X^2 \cdot X'^3 \left(\frac{Y}{X}\right)'_x}.$$

Nous pouvons toujours supposer les axes Ox, Oy et S_1X, S_1Y choisis de telle sorte que pour les points M et M_1 les tangentes ne soient pas parallèles à Oy et S_1Y, c'est-à-dire $x'^3X'^3 \neq 0$, sans quoi l'on ne pourrait plus définir les concavités par rapport à Oy et à S_1Y. Nous remarquerons de plus que le développement de la surface latérale du cône s'effectuant sur le plan XY toujours dans le même sens, $\frac{Y}{X}$ variera toujours dans le même sens dans les intervalles où il est continu, par exemple il croîtra toujours. Par suite $\left(\frac{Y}{X}\right)'_x$ sera toujours de même signe, positif par exemple.

De sorte que Y''_{x^2} ne pourra changer de signe pour le point M_1 que parce que $\left(\frac{y}{x}\right)'_x$ ou y''_{x^2} changeront de signe. Puis nous considérerons plusieurs cas :

I. — Le pied M de la génératrice n'est pas en O. — Ce cas se subdivise en trois autres :

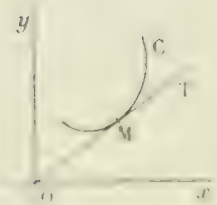
1° $\left(\frac{y}{x}\right)'_x$ *s'annule en changeant de signe, mais* $y''_{x^2} \neq 0$. — Alors M n'est pas un point d'inflexion, et $\frac{y}{x}$ passant par un maximum ou minimum, la tangente en M passe par O et *le plan tangent* SOM *est perpendiculaire au plan sécant.*

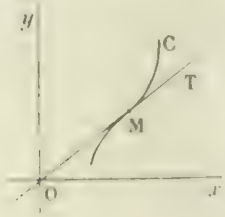


Y''_{x^2} s'annule en changeant de signe ; donc le développement présentera un point d'inflexion au point M_1.

2° y''_{x^2} *s'annule avec changement de signe, mais* $\left(\frac{y}{x}\right)'_x \neq 0$. — M est un point d'inflexion de la section, pour lequel le plan tangent n'est pas perpendiculaire au plan sécant. Il y aura encore changement de signe pour Y''_{x^2}, donc inflexion en M_1.

3° y''_{x^2} *et* $\left(\frac{y}{x}\right)'_x$ *s'annulent en même temps.* — La tangente passe à l'origine et le plan tangent est perpendiculaire au plan sécant.



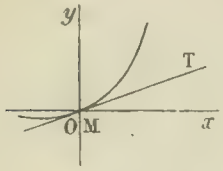


Mais un seul des deux facteurs y''_{x^2} ou $\left(\frac{y}{x}\right)'_x$ change de signe ; car s'il n'y a pas inflexion, $\frac{y}{x}$ passe par un maximum ou un minimum, donc y''_{x^2} conserve un signe constant tandis que $\left(\frac{y}{x}\right)'_x$ change de signe ; s'il y a inflexion en M, $\frac{y}{x}$ ne passe ni par un maximum ni par un minimum et c'est l'inverse du premier cas.

Donc Y''_{x^2} s'annule avec changement de signe et il y aura inflexion en M_1.

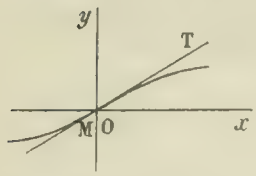
CONCLUSION. — *Si la génératrice* SM *n'est pas perpendiculaire au plan sécant, pour qu'il y ait inflexion en* M_1 *au développement, il faut et il suffit, ou bien que le plan tangent soit perpendiculaire au plan sécant, ou bien que* M *soit un point d'inflexion de la section.*

II. — La génératrice SM est perpendiculaire au plan sécant. — Ce cas se subdivise en deux :



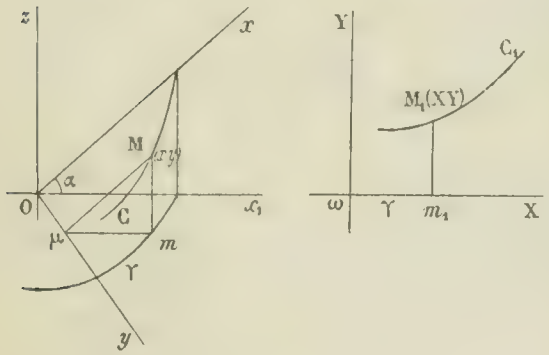
1° *Le point M confondu avec O n'est pas un point d'inflexion.* — $\frac{y}{x}$ varie dans le même sens dans le voisinage de l'origine ; donc $\left(\frac{y}{x}\right)'_t$ conserve un signe constant ainsi que x^2 et y''_{x^2} ; donc Y''_{X^2} conserve un signe constant ; pas d'inflexion pour le développement au point M_1 ;

2° *Le point M confondu avec O est un point d'inflexion.* — $\frac{y}{x}$ passe par un maximum ou un minimum ; $\left(\frac{y}{x}\right)'_t$ change de signe, mais il en est de même de y''_{x^2} ; donc Y''_{X^2} ne change pas de signe et il n'y aura pas d'inflexion en M_1.



Conclusions générales. — *Pour qu'un point M de la section plane donne une inflexion dans le développement, il faut et il suffit, ou bien que ce point M soit lui-même un point d'inflexion, ou bien que le plan tangent en M soit perpendiculaire au plan sécant, mais dans les deux cas la génératrice SM n'étant pas perpendiculaire au plan sécant.*

Cas du cylindre. — On se contente généralement de regarder ce cas comme limite de celui du cône, sans prouver, ce qui n'est rien moins que démontré, qu'on a le droit de le faire. Voici une méthode directe :



Prenons pour plan des x_1y un plan de section droite, γ étant la longueur de l'arc de cette section droite ; pour plan des x_1z un plan perpendiculaire au plan sécant et au plan de section droite ; supposons la section plane C rapportée aux axes xOy et son développement C_1 rapporté aux axes ωY parallèle aux génératrices et ωX développement de la section droite, ω étant le développement de l'origine des arcs γ, par exemple.

Les arcs se conservant, on aura

(7) $$X = \gamma, \quad \text{d'où} \quad X' = \gamma', \quad X'' = \gamma''$$

avec $\gamma'^2 = x_1'^2 + y'^2$; mais $x_1 = x \cos\alpha$; donc

(8) $$\gamma'^2 = x'^2 \cos^2\alpha + y'^2.$$

De même, $Y = Z = x \sin\alpha$, d'où $Y' = x' \sin\alpha$,

(9) $$Y'' = x'' \sin\alpha.$$

On en déduit

(10) $$X'Y'' - Y'X'' = (\gamma' x'' - x'\gamma'') \sin\alpha.$$

Égalons les dérivées des deux membres de (8), on a $\gamma'\gamma'' = x'x'' \cos^2\alpha + y'y''$.

Tirant γ'', portant dans (10), réduisant au même dénominateur et remplaçant γ'^2 par sa valeur tirée de (8), nous obtiendrons

(11) $$X'Y'' - Y'X'' = \frac{(y'x'y'' - y''x'y') \sin\alpha}{\gamma'},$$

qui peut s'écrire encore facilement sous la forme

(12) $$Y''_{X^2} = -\frac{x_1'^2 y_1' y_1''^2 \sin\alpha}{X_1'^3 \gamma_1}.$$

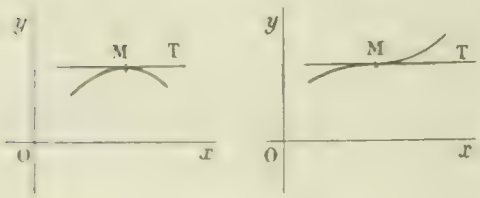
Comme pour le cône, on remarquera que y_x conserve un signe constant si l'on développe toujours la surface latérale du cylindre dans le même sens, et que $x_x X_x$ ne s'annulent pas, sans quoi on ne pourrait plus définir la concavité par rapport à Oy.

Le cas particulier où X_x serait nul correspondrait au cas, que nous laissons de côté, où la section serait tangente à la génératrice, le plan sécant serait parallèle à ces génératrices et donnerait des droites. Enfin le cas où la génératrice serait perpendiculaire au plan sécant devra être écarté également, parce que la section plane serait une section droite et se développerait suivant une ligne droite. Nous sommes ramenés à une discussion semblable à celle du cône :

1° $y_x \neq 0$, *mais y_x s'annule avec changement de signe.* — La section C a un point d'inflexion en M, le développement en aura aussi un en M_1 car Y_{x_1} s'annulera avec changement de signe. Remarquons que y_x étant $\neq 0$, la tangente en M n'est pas parallèle à Ox et le plan tangent n'est pas perpendiculaire au plan sécant ;

2° *y_x s'annule avec changement de signe, mais $y_x \neq 0$.* — M est un point ordinaire pour lequel le plan tangent est perpendiculaire au plan sécant ; il y aura inflexion en M_1 ;

3° *y_x et y_x s'annulent simultanément.* — On voit comme pour le cône qu'un seul des deux facteurs s'annule avec changement de signe, puisqu'il y a maximum ou non pour y suivant qu'il n'y a pas ou qu'il y a inflexion.



Donc il y aura inflexion en M_1 pour le développement.

Conclusion. — *Pour qu'un point M de la section plane d'un cylindre donne une inflexion dans le développement, il faut et il suffit, ou bien que le point M soit lui-même un point d'inflexion de la section, ou bien que le plan tangent en M soit perpendiculaire au plan sécant.*

Remarque I. — On a laissé de côté dans tout ce qui précède les cas où la section plane présenterait des singularités telles que point double, point de rebroussement, etc.

Remarque II. — Nous ne nous sommes occupés que de la recherche des points d'inflexion dans le développement, sans comparer la concavité de la section et de son développement aux points correspondants. Nous laisserons aux lecteurs le soin de faire eux-mêmes cette comparaison rendue très facile au moyen des formules (6) pour le cône et (12) pour le cylindre.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

957. — *Étant donnés trois cercles de l'espace situés dans trois plans différents P, P_1, P_2, on demande :*

1° S'il existe des cercles C' tels que par chacun d'eux et chacun des cercles donnés, il passe une sphère ; et dans quel cas il y a une infinité de tels cercles.

2° Trouver alors le lieu des axes, l'enveloppe des plans et le lieu des centres de ces cercles.

3° Trouver le lieu de ces cercles. C'est une surface Σ qui porte deux systèmes de cercles, dont les plans passent tous par un même point et tels que chacun de ces cercles coupe en deux points tous ceux de l'autre système.

Étudier les divers modes de dégénérescence du trièdre PP_1P_2.

I. — *Les trois plans P, P_1, P_2 forment un véritable trièdre.*

1. Prenons pour origine le sommet O de ce trièdre.

Les trois cercles donnés C, C_1, C_2 sont définis par trois couples d'équations de la forme

$$C \begin{cases} S = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + h = 0, \\ P = ux + vy + wz = 0, \end{cases} \qquad C_1 \begin{cases} S_1 = 0, \\ P_1 = 0, \end{cases} \qquad C_2 \begin{cases} S_2 = 0, \\ P_2 = 0, \end{cases}$$

et, puisque les trois plans forment un trièdre,

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Trois sphères σ, σ_1, σ_2 passant respectivement par C, C_1, C_2 ont pour équations ;

$$\sigma \equiv S + \lambda P = 0, \qquad \sigma_1 \equiv S_1 + \lambda_1 P_1 = 0, \qquad \sigma_2 \equiv S_2 + \lambda_2 P_2 = 0 ;$$

pour exprimer que ces trois sphères contiennent un même cercle, écrivons qu'elles ont même plan radical, c'est-à-dire que les deux plans

$$\sigma - \sigma_1 = 0, \qquad \sigma - \sigma_2 = 0,$$

se confondent. Nous obtenons ainsi les équations

$$(1) \qquad \frac{\alpha - \alpha_1 + \lambda u - \lambda_1 u_1}{\alpha - \alpha_2 + \lambda u - \lambda_2 u_2} = \frac{\beta - \beta_1 + \lambda v - \lambda_1 v_1}{\beta - \beta_2 + \lambda v - \lambda_2 v_2} = \frac{\gamma - \gamma_1 + \lambda w - \lambda_1 w_1}{\gamma - \gamma_2 + \lambda w - \lambda_2 w_2} = \frac{h - h_1}{h - h_2}.$$

Ces trois équations équivalent à un système de trois équations linéaires en λ, λ_1, λ_2, dont le déterminant est égal à

$$\Delta' = (h - h_1)(h - h_2)(h_1 - h_2)\Delta.$$

Donc, en général, le problème admet une solution et une seule.

Pour qu'il en admette une infinité, il faut d'abord que $\Delta' = 0$, d'où

$$(h - h_1)(h - h_2)(h_1 - h_2) = 0.$$

Je dis que cette condition entraine la nullité des trois facteurs du premier membre. En effet, si l'un d'eux est nul, $(h_1 - h_2)$ par exemple, c'est que le plan radical $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$, passe à l'origine. Donc le plan $\sigma - \sigma_1 = 0$ doit y passer aussi, puisque c'est le même ; donc

$$h = h_1 = h_2.$$

Cette condition étant réalisée, les trois équations (1) se réduisent à une seulement, et il y aura indétermination. Donc la condition demandée, nécessaire et suffisante, est que le sommet du trièdre donné ait la même puissance par rapport aux trois cercles donnés.

Avant d'aller plus loin, montrons qu'on peut arriver sans calculs à cette condition. Soient σ, σ_1, σ_2 trois sphères passant respectivement par les trois cercles C, C_1, C_2, et σ', σ'_1, σ'_2 trois autres sphères analogues. Nous supposons que les trois premières ont même plan radical π et les trois autres même plan radical π'.

Les quatre sphères σ_1, σ_2, σ'_1, σ'_2 admettent six plans radicaux, qui doivent passer par un même point. Or quatre de ces plans sont P_1, P_2, π, π'. Donc les plans π, π' se coupent suivant une droite qui rencontre l'intersection des plans P_1, P_2. Cette droite rencontre de même l'intersection des plans P_1, P. Donc elle passe en O.

Le point O étant ainsi dans le plan π, sa puissance est la même par rapport aux trois sphères σ, σ_1, σ_2. Donc elle est la même par rapport aux trois cercles donnés.

2. Si deux cercles sont sur une même sphère, leurs axes se rencontrent. Donc l'axe mobile A′ du cercle mobile C′ rencontre les trois axes A, A_1, A_2 des cercles donnés. Donc il engendre l'hyperboloïde H défini par A, A_1, A_2.

Le plan P′ du cercle C′ passe en O, et est perpendiculaire à A′, c'est-à-dire perpendiculaire à une génératrice du cône asymptote de H. Donc les plans P′ forment un cône Γ de sommet O, supplémentaire du cône asymptotique de H.

Quant au lieu des centres, c'est le lieu des projections du point O sur les axes A′.

3. Entre les deux premières des équations (1), éliminons λ. Il suffit pour cela de ramener, dans chaque rapport, λ au même coefficient, puis de retrancher terme à terme. Il vient ainsi l'équation

$$\frac{A_1 w - B_1 u - \lambda_1 u_1 v - v_1 u}{A_2 v - B_2 u - \lambda_2 u_2 v - v_2 u} = \frac{(A_1 w - C_1 u) - \lambda_1 u_1 w - w_1 u)}{(A_2 w - C_2 u) - \lambda_2 u_2 w - w_2 u)}, \qquad \begin{cases} A_1 = \alpha - \alpha_1, & A_2 = \alpha - \alpha_2, \\ B_1 = \beta - \beta_1, & B_2 = \beta - \beta_2, \\ C_1 = \gamma - \gamma_1, & C_2 = \gamma - \gamma_2, \end{cases}$$

qui, mise sous forme entière, devient

$$-\Delta_1 \lambda_2 + \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \lambda_1 + \begin{vmatrix} u & v & w \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} \lambda_2 - \begin{vmatrix} u & v & w \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

relation homographique entre λ_1 et λ_2, qu'on peut mettre sous la forme

$$(\lambda_1 - \theta_1)(\lambda_2 - \theta_2) = \theta.$$

Le lieu s'obtiendra en éliminant λ_1 et λ_2 entre cette équation et celles des sphères σ_1 et σ_2

$$S_1 + \lambda_1 P_1 = 0, \qquad S_2 + \lambda_2 P_2 = 0,$$

d'où

$$(S_1 + \theta_1 P_1)(S_2 + \theta_2 P_2) = \theta P_1 P_2.$$

Nous pouvons toujours substituer à la sphère S_1 la sphère $(S_1 + \theta_1 P_1)$ qui contient le cercle C_1. Donc l'équation du lieu est de la forme

$$(\Sigma) \qquad S_1 S_2 - P_1 P_2 = 0\,;$$

le cercle mobile étant alors défini par

$$(C) \quad \begin{cases} S_1 + \lambda_1 P_1 = 0, \\ S_2 + \lambda_2 P_2 = 0, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Nous avons gardé les mêmes notations pour ne pas compliquer les écritures.

La surface Σ ainsi obtenue est du quatrième degré. Son équation montre immédiatement que le plan P_1 la coupe suivant deux cercles dont l'un est C_1. Donc elle passe par les trois cercles donnés.

De plus, le plan P' du cercle C' a pour équation

$$S_1 + \lambda_1 P_1 = S_2 + \lambda_2 P_2,$$

ou

$$P' = P_1 \lambda^2 + (S_1 - S_2)\lambda - P_2 = 0 \qquad (\lambda = \lambda_1).$$

Soit $\pi = S_1 - S_2 = 0$ le plan radical de S_1, S_2. P' enveloppe la surface

$$\Gamma = \pi^2 - 4P_1 P_2 = 0$$

qui est un cône du second degré puisque les trois plans π, P_1, P_2 passent en O, comme nous l'avons déjà trouvé.

Quelle est la nature de l'intersection du plan P' avec la surface Σ? Entre les équations de P' et de Σ, éliminons S_2. Il vient l'équation

$$(\lambda S_1 - P_2)(S_1 + \lambda P_1) = 0,$$

qui représente deux sphères. Donc le plan P' coupe la surface suivant deux cercles, dont les équations s'obtiennent aisément, et sont

$$C \quad \begin{cases} S_1 + \lambda P_1 = 0, \\ \lambda S_1 + P_2 = 0; \end{cases} \qquad C \quad \begin{cases} \lambda S_1 - P_2 = 0, \\ S_2 - \lambda P_1 = 0; \end{cases}$$

le premier est un des cercles de la question. Le second appartient à un système différent dont font partie les trois proposés.

Soit une sphère quelconque passant par le cercle C',

$$(S_1 + \lambda P_1) + \mu(\lambda S_2 + P_2) = 0\,;$$

l'élimination de S_2 entre cette équation est celle de Σ donne

$$(S_1 + \lambda P_1)(S_2 + \mu P_2) = 0.$$

qui représente deux sphères. Donc notre sphère coupe Σ suivant deux cercles, dont les équations s'obtiennent aisément et sont

$$\begin{cases} S_1 + \lambda P_1 = 0, \\ \lambda S_2 + P_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} S_1 + \mu P_2 = 0, \\ P_1 + \mu S_2 = 0; \end{cases}$$

le premier est un des cercles de la question, le second est un cercle quelconque de la série C. Donc le cercle C′ coupe tous ceux du système C.

D'ailleurs les plans P, P′ de nos cercles passent tous en O. La propriété énoncée de la surface Σ est ainsi établie, et nous voyons de plus que cette surface est anallagmatique par rapport au point O, puisque ce point a même puissance par rapport à tous nos cercles.

Les deux cercles C, C′ du plan P′ se coupent en deux points m, m' alignés sur le point O et réciproques l'un de l'autre. En chacun de ces points le plan tangent à Σ contient les deux tangentes à C et C′, donc ce plan tangent est justement P′. Donc le cône Γ est doublement circonscrit à la surface. Il est intéressant de trouver la courbe de contact, lieu des points m, m'. Elle s'obtient par l'élimination de λ entre les équations C et C′. De

$$S_1 + \lambda P_1 = 0, \qquad S_2 - \lambda P_1 = 0,$$

on déduit

$$S_1 + S_2 = 0.$$

Donc notre lieu est l'intersection du cône Γ et d'une sphère.

En résumé, la surface présente la plus grande analogie avec l'hyperboloïde H.

Les génératrices de H sont les axes des deux systèmes de cercles, de Σ, et de même qu'une génératrice d'un système de H coupe toutes celles de l'autre, un cercle d'un système de Σ détermine une sphère avec tous ceux de l'autre système.

Cas particuliers : les trois cercles se coupent en O. — Une inversion autour de O les transforme en trois droites qui définissent un hyperboloïde H′. La surface Σ est alors la transformée par inversion de H′ : les deux systèmes de cercles sont les transformées des deux systèmes de génératrices. Le point O est un point conique de Σ : le cône des plans tangents étant le cône circonscrit à H′ de sommet O. Les plans de nos cercles enveloppent ce même cône.

II. — *Les plans* P, P_1, P_2 *forment un prisme.*

Remarquons d'abord que ce cas n'est qu'un cas particulier du précédent, et en second lieu que l'un peut se ramener à l'autre : en effet, nos trois cercles du premier cas sont orthogonaux à une même sphère de sommet O. Prenons pour pôle d'inversion un point quelconque de cette sphère : elle se transformera en un plan, auquel les trois cercles transformés seront orthogonaux. Autrement dit, les plans de ces trois cercles seront perpendiculaires à un même plan, contenant les centres des trois cercles.

Mais traitons directement la question : Prenons pour axe des z une droite parallèle aux arêtes du prisme. Soient

$$(C) \begin{cases} S = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + h = 0, \\ P = ux + vy + r = 0; \end{cases} \qquad (C_1) \begin{cases} S_1 = 0, \\ P_1 = 0; \end{cases} \qquad (C_2) \begin{cases} S_2 = 0, \\ P_2 = 0; \end{cases}$$

les équations des trois cercles donnés. On a

$$\sigma = S + \lambda P, \qquad \sigma_1 = S_1 + \lambda_1 P_1, \qquad \sigma_2 = S_2 + \lambda_2 P_2;$$

l'identification des plans $\sigma - \sigma_1 = 0$, $\sigma - \sigma_2 = 0$ conduit à trois équations analogues aux équations (1) et on trouve aisément que la condition d'existence d'une infinité de cercles C′ est

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2,$$

c'est-à-dire que le plan des centres des trois cercles est normal aux arêtes du prisme.

Prenons ce plan pour plan des xy, c'est-à-dire $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

L'équation qui lie λ_1, λ_2 est toujours une équation homographique, contenant un terme en $\lambda_1\lambda_2$, de

sorte, en fin de compte, que les équations d'un cercle mobile sont

$$C \begin{cases} S_1 + \lambda_1 P_1 = 0, \\ S_2 - \lambda_2 P_2 = 0, \end{cases} \qquad \lambda_1 \lambda_2 = 1$$

$$\Sigma = S_1 S_2 - P_1 P_2 = 0.$$

Soit

$$\pi = (\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)y + h_1 - h_2 = S_1 - S_2 = 0$$

le plan radical des sphères S_1, S_2. L'équation du plan P' du cercle C' est

$$S_1 - S_2 + \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 = (h_1 - h_2 + \ldots) + \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 = 0.$$

Il est parallèle à l'axe des z, et il enveloppe la surface

$$\Gamma = \pi^2 - 4P_1 P_2 = 0,$$

qui est un cylindre, puisque tous les plans π, P_1, P_2 sont parallèles à l'axe des z.

Ce plan P' coupe la surface suivant deux cercles C, C' comme dans le cas I.

Prenons pour origine le point de rencontre des axes A_1, A_2 : on pourra supposer alors

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0,$$

pour simplifier les équations : on trouve alors aisément que les axes des cercles C, C' ont pour équation dans le plan $z = 0$,

$$A = (v_1 x - u_1 y)\lambda^2 \pm \frac{u_1 v_2 - v_1 u_2}{2}\lambda + (u_2 y - v_2 x) = 0;$$

ce sont donc les tangentes parallèles à une même conique

$$H = 4(v_1 x - u_1 y)(v_2 x - u_2 y) + \left(\frac{u_1 v_2 - v_1 u_2}{2}\right)^2 = 0;$$

la conique H remplace ici l'hyperboloïde du premier cas.

Le lieu du centre de nos cercles est, dans le plan $z = 0$, le lieu des points de rencontre de la tangente A' à la conique H et de la tangente perpendiculaire à A'

$$P_1 \lambda^2 + (h_1 - h_2)\lambda - P_2 = 0,$$

à la conique H ; ce lieu est une courbe du quatrième degré, dont l'équation est de la forme

$$(x^2 + y^2)^2 = k^2 (x \cos\alpha + y \sin\alpha)(x \cos\beta + y \sin\beta).$$

C'est la transformée par inversion de l'hyperbole

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - (x \cos\beta + y \sin\beta) = k^2,$$

par rapport à son centre.

III. — *Les plans* P, P_1, P_2 *se coupent suivant une même droite* Δ *à distance finie.*

Prenons cette droite pour axe des z. Nous ne recommencerons pas tous les calculs précédents. On trouve qu'il faut qu'il existe sur Δ un point O d'égale puissance par rapport aux trois cercles. Prenons ce point pour origine. On a

$$S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + h = 0, \qquad S_2 = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + h,$$

$$P = ax + by = 0, \qquad P_2 = u_2 x + v_2 y;$$

les équations du cercle mobile peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{cases} S_1 + \lambda_1 P_1 = 0, \\ S_2 - \lambda_2 P = 0, \end{cases}$$

λ_1, λ_2 étant liés par une relation homographique qui ne contient plus de terme en $\lambda_1\lambda_2$ et qu'on peut ramener à

$$\lambda_1 = \lambda_2 :$$

la surface Σ a pour équation $$S_1P_2 - P_1S_2 = 0 ;$$
elle n'est plus que du troisième ordre.

Les axes des deux systèmes de cercles sont les deux systèmes de génératrices du paraboloïde défini par les trois axes des cercles donnés : ces trois axes sont en effet parallèles à un même plan normal à Δ.

Les plans des cercles C passent tous par la droite Δ. Les plans des cercles C′ passent par la droite Δ' menée par O perpendiculairement au second plan directeur de notre paraboloïde.

La surface contient deux droites Δ, Δ'. Tout plan passant par l'une de ces droites la coupe suivant un cercle et suivant cette droite. Le plan $\Delta\Delta'$ la coupe suivant Δ, Δ' et une droite à l'infini.

Enfin les deux systèmes de cercles sont représentés par les équations

$$(C') \begin{cases} S_1 - \lambda P_1 = 0, \\ S_2 + \lambda P_2 = 0, \end{cases} \qquad (C) \begin{cases} S_1 + \mu S_2 = 0, \\ P_1 + \mu P_2 = 0. \end{cases}$$

Cas particulier : les trois cercles se coupent en O. — La surface est alors la transformée par inversion autour du point O d'un paraboloïde.

IV. — *Les plans* P, P_1, P_2 *sont parallèles.*

On trouve que la condition d'existence de nos cercles est que le plan de leurs centres soit perpendiculaire aux plans P, P_1, P_2.

Prenons ce plan des centres pour plan des xy, les cercles C, C_1, C_2 étant données par les équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + h = 0, \\ y = p, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_1 x + h_1 = 0, \\ y = p_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_2 x + h_2 = 0, \\ y = p_2. \end{cases}$$

Nous nous bornerons à énoncer les résultats, les calculs étant fort simples.

L'équation de la surface Σ est

$$(\alpha_2 - \alpha)(y - p_2)[(p_1 - p)S_1 + (h_1 - h)(y - p_1)] = (\alpha_1 - \alpha)(y - p_1)[(p_2 - p)S_2 + (h_2 - h)(y - p_2)]$$

Les plans des cercles C sont tous parallèles au plan P. Leurs centres sont sur l'hyperbole équilatère qui contient les centres des trois cercles donnés et dont une asymptote est perpendiculaire au plan P.

Les plans des cercles C′ sont tous normaux au plan P et passent par une droite fixe.

Leurs axes passent par un point fixe. Leurs centres décrivent une circonférence.

Remarquons de plus que ce cas IV n'est qu'un cas particulier du cas III auquel on peut le ramener par une inversion.

Prenons en effet pour pôle d'inversion un des points d'intersection de la sphère orthogonale aux trois cercles avec la droite commune aux trois plans. Nous obtenons trois cercles orthogonaux à un même plan, dans trois plans passant par une même droite perpendiculaire à ce plan, figure un peu plus générale que celle du cas IV, et qui est justement celle que forment les cercles C′ de ce cas.

Remarque. — On peut encore imaginer d'autres cas particuliers, relatifs aux cas où les axes des trois cercles donnés ont un point commun, sont dans un même plan, etc. Nous ne les examinerons pas.

L. BICKART.

Bonne solution géométrique : M. M. Fréchet. Le manque de place seul nous oblige à ne pas publier cette solution.

PHYSIQUE

THÉORIE DE LA BALANCE

par M. **G. Fontené**, professeur au Collège Rollin.

I. *Définition du centre de gravité fictif.* — Soient ω l'axe de rotation du fléau, A et B les points de suspension des plateaux, G le centre de gravité du fléau, π son poids, p et p' les poids des plateaux. Les charges des plateaux étant P et $P+\delta$, lorsque l'équilibre est atteint, les résultantes $p+P$ et $p'+(P+\delta)$ passent en A et B ; rien n'est donc changé si l'on suppose les masses des plateaux transportées en ces points, ainsi que les masses mises sur les plateaux. Je considèrerai le point G_1, centre de masse du système formé par le fléau et par des masses égales à celles des plateaux placées respectivement en A et B. Tout se passe comme si en ce point G_1 était appliquée la force $\pi_1 = \pi + p + p'$, les forces P et $P+\delta$ étant de plus appliquées en A et B.

Fig. 1.

II. *Justesse.* — Appelons position normale du fléau celle qu'il prend quand les plateaux sont vides et pour laquelle nous supposons l'aiguille au zéro. Le point G_1 est alors dans le plan vertical passant par l'axe de suspension.

Nous dirons qu'*une balance est juste si le fléau conserve sa position normale pour deux masses égales mises dans les plateaux*. Les poids de ces masses, appliquées respectivement en A et B, ne devant pas modifier la position du fléau, *une balance est juste si le plan* ωG_1 *passe au milieu* M *de* AB. Une seule expérience suffit pour en décider.

III. *Sensibilité d'une balance juste.* — Supposons la condition de justesse remplie. Supposons aussi, pour simplifier l'exposition, les points A, B et G_1 situés dans un plan perpendiculaire à l'axe de suspension en O comme dans la figure 1.

Appliquons en A un poids P, en B un poids $P+\delta$. Le fléau s'incline d'un angle x. Les forces qui agissent sont, si l'on veut, 2P en M, δ en B, π_1 en G_1.

1° Pour que l'influence de P soit nulle et que la déviation dépende uniquement de la surcharge δ, M doit coïncider avec O. *Les trois points* A, O, B *doivent être en ligne droite*, et la condition de justesse devient $OA = OB$.

2° Pour que la grandeur de la déviation reste la même quel que soit celui des deux points A et B où est appliquée la surcharge, *il faut que la droite* AOB *soit perpendiculaire à la droite* OG. Cette droite AOB est alors horizontale dans la position normale, et, comme la surcharge est supposée assez petite pour donner une faible déviation, cette condition favorise la déviation en augmentant le moment de la surcharge ; nous reviendrons sur ce point.

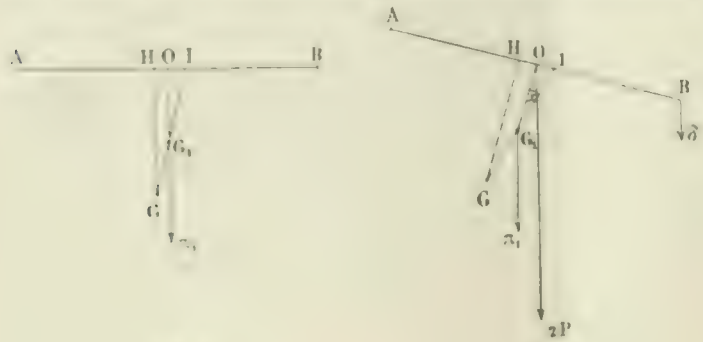


Fig. 2. Fig. 3.

Supposons ces conditions remplies. La position normale et la position inclinée sont alors représentées par les figures 2 et 3. Appelons l la longueur $OA = OB$, d_1 la distance OG ; il vient immédiatement

$$\operatorname{tg} x = \frac{l}{\pi d_1} \delta.$$

Or G_1 est le centre des forces pa-

rallèles pour la force π appliquée en G et les forces p et p' appliquées en A et B. Si donc nous appelons h la distance GH du point G à la droite AB, le théorème des moments nous permet de remplacer $\pi_1 d_1$ par πh ; nous avons ainsi

$$\operatorname{tg} x = \frac{l}{\pi h}\delta,$$

formule qu'il est aisé d'établir en considérant directement les forces π, p et p' dans la position normale, puis ces mêmes forces et la force δ dans la position inclinée (on simplifie le calcul en considérant la force $p + p'$ appliquée en I). Il y a donc intérêt à réduire h et $\frac{\pi}{l}$.

1° On fait varier h au moyen de l'écrou et l'on arrive dans la pratique à réduire cette distance à quelques centièmes de millimètre.

2° Relativement à $\frac{\pi}{l}$: si, pour fixer les idées, nous supposons le fléau prismatique, en appelant σ l'aire de sa section droite, k son poids spécifique, cette quantité devient $\frac{\sigma l \times k}{l}$, ou $\sigma \times k$; il faut donc réduire autant que possible σ et k, qui sont deux facteurs *indépendants*. Un fléau court aura, d'autre part, plus de rigidité, et permettra de maintenir, même pour de fortes charges, les points A, O, B en ligne droite. Les constructeurs font maintenant d'excellentes balances à fléau très court, en métal creux et léger.

IV. *Stabilité.* — Dès que l'on suppose les trois points A, O, B en ligne droite, la stabilité exige que le point G_1 soit au-dessous du point O dans la position normale, c'est-à-dire que le centre de gravité G du fléau soit au-dessous de la ligne AOB.

V. Remarque. — Au point de vue pratique, on peut dire qu'une balance est juste, au degré de sensibilité qu'elle comporte, si le défaut de justesse est masqué par le défaut de sensibilité. Dans les balances de précision, on arrive à une très grande sensibilité, et un très petit défaut de justesse se manifeste immédiatement. Par exemple, si dans la cage qui renferme la balance, la température est très légèrement différente pour les deux bras du fléau, on voit l'aiguille quitter le zéro. Je laisse au lecteur le soin de calculer la limite inférieure de la différence de température qui peut se révéler ainsi pour une balance donnée ; il convient d'ajouter, d'ailleurs, que les courants de convection qui se produiront dans l'atmosphère de la cage contribueront à détruire l'équilibre.

VI. Addition. — Pour bien montrer que l'hypothèse de la perpendicularité de la droite AOB sur la droite OG_1 est favorable à la sensibilité, considérons (*fig.* 4 et 5) le cas où l'angle G.OB a une valeur quelconque β, la surcharge étant supposée agir en B. La déviation x est donnée par la formule

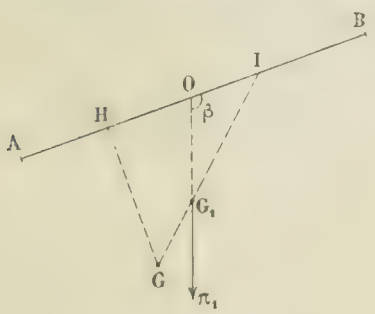


Fig. 4.

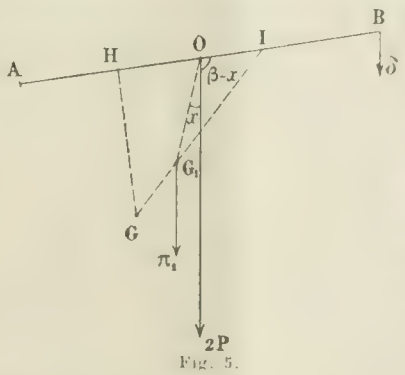


Fig. 5.

$$\delta l \sin(\beta - x) = \pi_1 d_1 \sin x,$$

d'où l'on déduit, après avoir divisé par δl,

$$\cot x = \cot \beta + \frac{\pi d_1}{\delta l \sin \beta};$$

si l'on désigne toujours par h la distance GH du centre de gravité du fléau à la ligne AOB, on a

$$\pi d_1 \sin \beta = \pi h, \quad \pi d = \frac{\pi h}{\sin \beta},$$

et l'on obtient

$$\cot x = \cot \beta + \frac{\pi h}{\delta l \sin^2 \beta},$$

résultat que l'on pourrait établir directement.

Supposons alors qu'*au moyen d'un curseur lié au fléau et mobile parallèlement à la ligne* AOB, on fasse varier l'angle β sans modifier la distance h, en déplaçant G : cela fera varier l'angle x, c'est-à-dire l'écart entre la position que l'aiguille occupe quand la surcharge existe, et la position qu'elle occuperait si les plateaux étaient vides, cette dernière position pouvant être supposée connue pour chaque position du curseur. Or, en posant

$\cot\beta = z$, on a

$$\cot x = z + \frac{\pi h}{\delta l}(1 + z^2) = \frac{\pi h}{\delta l} z^2 + z + \frac{\pi h}{\delta l}.$$

et le maximum de déviation, ou le minimum de $\cot x$, correspond à

$$z \quad \text{ou} \quad \cot\beta = -\frac{\delta l}{2\pi h}, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tg}(\beta - 1^{\text{r}}) = \frac{\delta l}{2\pi h};$$

la formule de la déviation, où l'on remplace $\frac{\pi h}{\delta l}$ par $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$, donne

$$\cot x = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{1}{2\sin\beta\cos\beta} = \frac{2\cos^2\beta - 1}{2\sin\beta\cos\beta} = \cot 2\beta,$$

ou

$$x = 2\beta - 1^{\text{r}};$$

La position du curseur qui produit le maximum de déviation, pour une surcharge déterminée, est donc celle pour laquelle cette surcharge donne à la ligne AOB *une position symétrique par rapport à l'horizon du point* O, *de celle qu'elle aurait si les plateaux étaient vides.*

Or, dans la pratique, $\frac{\delta l}{\pi h}$ est très petit; en désignant par ε l'angle dont la mesure trigonométrique est $\frac{\delta l}{\pi h}$, on a donc très sensiblement pour le maximum de déviation

$$\beta = 1^{\text{r}} - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad x = \varepsilon;$$

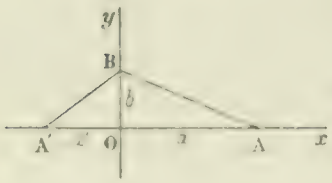
on peut remarquer que β est obtus, comme on devait le prévoir. En prenant, comme on le fait par raison de symétrie, $\beta = 1^{\text{r}}$, on s'approche beaucoup des conditions qui donnent le maximum de déviation, et comme une fonction varie lentement dans le voisinage d'un maximum, la déviation obtenue diffère extrêmement peu de la déviation maximum : la formule du paragraphe III donne en effet, pour de petites déviations, $x = \varepsilon$.

CONCOURS DE 1901 (*Suite*).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Mathématiques.

1038. — Soient Ox, Oy deux axes de coordonnées rectangulaires; soient a et a' les abscisses de deux points A et A′ de l'axe Ox, et b l'ordonnée d'un point B de l'axe Oy. On considère toutes les hyperboles équilatères (H_λ) circonscrites au triangle AA′B.



I. — Calculer les coordonnées x_1, y_1 du quatrième point M de rencontre de la circonférence circonscrite au triangle AA′B avec l'hyperbole (H_λ). Montrer qu'en désignant par λ un paramètre variable, ces coordonnées peuvent être mises sous la forme

$$x_1 = \frac{A + B\lambda}{1 + \lambda^2}, \qquad y_1 = \lambda x_1 + b,$$

et donner les valeurs des constantes A et B.

II. — Vérifier par le calcul que le diamètre de l'hyperbole qui est mené par le point M passe par un point fixe, quel que soit λ.

Le démontrer géométriquement.

III. — Trouver le lieu géométrique des points de contact des tangentes menées aux hyperboles (H_λ) parallèlement à une direction donnée, et examiner en particulier les cas où cette direction est celle des axes de coordonnées.

N. B. — Les candidats conserveront toutes les notations indiquées.

(29 mai, de 7 h. à 11 h.)

Physique et Chimie.

Physique : I. — Détermination de l'état hygrométrique de l'air à l'aide de l'hygromètre chimique.

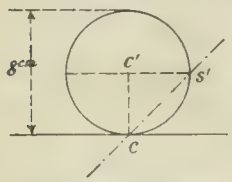
II. — Raies de Frauenhofer : indiquer en quoi elles consistent, et comment on peut les voir.

Chimie : Préparation de l'acide azotique anhydre. — Préparation de l'acide azotique dans les arts. — Purification de l'acide azotique du commerce.

Épure.

(30 mai, de 7 h. à 11 h.)

1039. — Intersection d'un cône et d'un hyperboloïde de révolution. — Le cône a pour base un cercle de front (c, c') situé dans la partie supérieure du plan vertical, tangent au plan horizontal, et qui a 8 centimètres de diamètre. Son sommet (s, s') est en avant du cercle, à une distance égale au diamètre, et sur la ligne de bout menée par le point S' le plus à droite du cercle.



Cette ligne de bout sert de génératrice à l'hyperboloïde : l'axe de révolution est la droite du plan horizontal qui est confondue avec la ligne cs' de l'épure.

Le point c' sera placé à 15 centimètres à gauche du bord droit de la feuille, et à 15 centimètres au-dessous du trait le plus bas de l'en-tête.

On demande de représenter en traits noirs la projection horizontale du solide commun au cône et à l'hyperboloïde.

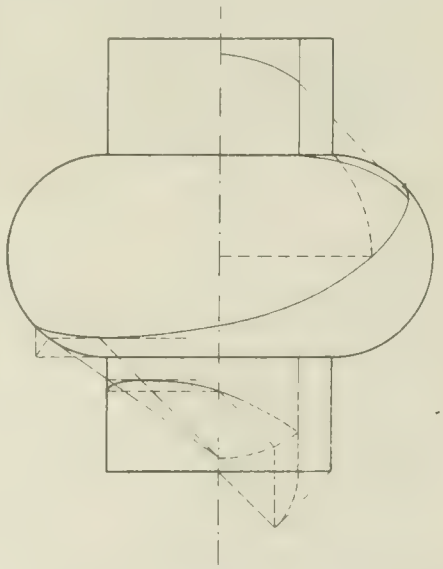
On indiquera en traits rouges les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point, ainsi que les points remarquables.

(31 mai, de 7 h. à 11 h.)

Lavis.

Exécuter à teintes fondues le lavis d'un tore à méridien circulaire traversé par un cylindre. L'axe du double solide est vertical et le cylindre a pour directrices le parallèle supérieur et le parallèle inférieur du tore.

(La figure ci-contre est une réduction au $\frac{1}{3}$ du dessin, prêt à être lavé, distribué aux candidats.)



(31 mai, de 2 h. à 4 h.)

Calcul trigonométrique.

Résolution trigonométrique de l'équation $$144x^3 - 958{,}09x + 847{,}2 = 0.$$

(31 mai, de 1 h. à 5 h.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Mathématiques.

1040. — On considère l'hyperboloïde (H) représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et les deux systèmes de génératrices rectilignes définis par les équations

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = u\left(1 + \dfrac{z}{c}\right), \\[2ex] \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{u}\left(1 - \dfrac{z}{c}\right), \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = v\left(1 - \dfrac{z}{c}\right), \\[2ex] \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{v}\left(1 + \dfrac{z}{c}\right). \end{cases}$$

A chaque système de valeurs attribuées aux paramètres u et v correspond un point de l'hyperboloïde (H), intersection des génératrices (I) et (II) ; réciproquement, à chaque point de l'hyperboloïde correspond un système de valeurs pour u et v.

Former la relation qui doit exister entre les paramètres u et v pour que le point de l'hyperboloïde qui correspond au système de valeurs u, v appartienne à l'un des conoïdes (C) représentés par l'équation

$$z = \frac{2abcxy}{(1 + mb^2x^2 + (1 - ma^2y^2}$$

où m désigne un paramètre variable. De quoi se compose l'intersection complète de l'un de ces conoïdes et de l'hyperboloïde quand $m^2 - 1$ est différent de zéro et quand $m^2 - 1$ est nul ?

Déterminer les points où la courbe (Q), commune à (H) et à l'un des conoïdes, coupe les génératrices du système (H) ; exprimer les coordonnées des points de cette courbe en fonction du paramètre v.

En combien de points la courbe (Q) rencontre-t-elle chaque génératrice du système (H) ? Déterminer le lieu décrit par le centre des moyennes distances des points situés sur une de ces génératrices, lorsque celle-ci se déplace sur l'hyperboloïde.

Démontrer qu'il existe un conoïde (C) pour lequel le plan tangent à l'hyperboloïde en chaque point de la courbe (Q) est perpendiculaire au plan déterminé par la génératrice du système (H) qui passe en ce point et par la génératrice parallèle de (H).

Distinguer, suivant la valeur du paramètre m, ceux des conoïdes (C) pour lesquels les points d'intersection d'une génératrice du système (H) et de la courbe (Q) sont tous réels, ceux pour lesquels un seul point d'intersection est toujours réel, ceux enfin pour lesquels le nombre des points réels varie avec la génératrice.

(10 juin, de 8 h. à 2 h.)

Physique.

I. — **1041**. — On imagine un œil fictif constitué par une masse d'eau $\left(n = \frac{4}{3}\right)$ limitée à sa partie postérieure par la rétine, et à sa partie antérieure par une surface sphérique de 5 millimètres de rayon, au centre de laquelle est placé un écran percé d'une ouverture circulaire de 1 millimètre de rayon concentrique à la sphère. L'axe de cette ouverture est l'axe de l'œil, et l'on considère tous les rayons lumineux utilisés comme très voisins de cet axe.

On demande tout d'abord : 1° où sont les foyers principaux de ce système optique ; 2° quelle doit être la profondeur de l'œil pour que l'image d'un objet situé à 40 mètres vienne se peindre sur la rétine ; 3° l'œil regardant ainsi à 40 mètres, quelle est la limite de petitesse des détails qu'il peut distinguer, si l'on admet que cette limite est atteinte quand l'image rétinienne n'a plus que 4 microns.

On suppose ensuite que l'œil demeure invariablement accommodé de manière à voir nettement une glace transparente placée à 40 mètres et sur laquelle se trouve une graduation en centimètres. On admet que l'observateur rapporte l'origine des impressions qu'il reçoit à des objets fictifs qu'il croit situés dans le plan de la glace transparente. On demande ce que l'observateur croit voir sur la glace dans les expériences suivantes ; et quelles sont, en centimètres, les dimensions de ces objets fictifs.

Première expérience. — On place un point lumineux à 20 mètres de l'œil.

Deuxième expérience. — On place ce point lumineux à 15 centimètres de la surface antérieure de l'œil.

Troisième expérience. — On place à 20 mètres de l'œil un carton percé d'un trou de 2 millimètres de rayon à travers lequel on reçoit la lumière provenant d'un astre dont le diamètre apparent est le $\frac{1}{100}$ de l'angle au centre qui intercepte sur la circonférence un arc de longueur égale au rayon.

Quatrième expérience. — On place ce carton à 15 centimètres.

Cinquième expérience. — On place ce carton contre l'œil.

On pourra ne pas dépasser la précision que comporte la petitesse des détails que l'œil dont il s'agit peut distinguer.

(11 juin, de 8 h. à 2 h.)

II. — Fusion de la glace.

QUESTIONS PROPOSÉES

1042. — On donne un triangle OAB, rectangle en O, et on joint un point quelconque du plan de ce triangle, P, aux deux points A et B ; puis on abaisse du point O les perpendiculaires OH, OH' sur les droites PA et PB. Soient H et H' les pieds de ces deux perpendiculaires.

1° On demande de former l'équation de la droite HH′ en fonction des données et des coordonnées du point P et de trouver le lieu du point P quand cette droite HH′ tourne autour d'un point fixe (x_0, y_0). Cette courbe engendre, quand le point P varie, un réseau qui a cinq points fixes, dont deux à l'infini.

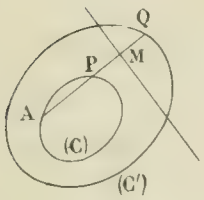
2° Montrer qu'à une droite donnée HH′ correspondent quatre points P. Établir cette propriété par le calcul et par des considérations géométriques ; former ensuite l'équation générale des coniques qui passent par ces quatre points.

3° Déterminer la droite pour laquelle toutes ces coniques sont des hyperboles équilatères Trouver l'enveloppe des droites pour lesquelles les deux paraboles du faisceau sont confondues. Ces paraboles particulières forment deux séries ; former leurs équations générales, trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les axes de ces paraboles et construire ce lieu.

E. H.

1043. — On donne deux coniques (C) et C′) ayant mêmes directions asymptotiques.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$



Par un point fixe A de (C), on mène une sécante $y = mx$, qui coupe (C) en P et (C′) en Q. Par le point M qui partage PQ dans le rapport $\frac{MP}{MQ} = \frac{p}{q}$ on mène une droite Δ dont le coefficient angulaire m' est lié à celui de la sécante par la relation

$$A + (B + \lambda)m + (B - \lambda)m' + Cmm' = 0.$$

1° Trouver l'enveloppe de Δ quand la sécante tourne autour de A.

2° Trouver le lieu des centres de cette enveloppe : *a*) quand on fait varier $\frac{p}{q}$; *b*) quand on fait varier λ. Ces lieux passent par un point fixe de C.

3° Trouver les points d'où l'on peut mener à l'enveloppe des tangentes parallèles aux directions asymptotiques communes à (C) et à (C′).

La position de l'un de ces points est indépendante de la conique (C′). Trouver le lieu de ce point : *a*) quand $\frac{p}{q}$ varie ; *b*) quand λ varie.

La position des trois autres points ne dépend que du centre de (C′). Trouver le lieu de ces trois points quand, $\frac{p}{q}$ et λ restant constants, le centre de (C′) décrit une courbe donnée $F(x,y) = 0$.

P. Valot, à Périgueux.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (Concours de 1900).

Mathématiques.

1007. — *On considère la fonction exponentielle* $y = e^{\frac{1}{x}}$, *la lettre e désignant la base des logarithmes népériens.*

1° *Étudier la loi de formation des dérivées successives de y par rapport à x et démontrer qu'en général la dérivée d'ordre n,* $\frac{d^n y}{dx^n}$, *est de la forme* $(-1)^n Q_n x^{-2n} e^{\frac{1}{x}}$, Q_n *étant un polynome de degré* $n - 1$ *en x ; trouver la relation* (I) *qui existe entre* Q_n, Q_{n-1} *et* Q'_{n-1} (Q'_{n-1} *désignant la dérivée de* Q_{n-1} *par rapport à x*).

2° *Établir une formule de récurrence entre trois polynomes Q successifs,* Q_{n-2}, Q_{n-1}, Q_n ; *on désignera cette formule par le n°* (II).

3° *Démontrer que le polynome* Q_n *n'est autre que la fonction primitive du polynome précédent* Q_{n-1}, *multipliée par une constante numérique ; formule* (III).

4° *Établir la relation identique qui existe entre le polynome* Q_n *et ses deux premières dérivées* Q'_n, Q''_n ; *formule* (IV).

5° *Démontrer par l'application du théorème de Rolle aux formules* (I) *et* (III) *ou aux formules* (III) *et* (IV) : *a) que l'un quelconque des polynomes* Q_n *a ses racines réelles et inégales ; b) que les racines d'un polynome* Q_{n-1} *séparent celles du polynome suivant* Q_n.

6° *On représente le développement du polynome* Q_n *par la formule*

$$Q_n = A_{n_1}x^{n-1} + A_{n_2}x^{n-2} + \ldots + A_{n_p}x^{n-p} + \ldots + A_{n_{n-1}}x + A_{n_n}.$$

On demande de trouver l'expression générale du coefficient A_{n_p} *et de démontrer que l'on a identiquement*

$$A_{n_p} = K_{n-p}^{n-p}\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p},$$

le symbole K_{n-p}^{n-p} *désignant le nombre des combinaisons complètes de* p *lettres* $n-p$ *à* $n-p$.

1° *Loi de formation des dérivées successives de la fonction* $y = e^{\frac{1}{x}}$. — On a

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -x^{-2}e^{\frac{1}{x}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -x^{-2} \times e^{\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2x^{-3}e^{\frac{1}{x}} = (1+2x)x^{-4}e^{\frac{1}{x}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (1-2x)x^{-4} \times e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - x^{-4}(4x + 6x^2)e^{\frac{1}{x}} = -(1+6x+6x^2)x^{-6}e^{\frac{1}{x}}.$$

. . . . . .

D'une façon générale, admettons que l'on ait

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}Q_{n-1}x^{-2n+1}e^{\frac{1}{x}},$$

Q_{n-1} étant un polynome de degré $n-2$ en x ; on en déduit

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1}\left[Q_{n-1}x^{-2n+1}e^{\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - (2n-1)Q_{n-1}x^{-2n-1}e^{\frac{1}{x}} + Q'_{n-1}x^{-2n+1}e^{\frac{1}{x}}\right],$$

ou, en réduisant,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n\left[(1+2n-2x)Q_{n-1} - x^2Q'_{n-1}\right]x^{-2n}e^{\frac{1}{x}},$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^nQ_nx^{-2n}e^{\frac{1}{x}}.$$

Q_n étant un polynome de degré $n-1$ en x, savoir

$$(1) \qquad Q_n = 1 + (2n-2x)Q_{n-1} - x^2Q'_{n-1}.$$

2° *Relation entre* Q_n, Q_{n-1} *et* Q'_n. — Nous chercherons d'abord une relation entre trois dérivées successives de la fonction y. Pour cela remarquons que l'on a

$$y + x^2\frac{dy}{dx} = 0.$$

Prenons la dérivée $(n-1)^e$ du premier membre (formule de Leibnitz) ; il vient

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \left[C_{n-1}^1 2x\frac{d^ny}{dx^n} + C_{n-1}^2 2\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^2 \frac{d^n y}{dx^n} + [1 + (2n-2)x] \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + (n-1)(n-2) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = 0.$$

Remplaçant les dérivées par leurs expressions en fonction des polynomes Q, on obtient la relation demandée

(II) $$Q_n - [1 + (2n-2)x] Q_{n-1} + (n-1)(n-2) x^2 Q_{n-2} = 0.$$

3° *Montrer que* Q_n *est à une constante près la fonction primitive du polynome précédent* Q_{n-1}. — Comparant les formules (I) et (II), on trouve

$$Q'_{n-1} = (n-1)(n-2) Q_{n-2}.$$

On aurait de même

(III) $$Q'_n = n(n-1) Q_{n-1}.$$

4° *Relation identique entre* Q_n, Q'_n *et* Q''_n. — Reportons-nous à la formule (I). On a, d'après (III),

$$Q_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} Q'_n, \qquad Q'_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} Q''_n;$$

par suite,

$$Q_n - [1 + (2n-2)x] \times \frac{1}{n(n-1)} Q'_n + x^2 \frac{1}{n(n-1)} Q''_n = 0,$$

ou, en chassant le dénominateur $n(n-1)$,

(IV) $$n(n-1) Q_n - [1 + (2n-2)x] Q'_n + x^2 Q''_n = 0,$$

relation identique, d'où nous déduirons plus loin les coefficients du polynome Q_n.

5° *Séparation des racines du polynome* Q_n. — On constate que les polynomes $Q_2 = 1 + 2x$, $Q_3 = 1 + 6x + 6x^2$, ... ont leurs racines réelles et distinctes. Admettons qu'il en soit ainsi pour le polynome Q_{n-1} et désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ les $(n-2)$ racines réelles et distinctes de ce polynome ; ce sont aussi les racines de Q'_n.

Substituons dans le polynome Q_n les nombres de la suite

$$-\infty, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad +\infty.$$

On vérifie facilement que le terme du plus haut degré dans Q_n a un coefficient positif ; ce coefficient n'est autre que $n!$. Donc $Q_n(-\infty)$ a le signe de $(-1)^{n-1}$ et $Q_n(+\infty)$ a le signe $+$.

Etudions maintenant les signes de $Q_n(\alpha)$, $Q_n(\beta)$, $Q_n(\gamma)$, ... $Q_n(\lambda)$. En vertu de la relation (I), on a

$$Q_n(\alpha) = -\alpha^2 Q'_{n-1}(\alpha).$$

Tout revient donc à chercher les signes de $Q'_{n-1}(\alpha)$, $Q'_{n-1}(\beta)$, ..., $Q'_{n-1}(\lambda)$. Or on sait que x traversant la racine $x = \alpha$ du polynome Q_{n-1}, le rapport $\frac{Q'_{n-1}}{Q_{n-1}}$ passe du négatif au positif ; d'autre part, $x = \alpha$ étant racine simple, Q_{n-1} change de signe et passe du signe de $(-1)^{n-2}$ au signe de $(-1)^{n-3}$; donc $Q_{n-1}(\alpha)$ a le signe de $(-1)^{n-3}$ et $Q_n(\alpha)$ le signe contraire, c'est-à-dire le signe de $(-1)^{n-2}$.

On montrerait de même que $Q_n(\beta)$ a le signe de $(-1)^{n-3}$, $Q_n(\gamma)$ le signe de $(-1)^{n-4}$, ..., $Q_n(\lambda)$ le signe de $(-1)^{n-1-(n-2)}$ ou $(-1)^1$. En sorte que les signes des résultats de substitution des nombres de la suite

$$-\infty, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad +\infty$$

sont respectivement

$$(-1)^{n-1}, \quad (-1)^{n-2}, \quad (-1)^{n-3}, \quad (-1)^{n-4}, \quad \ldots, \quad -1, \quad +1.$$

Le polynome Q_n a donc ses $n-1$ racines réelles et distinctes et séparées par les racines de la

dérivée Q_n ou, ce qui revient au même, par les racines du polynome Q_{n-1}. On arriverait aux mêmes résultats en partant des formules (III) et (IV).

6° *Calcul des coefficients de* Q_n. — Posons

$$Q_n = A_{n_1}x^{n-1} + A_{n_2}x^{n-2} + \ldots + A_{n_p}x^{n-p} + \ldots + A_{n_{n-1}}x + A_{n_n},$$

d'où

$$Q'_n = (n-1)A_{n_1}x^{n-2} + (n-2)A_{n_2}x^{n-3} + \ldots + (n-p)A_{n_p}x^{n-p-1} + \ldots + A_{n_{n-1}},$$

$$Q''_n = (n-1)(n-2)A_{n_1}x^{n-3} + (n-2)(n-3)A_{n_2}x^{n-4} + \ldots + (n-p)(n-p-1)A_{n_p}x^{n-p-2} + \ldots + 2\,1A_{n_{n-2}}.$$

En remplaçant Q_n, Q'_n, Q''_n par leurs expressions dans la relation (IV), on obtient une identité. On constate que le coefficient de x^{n-1} s'annule de lui-même; écrivant que les coefficients des autres termes sont nuls, il vient

$$(n-1)(n-2)A_{n_1} - (2n-2)(n-p)A_{n_p} + (n-p+1)(n-p-1)A_{n_{p-1}} + (n-p)(n-p-1)A_{n_p} = 0,$$

ou, toutes réductions faites,

$$A_{n_p} = A_{n_{p-1}}\frac{n-p+1}{p(p-1)} \qquad (2 \leqq p \leqq n);$$

or, on sait que $A_{n_1} = n!$; on en déduit

$$A_{n_2} = n!\frac{n-1}{1.2} = \frac{n-1}{1}\cdot\frac{n!}{2!},$$

$$A_{n_3} = \frac{n-1}{1}\frac{n!}{2!}\cdot\frac{n-2}{2.3} = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{n!}{3!},$$

$$A_{n_4} = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{n!}{3!}\cdot\frac{n-3}{3.4} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\cdot\frac{n!}{4!},$$

. . . . . .

et en général,

$$A_{n_p} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.\ldots(p-1)}\cdot\frac{n!}{p!};$$

on remarque que

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p-1} = K_{n-1}^{p-1} = K_n^{n-p}.$$

d'où l'expression du coefficient A_{n_p}:

$$A_{n_p} = K_n^{n-p}\frac{n!}{p!}.$$

P. L.

Autre solution de M. J. Marchal.

Épure.

1008. — *Intersection de deux cônes obliques à bases circulaires ci-dessous définis.*

Soient HH' *la trace sur le plan vertical de projection d'un plan horizontal* H *et* FF' *la trace sur le plan horizontal d'un plan de front* F.

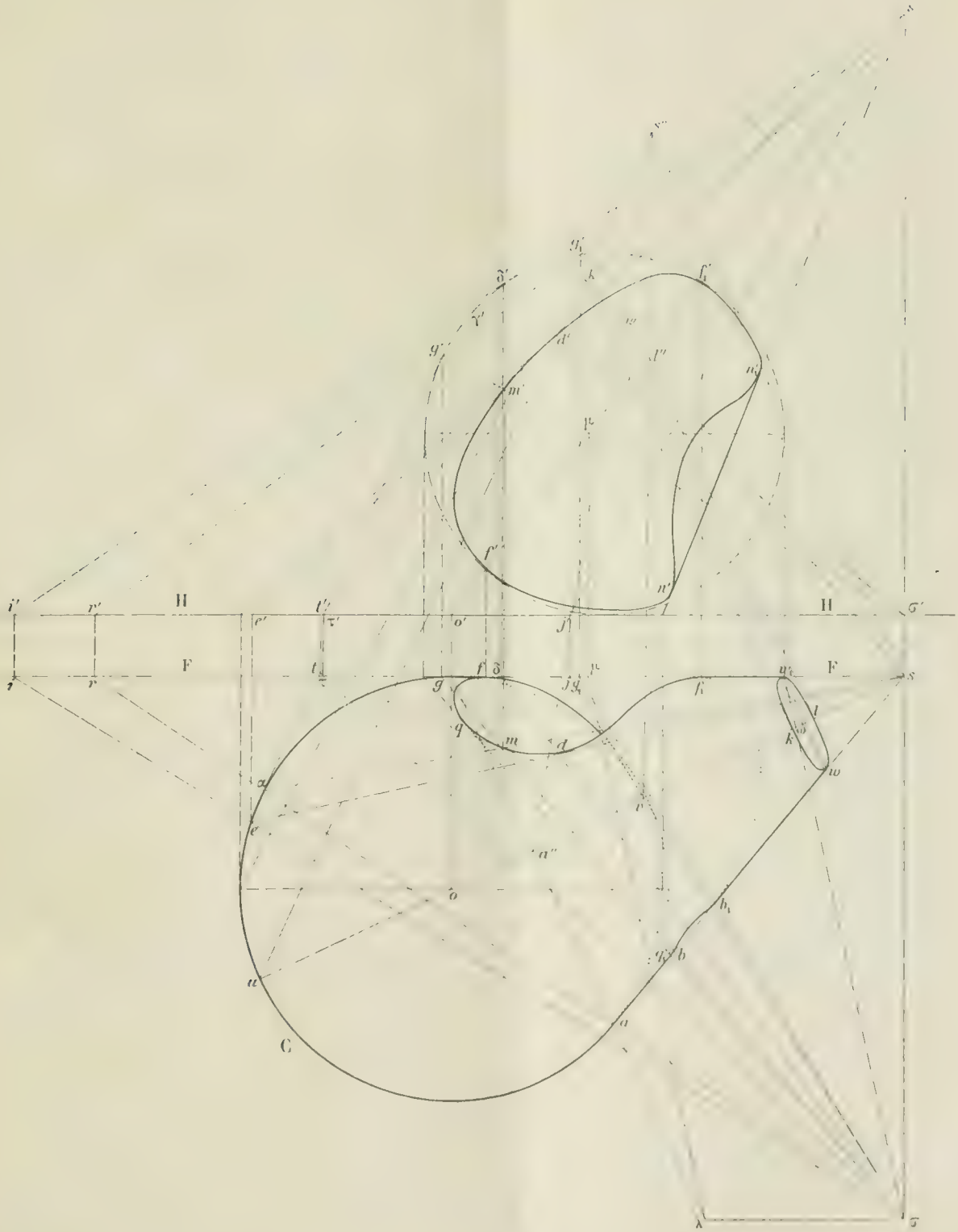
Le premier cône a son sommet (s, s') *dans le plan* F *a* $0^m,20$ *au-dessus du plan* H *ou se trouve son cercle de base* C *de* $0^m,07$ *de rayon. Le centre* O *de* C *est a* $0^m,07$ *en avant de* F *et a* $0^m,15$ *a gauche du plan de profil* P *qui contient le point* (s, s').

Le deuxième cône a pour sommet (σ, σ'), *point qui est sur l'intersection de* H *et de* P, *a* $0^m,18$ *en avant du plan* F *ou se trouve son cercle de base* γ, *dont le rayon est* $0^m,06$. *Le centre de* γ' *est a* $0^m,06$ *au-dessus du plan* H *et a* $0^m,10$ *à gauche de* P.

On demande de représenter :

1° *en projection verticale, le solide commun aux deux cônes ;*

2° *en projection horizontale, la portion du premier cône qui est extérieure au second et limitée en outre, inférieurement par le plan* H, *et supérieurement par le plan de section circulaire antiparallèle qui passe par le point* (s, s').


H
H
F
F
C

Les parties conservées seront passées à l'encre de Chine en faisant la distinction des parties vues et cachées.

On reproduira en outre à l'encre (traits continus de couleur ou traits noirs discontinus) la construction d'un point courant de l'intersection avec la tangente, ainsi que celle d'un point et d'une tangente remarquables de chaque espèce (points sur les contours apparents, points où l'intersection est tangente à une génératrice de l'un des cônes).

Les courbes seront tracées à la main sans faire usage de pistolets.

On prendra pour ligne HH *le petit axe de la feuille et on placera le point* O *à* $0^m.01$ *à gauche du grand axe.*

Détermination d'un point courant et de la tangente en ce point. — Nous emploierons, pour avoir des points de l'intersection des deux cônes, des plans auxiliaires passant par les sommets S et Σ des deux surfaces. Les traces horizontales de ces plans passeront par σ et leurs traces sur le plan de front F concourront en S en sorte que les projections verticales de ces frontales passeront par s'. Prenons un de ces plans auxiliaires défini par sa trace horizontale $(\sigma r, \sigma' r')$ et par sa frontale $(sr, s'r')$. Il coupe le cône de sommet S suivant deux génératrices projetées horizontalement en as et αs ; il coupe le cône de sommet Σ suivant les deux génératrices $(\sigma_1 y, \sigma' y')$ et $(\sigma_1 y_1, \sigma' y'_1)$ qui rencontrent les précédentes en quatre points projetés horizontalement en b, b_1, m, m_1. Faisant tourner σx autour de σ, on aura autant de points que l'on voudra de l'intersection des deux surfaces.

Déterminons la tangente en l'un (m, m') de ces points ; les traces horizontales des plans tangents aux deux cônes le long des génératrices σy et $s\alpha$ qui donnent m se rencontrent au point t, d'où la tangente $(mt, m't')$ au point (m, m') à la courbe.

Points remarquables. — Ce sont les points sur les génératrices de contour apparent des deux surfaces et ceux situés dans les plans limites. Nous avons construit en b et b_1 les points sur la génératrice de contour apparent horizontal $s\alpha$ du cône de sommet S. On aurait d'une manière analogue ceux sur les autres génératrices de contour apparent.

Les plans limites sont $(\sigma e, \sigma' e')$ et $(\sigma_1 e_1, \sigma' e'_1)$; comme ils correspondent chacun à un des cônes il y a arrachement, c'est-à-dire une seule courbe d'intersection. Nous avons construit un point (d, d') sur la génératrice limite $(se, s'e')$ et sur la génératrice $(\sigma\delta, \sigma'\delta')$. La tangente en ce point est $(se, s'e')$.

Enfin nous avons déterminé la ligne λμ des points doubles en projection horizontale ; c'est la projection horizontale de l'intersection des plans diamétraux conjugués des cordes verticales.

Section antiparallèle à la base dans le cône S. — Prenant comme plan vertical auxiliaire le plan vertical so, nous avons en $s''u$ et $s''v$ les génératrices situées dans ce plan ; le plan de section antiparallèle mené par (s, σ') est de bout dans ce nouveau système et sa trace verticale $sl''k''$ est antiparallèle à uv par rapport à l'angle $us''v$. La projection horizontale de cette section circulaire est l'ellipse de petit axe kl, de centre ω milieu de kl et dont le grand axe a pour longueur $k''l''$; nous avons obtenu en w et w_1 les points où cette ellipse touche les projections horizontales des génératrices de contour apparent horizontal du cône S en prenant le point d'intersection w'' de $s''a''$ et de $k''l''$.

Représentation du corps. — En projection horizontale nous avons représenté le cône S solide, subsistant seul, en ayant enlevé la portion contenue dans le cône Σ, en limitant ce corps au plan horizontal H et au plan de section antiparallèle.

En projection verticale on a le solide commun aux deux cônes. La visibilité est immédiate.

N. C.

Physique.

1005. — *On donne un récipient cylindrique fermé* AA' *pesant, vide,* 350^{gr} *et dont les dimensions* [illegible] *ont pour* [illegible] *hauteur* [illegible].

L'épaisseur des parois est supposée négligeable.

Ce récipient flotte dans un liquide L *dont la densité à* 0° *est* 0,61. *On a introduit dans ce récipient, après y avoir fait le vide, un poids* x *de mercure et un poids* y *d'eau, choisis de telle sorte qu'à la*

température de 100° : 1° *le système affleure exactement au niveau* A', 2° *toute l'eau soit exactement réduite en vapeur saturée.*

On demande :

1° *De calculer les quantités* x *et* y ;

2° *De calculer la hauteur* z, *comptée à partir du fond* A, *dont s'enfoncera le système pour une température quelconque* t *comprise entre* 0° *et* 100° ;

3° *D'évaluer la force qu'il faudrait appliquer, à la température de* 100°, *à un piston très mince supposé mis à la place du fond* A *pour le maintenir. On admettra que la pression est uniforme dans tout l'espace occupé par la vapeur.*

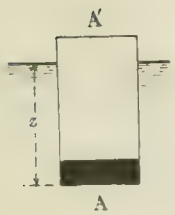
Données numériques : Densités : du mercure à 0°, 13,6 ; *de la vapeur d'eau*, 5/8.

Poids du litre d'air à 0° *et* 760^{mm}. 1^{gr},3.

Pression atmosphérique, 780^{mm}.

Coefficient de dilatation : linéaire de l'enveloppe, 0,00001 ; *cubique du mercure*, 0,00018 ; *cubique du liquide* L, $\frac{1}{6000}$; *des gaz*, 0,0036.

On prendra comme unités le centimètre et le gramme.



1° Le coefficient de dilatation cubique de l'enveloppe étant le triple du coefficient de dilatation linéaire, le volume du récipient à 100° est, en centimètres cubes, 2000 (1 + 0,003). Le volume du mercure à la même température est

$$\frac{x}{13,6}(1 + 0,018).$$

Il reste donc, pour le volume de la vapeur d'eau, la différence

$$2000(1 + 0,003) - \frac{x}{13,6}(1 + 0,018).$$

Avec ce volume, et en remarquant que la tension de la vapeur d'eau saturée à 100° est de 760^{mm}, on peut exprimer le poids y par une formule connue, ce qui donne une première équation :

$$(1) \qquad y = \left[2000(1 + 0,003) - \frac{x}{13,6}(1 + 0,018)\right]\frac{5}{8}\cdot 0,0013\,\frac{1}{1,36}.$$

D'autre part, le poids du cylindre est, en grammes, $350 + x + y$. Le poids du liquide déplacé à 100° est

$$2000(1 + 0,003)0,61 \cdot \frac{1}{1 + \frac{100}{6000}}.$$

La condition d'équilibre fournit alors la deuxième équation

$$(2) \qquad 350 + x + y = 2000(1 + 0,003)0,61 \cdot \frac{1}{1 + \frac{100}{6000}}.$$

En chassant les dénominateurs de (1) et effectuant les calculs, on trouve

$$0,0033085x + 73,984y = 88,6652,$$

et (2) peut s'écrire

$$x + y = 853,6.$$

On tire de là $x = 852^{gr},44$ et $y = 1^{gr},16$.

2° Le poids total, d'après ce qui précède, est égal à

$$350 + 852,44 + 1,16 = 1203,6.$$

Ecrivons qu'il est égal à la poussée, en tenant compte de la dilatation superficielle de la surface de base :

$$1203,6 = 100(1 + 0,00002t)^2 \cdot 0,61 \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{6000}}.$$

On tire de là, en négligeant les quantités du second ordre en t,

$$z = 19{,}731\ 1 + 0{,}000147\,t\ .$$

Comme vérification, si, dans cette formule, on fait $t = 100$, on trouve pour z la hauteur totale du cylindre, c'est-à-dire $20 \times 1{,}001$.

3° La surface du piston à 100° est

$$100\,(1 + 0{,}002)^2 = 100{,}2.$$

La force qui lui est appliquée à l'intérieur, si on néglige, conformément à l'énoncé, le poids de la vapeur d'eau, se compose du poids du mercure et de la force due à la pression de la vapeur, soit

$$p + 100.2 \times 76 \times 13.6 = 104\,419^{kr},16.$$

La force qui lui est appliquée à l'extérieur est due à la pression atmosphérique augmentée de la pression du liquide ambiant, soit

$$100.2\left[78 \times 13.6 + 20 \times 1.001 \times \frac{0.61}{1 + \frac{100}{6000}}\right] = 107\,495^{kr},76.$$

Si on suppose le poids du piston négligeable, il faudra, pour le maintenir en équilibre, une force dirigée de haut en bas et égale à la différence des deux forces précédentes, soit

$$3076^{kr},60$$

Dans ces nouvelles conditions, il faudrait, pour maintenir tout le système en équilibre, appliquer en même temps au cylindre une force égale et opposée. On retrouve en effet le même nombre, au poids de la vapeur près, en analysant les forces appliquées à la base supérieure du cylindre, savoir :

Différence des pressions extérieure et intérieure . $78 - 76\ 13.6 \times 100.2 =$	2725,44 :
Poids du cylindre.	350
Total.	3075,44
Poids de la vapeur d'eau	1,16
	3076,60

Chimie.

1006 — *Dans une solution d'iodure de potassium, on fait arriver le gaz provenant de l'action de l'acide chlorhydrique en excès sur* $0^{kr},435$ *de bioxyde de manganèse, puis on verse* 250^{cc} *d'eau de brome.*

On décolore ensuite la liqueur exactement à l'aide d'une solution d'hyposulfite de soude contenant $15^{kr},8$ *de ce sel anhydre par litre.*

Sachant qu'il a fallu employer pour cela 200^{cc} *de la solution d'hyposulfite, on demande la teneur de l'eau de brome.*

Poids atomiques — Cl = 35.5, Br = 80, I = 127, Na = 23, Mn = 55.

Si on désigne par x la fraction de molécule de bioxyde de manganèse qui entre en jeu, la première réaction est représentée par l'équation

$$x\ 4HCl + MnO^2 = MnCl^2 + 2H^2O + Cl^2\ ,$$

et l'on a $\qquad 87x = 0{,}435, \qquad$ d'où $\qquad x = 0{,}005.$

Dans les réactions suivantes, il faut supposer l'iodure de potassium en excès, sans quoi le problème ne serait pas déterminé. Elles sont alors représentées par les équations

$$x\ 2KI + Cl^2 = 2KCl + I^2\ ,$$

$$y\ 2KI + Br^2 = 2KBr + I^2\ ,$$

$$z = y\ 2S^2O^3Na^2 + I^2 = 2NaI + S^4O^6Na^2\ .$$

D'après la quantité d'hyposulfite employée, on a

$$(x+y)2 \times 158 = 200 \times 0{,}0158, \qquad \text{d'où} \qquad x - y = 0{,}01, \qquad \text{et} \qquad y = 0{,}005$$

Le poids du brome entrant en jeu est $y\mathrm{Br}^2 = 0^{gr},8$, ce qui correspond à

$3^{gr},2$ par litre d'eau de brome.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

988. — *Lieu du centre C d'un cercle qui touche un cercle donné O et coupe orthogonalement un second cercle également donné O'.*

(*Ecole des Ponts et Chaussées, Cours préparatoires, 1900.*)

Soient R et R' les rayons des cercles O et O', ρ celui du cercle C; désignons par r la longueur CO et par θ l'angle COO'.

Les cercles C et O' étant orthogonaux, on a la relation

$$\rho^2 + R'^2 = \overline{CO'}^2,$$

ou, comme $\rho = r - R$,

$$(r - R)^2 + R'^2 = \overline{CO'}^2.$$

D'autre part, dans le triangle COO',

$$\overline{CO'}^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta.$$

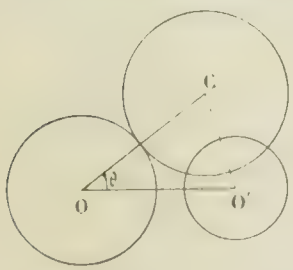
De sorte que l'équation polaire du lieu du point C est

$$(r - R)^2 + R'^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta,$$

ou

$$(1) \qquad r = \frac{R^2 + R'^2 - a^2}{2(R - a\cos\theta)}.$$

Le lieu est donc une conique ayant l'un de ses foyers en O et dont l'axe focal est OO'. Suivant que l'on a $a < R$, $a > R$ ou $a = R$, c'est-à-dire suivant que les cercles O et O' sont tels que le centre de O' est à l'intérieur du cercle O, à l'extérieur du cercle O ou bien sur le cercle O, la conique (1) est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.



Si les deux cercles O et O' sont orthogonaux, $R^2 + R'^2 = a^2$, et l'équation (1) devient $r = 0$, ou $R - a\cos\theta = 0$.

Si donc P et Q sont les points de rencontre des cercles orthogonaux O et O', le lieu du centre des cercles C se compose des deux droites OP et OQ.

On voit que les carrés des longueurs des demi-axes A et B de la conique (1) sont

$$(2) \qquad A^2 = \frac{R^2(R^2 + R'^2 - a^2)^2}{4(R^2 - a^2)^2}, \qquad B^2 = \frac{(R^2 + R'^2 - a^2)^2}{4(R^2 - a^2)}.$$

Il en résulte que la conique (1) ne peut devenir un cercle que si $a = 0$, c'est-à-dire si les cercles O et O' sont concentriques. Le lieu du centre du cercle C est alors le cercle

$$r = \frac{R^2 + R'^2}{2R}.$$

La conique (1) sera une hyperbole équilatère si $A^2 = -B^2$, c'est-à-dire si $a = R\sqrt{2}$.

E.-N. BARISIEN.

Bonnes solutions de MM. L. Pégorier, à Carcassonne; T. Lemoyne, à Troyes.

Solution géométrique. — En transformant la figure par inversion, le pôle étant en O et le module étant le carré du rayon du cercle O, on voit immédiatement que les cercles C touchent l'inverse O_1 du cercle O. Le lieu du centre C est donc une conique ayant pour foyers les points O et O_1.

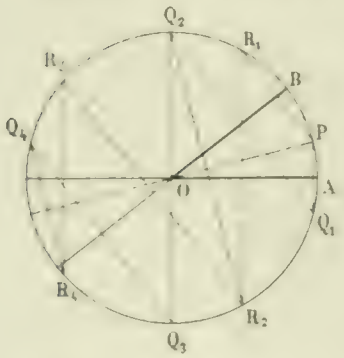
VASNIER.

Autre solution géométrique de M. T. LEMOYNE.

PHYSIQUE

996. — *Démontrer que si l'on fait tourner un système de deux miroirs plans angulaires autour de leur intersection, les images d'ordre pair, c'est-à-dire produites par un nombre pair de réflexions, restent immobiles.*

Je prends pour plan de figure le plan perpendiculaire à l'intersection O des deux miroirs OA et OB et passant par le point lumineux P. Les images de P dans ces deux miroirs sont toutes sur une circonférence décrite de O comme centre avec OP pour rayon. Je détermine leur position sur cette circonférence par la longueur de l'arc compris entre chacune de ces images et le point P.



L'image de P dans OA est Q_1, qui donnera l'image paire Q_2. Les angles PQ_1Q_2 et AOB sont égaux; donc si θ désigne l'arc compris entre les deux miroirs, on aura $PQ_2 = 2\theta$; on voit de même que $PQ_4 = 4\theta$ et, en général, la distance de l'image Q_{2n} sera $2n\theta$.

De même, si on considère les images obtenues par une première réflexion sur OB, on aura une série d'images paires dont les distances à P seront $PR_2 = 2\theta$, $PR_4 = 4\theta$, ..., $PR_{2n} = 2n\theta$.

Donc les images paires sont situées aux points d'intersection du cercle et des perpendiculaires à OP menées à partir de P et de telle sorte que les arcs interceptés par deux perpendiculaires consécutives soient égaux à 2θ. Ces points sont fixes quand les deux miroirs tournent autour de O leur angle restant constant.

J. MARCHAL.

QUESTIONS PROPOSÉES

1044. — On donne un cercle O, une tangente XD à ce cercle en un point D et l'on considère les paraboles bitangentes au cercle et dont le sommet A est sur la droite XD. Soit BC la corde des contacts de la parabole et du cercle. On demande :

1° Le lieu de l'intersection de BC avec l'axe de la parabole ;

2° Le lieu du pôle de BC ;

3° Les lieux du foyer F et de son inverse par rapport à O, la puissance d'inversion étant $\frac{R^2}{4}$.

R. GOUDIER.

1045. — Dans un triangle ABC, la base BC reste fixe et le centre I du cercle inscrit jouit de cette propriété que $IA^2 = IB.IC$. Construire les courbes lieux des points I et A.

E.-N. BARISIEN.

Le Rédacteur-Gérant H. VUIBERT.

IMPRIMERIE DU COMITÉ-JACQUET

11e Année. N° 11. Août 1901.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA RELATION ENTRE LES COEFFICIENTS DE L'ÉQUATION EN λ DE DEUX CONIQUES, L'UNE INSCRITE ET L'AUTRE CIRCONSCRITE A UN MÊME TRIANGLE

par M. **Ernest Duporcq**, Ingénieur des Télégraphes.

L'objet de cette courte note est d'indiquer un moyen d'établir très simplement la relation entre les coefficients de l'équation en λ de deux coniques C et C′, telles qu'il existe des triangles inscrits à la première et circonscrits à la seconde.

On sait, en effet, qu'il existe une conique Γ conjuguée à la fois à deux de ces triangles (puisqu'ils sont inscrits à une même conique), et il est bien évident, que C et C′ sont polaires réciproques par rapport à Γ, qui est donc nécessairement conjuguée au triangle conjugué commun à C et à C′.

Prenant ce triangle pour triangle de référence, on peut toujours écrire les équations de Γ et de C sous la forme

$$(\Gamma) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

$$(C) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, \qquad (1)$$

et l'équation de C′, polaire réciproque de C par rapport à Γ sera

$$(C') \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0. \qquad (2)$$

Il suffit d'exprimer maintenant que C′ est harmoniquement inscrite à Γ, c'est-à-dire que

$$(3) \qquad a + b + c = 0.$$

Ainsi C et C′ peuvent toujours se mettre sous les formes (1) et (2), avec la condition (3).

Or le discriminant de $C - \lambda C'$ se réduit à

$$\left(a - \frac{\lambda}{a}\right)\left(b - \frac{\lambda}{b}\right)\left(c - \frac{\lambda}{c}\right).$$

Il s'annule pour les valeurs a^2, b^2 et c^2, ce qui prouve que les racines de l'équation en λ sont les carrés de trois quantités dont la somme est nulle. Si on les désigne par α, β et γ, on en déduit aisément la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha - 2\alpha\beta = 0.$$

ou

$$\alpha + \beta + \gamma^2 - 4\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 0.$$

d'où, en écrivant l'équation en λ,

$$\Delta - \Theta\lambda + \Theta\lambda^2 - \Delta\lambda^3 = 0,$$

on déduit la relation

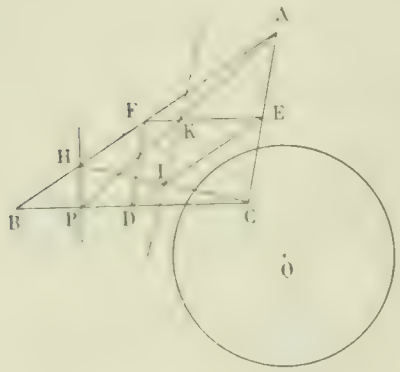
$$\Theta^2 - 4\Theta\Delta = 0$$

SUR LES CONIQUES INSCRITES DANS UN TRIANGLE

par M. **Oppermann**, à Marseille.

La somme des carrés des demi-axes d'une conique inscrite dans un triangle est égale à la puissance de son centre par rapport au cercle conjugué de ce triangle.

Soient ABC le triangle donné et O son cercle conjugué ; les tangentes issues de A au cercle O ont leurs points de contact sur BC, leurs milieux sont donc sur la parallèle à BC menée par les milieux de AB et de AC ; cette droite EF est par suite l'axe radical du cercle O et du cercle point A.



Menons HP perpendiculaire à l'un des côtés du triangle, BC, par exemple, et soit P le pied de cette perpendiculaire. Nous allons montrer que l'axe radical du cercle O et du cercle point P est la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère ACPH, les points K et I. En effet le point K est un point d'égale puissance par rapport au cercle O et au cercle point A, puisqu'il est sur EF ; il a même puissance aussi par rapport au cercle point P, puisque KA = KP. De même, le point I a même puissance par rapport au cercle O et aux deux cercles points H et P, car il est sur l'axe radical de O et de H et l'on a

$$IP = IH.$$

Supposons alors que HP soit une tangente à la conique inscrite dans le triangle ABC ; le centre de cette conique, S, est sur la droite IK. C'est donc un point d'égale puissance par rapport aux cercles O et P : or cette dernière est $\overline{SP}^2$, c'est le carré du rayon du cercle orthoptique de la conique inscrite, c'est-à-dire $a^2 + b^2$.

Comme conséquence de ce théorème, nous voyons que le *lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle et telles que la somme des carrés de leurs axes soit constante est un cercle concentrique au cercle conjugué* O.

Nous retrouvons ainsi un théorème connu.

De la théorie des faisceaux linéaires des cercles, résultent immédiatement les conséquences suivantes :

Le lieu géométrique des points tels que le rapport de leurs puissances par rapport à un cercle fixe et à un cercle point fixe aussi soit constant est un cercle du faisceau déterminé par les deux cercles donnés.

Le point fixe étant l'un des points limites du faisceau a même polaire par rapport aux deux autres cercles, et même axe radical avec chacun d'eux.

Étant donnés deux cercles quelconques, l'un d'eux est le lieu des points tels que le rapport de leurs puissances par rapport au second et à l'un ou l'autre de deux cercles points fixes soit constant.

Ces deux points sont les points limites du faisceau déterminé par les deux cercles donnés.

De là résultent immédiatement les théorèmes suivants :

Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle et que la somme des carrés de ses axes reste proportionnelle au carré de la distance de son centre à un point fixe, le lieu de ce centre est un cercle qui fait partie du faisceau déterminé par le cercle point et par le cercle conjugué au triangle.

Lorsque le centre d'une conique inscrite dans un triangle décrit un cercle, la somme des carrés des axes de cette conique reste proportionnelle au carré de la distance de ce point à un point fixe et il y a deux points qui jouissent de cette propriété.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

968. — *A une quadrique à centre (Q), on circonscrit une série de quadriques (f) ayant une direction asymptotique donnée Δ, et telles que le plan de la conique de contact passe par un point donné M.*

1° *Les surfaces (f) passent par un point fixe, et leurs centres décrivent un paraboloïde, ou un cylindre, ou un système de deux plans.*

2° *Le pôle d'un plan (Π) par rapport aux surfaces (f) décrit une quadrique, qui contient une conique (c) fixe, quel que soit le plan. Le plan (Π) étant fixe et la direction Δ variable, la quadrique varie en restant circonscrite à une autre.*

3° *Le plan polaire d'un point P_1 par rapport aux surfaces (f) reste tangent à une conique, qui est tangente à une droite fixe en un point fixe, quel que soit P_1. Sur quelle surface doit se trouver P_1 pour que cette conique soit une parabole ?*

4° *Le lieu des points de contact des plans tangents aux surfaces (f) parallèles à un plan donné est une surface du quatrième ordre qui contient la conique (c) et une droite double (δ). Le lieu des centres des coniques sections de la surface par les plans passant par (δ) est en général une cubique gauche. Dans quel cas ce lieu est-il une conique ?*

5° *Le cône asymptote d'une surface (f) coupe la quadrique (Q) suivant deux coniques dont les plans sont équidistants de M. L'enveloppe de ces plans est une surface de quatrième classe qui contient une droite double (δ'). Tout plan passant par (δ') touche la surface en deux points. Les cônes circonscrits à la surface et qui ont pour sommets les points de (δ') sont du second ordre. Trouver l'enveloppe des plans diamétraux d'une direction donnée dans ces cônes.*

Soient
$$Q \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$$
l'équation de la quadrique (Q) et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M.

L'équation générale des surfaces (f) est
$$f \equiv hQ + P^2 = 0,$$
avec
$$P \equiv ux + vy + wz + r \equiv u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0).$$

Si $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ est la direction donnée Δ, on doit avoir

(1) $$h(Al^2 + Bm^2 + Cn^2) + (ul + vm + wn)^2 = 0.$$

1° Le point de rencontre de la parallèle à Δ menée par M avec la quadrique (f) s'obtient en portant dans l'équation de cette surface les valeurs
$$x = x_0 + l\rho, \qquad y = y_0 + m\rho, \qquad z = z_0 + n\rho.$$

En tenant compte de la relation (1), on trouve ainsi
$$-2\rho(Alx_0 + Bmy_0 + Cnz_0) + Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0.$$

La valeur de ρ étant indépendante de u, v, w, le point est fixe.

Lieu des centres. — Les coordonnées du centre de (f) vérifient les équations
$$\frac{1}{2}f'_x = hAx + Pu = 0, \qquad \frac{1}{2}f'_y = hBy + Pv = 0, \qquad \frac{1}{2}f'_z = hCz + Pw = 0,$$
ce qui conduit à poser
$$\frac{u}{Ax} = \frac{v}{By} = \frac{w}{Cz} = \lambda,$$
avec (2) $$h + P\lambda = 0.$$

Si l'on porte les expressions de u, v, w dans les équations (1) et (2), on a
$$h\Sigma Al^2 + \lambda^2\Sigma Al^2 = 0, \qquad h + \lambda^2\Sigma Axl = 0.$$

l'élimination de h et de ρ^2 donne le lieu cherché

$$\Sigma A l^2 \Sigma A x(x - x_0) - (\Sigma A l x)^2 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\Sigma A l^2 . Q - (\Sigma A l x)^2 - \Sigma A l^2 . T_0 = 0.$$

$$T_0 = A x_0 x + B y_0 y + C z_0 z - 1 = 0$$

étant l'équation du plan polaire de M.

L'équation obtenue en égalant à 0 la quantité entre crochets représente le cylindre (C) circonscrit à (Q) dont les génératrices sont parallèles à Δ. Le lieu des centres est en général un paraboloïde passant par la conique (c) d'intersection du cylindre (C) avec le plan polaire de M, et par le centre de (Q).

Pour que cette quadrique soit un cylindre, les génératrices étant alors parallèles à Δ, il faut que la droite $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ soit sur la surface, ce qui exige que

$$A x_0 l + B y_0 m + C z_0 n = 0,$$

c'est-à-dire que la direction Δ soit conjuguée de la direction OM. Réciproquement, si cela a lieu, la quadrique est un cylindre, car les équations du centre

$$2\Sigma A l^2 . A x - 2\Sigma A l x . A l - \Sigma A l^2 . A x_0 = 0, \quad \text{etc.},$$

représentent trois plans passant par une même droite. En effet, en multipliant par l, m, n et ajoutant, on a un résultat identiquement nul, pourvu que $\Sigma A x_0 l = 0$.

Lorsque M est le centre de (Q), le lieu se réduit aux deux plans

$$\Sigma A B (m x - l y)^2 = 0.$$

2° Soit

$$\Pi = u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 = 0$$

le plan donné.

Les coordonnées x, y, z du pôle du plan satisfont aux relations

$$\frac{h A x + P u}{u_1} = \frac{h B y + P v}{v_1} = \frac{h C z + P w}{w_1} = \frac{-h + P r}{r_1} = \rho,$$

avec (1)

$$u x_0 + v y_0 + w z_0 + r = 0.$$

Portons dans (1) les valeurs de Pu, Pv, Pw, Pr tirées des rapports précédents; nous trouvons

$$\rho(u_1 x_0 + v_1 y_0 + w_1 z_0 + r_1) - h(A x_0 x + B y_0 y + C z_0 z - 1) = 0,$$

ou

$$\rho \Pi_0 - h T_0 = 0.$$

Nous avons d'autre part $P = u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0)$,

d'où

$$P^2 = \Sigma(x - x_0)(\rho u_1 - h A x) = \rho(\Pi - \Pi_0) - h(Q - T_0) = \rho\Pi - hQ.$$

Enfin l'équation $h\Sigma A l^2 + (\Sigma u l)^2 = 0$ peut s'écrire

$$P^2 h \Sigma A l^2 + (\Sigma u l - h \Sigma A l x)^2 = 0.$$

En remplaçant P^2 par $\rho\Pi - hQ$, et dans l'équation homogène en h et ρ ainsi obtenue, h, ρ respectivement par Π_0, T_0, on a l'équation du lieu :

$$(1) \qquad \Sigma A l^2 \Pi_0 T_0 \Pi - \Pi_0 Q + (\Sigma u l . T_0 - \Pi_0 . \Sigma A l x)^2 = 0.$$

surface du second ordre.

Lorsque le plan (Π) varie d'une manière quelconque, cette surface passe par une conique fixe. On peut en effet écrire l'équation

$$-\Pi(\Sigma A l Q - (\Sigma A l x)^2) + T_0(\Sigma u l T_0 - 2\Sigma u l \Pi_0 \Sigma A l x + \Sigma A l \Pi_0 \Pi) = 0,$$

et sous cette forme, on voit qu'elle contient la conique (c) du cylindre (C) considérée plus haut.

La première équation montre également que la surface est circonscrite à la quadrique $T_0 \Pi - \Pi_0 Q = 0$, homothétique de (Q) passant par le point M et la conique d'intersection de (Q) et du plan (Π). Cette quadrique ne dépend pas de la direction Δ.

3° Soit $$\Pi = x_1 u + y_1 v + z_1 w + r = 0,$$
l'équation tangentielle du point $P_1(x_1, y_1, z_1)$ donné.

On a, en désignant par u_1, v_1, w_1, r_1 les coordonnées du plan polaire de P_1,

$$\frac{hAx_1 + Pu}{u_1} = \frac{hBy_1 + Pv}{v_1} = \frac{hCz_1 + Pw}{w_1} = \frac{-h + Pr}{r_1} = \rho,$$

et le calcul consiste, comme au paragraphe précédent, dans l'élimination des quantités u, v, w, r, h, ρ. Il suffit donc, dans le résultat déjà trouvé, de remplacer x, y, z par x_1, y_1, z_1, coordonnées de P_1, et u_1, v_1, w_1, r_1 par les coordonnées tangentielles courantes u, v, w, r, pour avoir l'équation tangentielle de l'enveloppe des plans polaires :

$$\Sigma Al^2 P T_{01} P - PQ_{01} + \Sigma ul . T_{01} - P\Sigma Alx^2 = 0,$$

où $$P = x_0 u + y_0 v + z_0 w + r = 0 \quad \text{est l'équation tangentielle de } M,$$
$$P' = x_1 u + y_1 v + z_1 w + r = 0 \quad \text{—} \quad \text{—} \quad P',$$

et où $T_{01} = Ax_0 x + By_0 y_1 + Cz_0 z - 1$, $Q = Ax + By + Cz - 1$ sont des constantes.

L'équation étant de la forme $PP' + P''^2 = 0$ est décomposable en une somme algébrique de trois carrés, non tous affectés du même signe, et représente par suite une conique réelle.

$P = 0$, $P' = 0$, $P'' = 0$ étant les équations de points M, M', M'', cette conique est tangente en M, M' aux droites MM'', M'M''. Or la droite $MM''(P = 0, \ \Sigma ul = 0)$ n'est autre que la parallèle à Δ menée par le point M. Cette tangente est fixe, ainsi que le point de contact M.

La conique est une parabole lorsque le coefficient de r^2 est nul :

$$\Sigma Al^2 Q - (\Sigma Alx^2)^2 - \Sigma Al^2 T_{01} = 0,$$

c'est-à-dire lorsque le point P_1 est situé sur la quadrique, lieu des centres des surfaces (f).

4° Soit $u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 = 0$, un des plans tangents parallèles au plan donné.

Les coordonnées x, y, z des points de contact de ce plan, avec une surface (f) qui lui est tangente, vérifient les relations

$$\frac{hAx + Pu}{u} = \frac{hBy + Pw}{v} = \frac{hCz + Pw}{w} = \frac{-h + Pr}{r_1},$$
$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 = 0,$$

de sorte que le lieu des points de contact est l'intersection de ce plan avec le lieu des pôles du plan par rapport aux surfaces (f), ce qui d'ailleurs était évident.

C'est donc une conique dont il nous faut trouver le lieu lorsque le plan se déplace parallèlement à lui-même. Il faut, pour cela, éliminer r_1 entre $u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 = 0$, et l'équation (1) du deuxième paragraphe, ce qui revient à faire dans cette équation $\Pi = 0$ et $\Pi = u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1$. On a ainsi

$$\Sigma Al^2 \Pi Q - \Sigma ul . T_{01} - \Pi \Sigma Alx^2 = 0,$$

surface du quatrième ordre circonscrite à la quadrique Q le long d'une courbe gauche, et ayant comme droite double (δ), l'intersection du plan polaire de M avec le plan mené par ce point parallèlement au plan donné : $T = 0$, $\Pi_1 = 0$.

On voit que la surface contient également la conique (c)

$$\Sigma Al^2 . Q - \Sigma Alx^2 = 0, \quad T = 0$$

Soit maintenant

(1) $$T_1 = \lambda \Pi_1,$$

un plan passant par (δ). Ce plan coupe la surface suivant une conique située sur la quadrique

$$\Sigma Al^2 Q - \lambda \Sigma ul - \Sigma Alx^2 = 0.$$

Or si l'on pose

(2) $$\Sigma Alx - \lambda \Sigma ul = \Sigma Al^2 R.$$

les équations du diamètre du plan (1) dans la quadrique s'écrivent

$$\frac{x - lR}{x_0 + \lambda\dfrac{u_1}{A}} = \frac{y - mR}{y_0 + \lambda\dfrac{v_1}{B}} = \frac{z - nR}{z_0 + \lambda\dfrac{w_1}{C}} = \mu.$$

En tirant de ces rapports les valeurs de x, y, z, et les portant dans les équations (1) et (2), on a

$$(\Sigma Alx_0 + \lambda\Sigma u_1 l)R + (\Sigma Ax_0^2 + 2\lambda\Sigma u_1 x_0 + \lambda^2\Sigma\frac{u_1^2}{A})\mu - (1 + \lambda\Sigma u_1 x_0) = 0,$$

$$(\Sigma Alx_0 + \lambda\Sigma u_1 l)\mu - \lambda\Sigma u_1 l = 0.$$

De ces équations, on peut tirer R et μ en fonction de λ, et on a ainsi pour x, y, z des expressions de la forme

$$x = \frac{F_1(\lambda)}{\Sigma Alx_0 + \lambda\Sigma u_1 l^2}, \qquad y = \frac{F_2(\lambda)}{(\Sigma Alx_0 + \lambda\Sigma u_1 l)^2}, \qquad z = \frac{F_3(\lambda)}{\Sigma Alx_0 + \lambda\Sigma u_1 l^2},$$

où $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$, $F_3(\lambda)$ sont des polynomes du troisième degré en λ. Le lieu des centres des coniques est donc bien une cubique gauche.

Lorsque $\Sigma Alx_0 = 0$, c'est-à-dire que la direction Δ est conjuguée de la direction OM, $\mu = 1$, et les expressions de x, y, z deviennent

$$x = \frac{f_1(\lambda)}{\Sigma Alx_0 + \lambda\Sigma u_1 l}, \qquad y = \frac{f_2(\lambda)}{\Sigma Alx_0 + \lambda\Sigma u_1 l}, \qquad z = \frac{f_3(\lambda)}{\Sigma Alx_0 + \lambda\Sigma u_1 l},$$

où $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $f_3(\lambda)$ sont des polynomes du deuxième degré en λ. Le lieu des centres est alors une conique.

Il en est encore ainsi lorsque dans la première des équations donnant R et μ, le coefficient de R divise celui de μ, ce qui se produit lorsque

$$\Sigma Ax_0^2\Sigma u_1 l^2 - 2\Sigma Alx_0 . \Sigma u_1 l . \Sigma u_1 x_0 + (\Sigma Alx_0)^2\sum\frac{u_1}{A} = 0.$$

Le plan donné u_1, v_1, w_1 est alors parallèle à un des plans tangents d'un cône du deuxième ordre.

5° Le cône asymptote de la surface (f) est de la forme $f + k = 0$, la constante k étant déterminée par la condition que le discriminant de $f + k$ soit nul, d'où $k = -\dfrac{H}{\Delta}$,

où
$$H = h^2ABC\left(h + \sum\frac{u^2}{A} + r^2\right), \qquad \Delta = h^2ABC\left(h + \sum\frac{u^2}{A}\right).$$

Le cône coupe (Q) suivant les deux plans

$$(ux + vy + wz + r)^2 + k = 0.$$

Si l'on écrit l'un de ces plans sous la forme

$$u'x + v'y + w'z + r' = 0,$$

on a $u' = u$, $v' = v$, $w' = w$, $r' = r \pm \sqrt{-k}$, et comme $r = -(ux_0 + vy_0 + wz_0)$, on en déduit

$$(u'x_0 + v'y_0 + w'z_0 + r')^2 + k = 0,$$

ce qui montre que les deux plans sont équidistants du point M.

Posant $u'x_0 + v'y_0 + w'z_0 + r' = r''$, et remplaçant k par $-\dfrac{H}{\Delta}$, h par $-\dfrac{\Sigma ul^2}{\Sigma Al^2}$, il vient

$$(\Sigma ul)^2 + r''\Sigma Al^2(\Sigma ul)^2 - \sum\frac{u^2}{A}\Sigma Al^2 + (\Sigma ul)^2\Sigma u'x_0\Sigma Al^2 = 0.$$

Si, après avoir transporté l'origine en M, on considère u', v', w', r' comme les coordonnées courantes du plan, l'équation ci-dessus représente une surface de quatrième classe, qui est l'enveloppe cherchée. La nouvelle origine est centre de la surface.

Tous les plans $(u')^2 = 0$, $(v')^2 = 0$, c'est-à-dire passant par la parallèle (δ) à Δ menée par M, sont plans tangents doubles. Il en résulte que (δ) est droite double de la surface.

Si l'on suppose que Ox, Oy, Oz sont trois diamètres conjugués de (Q), dont l'un, Ox, est parallèle à la direction Δ donnée, $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$, l'équation de la surface rapportée aux axes issus de M est

$$F(u, v, w, r) = \frac{u^2}{A} H^2 - \left(\frac{u^2}{A} + r^2\right)\left(\frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C}\right) = 0,$$

où l'on a
$$H = ux_0 + vy_0 + wz_0.$$

Soit un des plans tangents doubles $v_0 y + w_0 z = 0$.

La conique de contact de ce plan a pour équation tangentielle

$$uF_{u'} + vF_{v'} + wF_{w'} + rF_{r'} = 0.$$

Or les dérivées secondes de F, pour $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, sont toutes nulles à l'exception de

$$F''_{u^2} = \frac{1}{A}\left(H^2 - \frac{v^2}{B} - \frac{w^2}{C}\right), \qquad F''_{r^2} = -\frac{v^2}{B} - \frac{w^2}{C}.$$

et la conique
$$u^2 F''_{u^2} + r^2 F''_{r^2} = 0$$

se réduit à deux points de l'axe des x, c'est-à-dire de (δ').

Le plan est donc tangent à la surface en deux points symétriques par rapport à M.

Soit enfin un point de la droite (δ'), $x = \lambda$, $y = 0$, $z = 0$. Les équations du cône, ayant ce point pour sommet et circonscrit à la surface, sont

$$\lambda u + r = 0, \qquad \varphi(u, v, w) = \frac{1}{A} H^2 - \left(\frac{1}{A} + \lambda^2\right)\left(\frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C}\right) = 0.$$

Il est bien du second ordre.

Le plan diamétral d'une direction fixe $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ dans ce cône est déterminé par les équations

$$\lambda u + r = 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{\varphi'_u}{\alpha} = \frac{\varphi'_v}{\beta} = \frac{\varphi'_w}{\gamma},$$

ou
$$\frac{\frac{x_0}{A} H}{\alpha} = \frac{\frac{y_0}{B} H - \left(\frac{1}{A} + \lambda^2\right)\frac{v}{B}}{\beta} = \frac{\frac{z_0}{C} H - \left(\frac{1}{A} + \lambda^2\right)\frac{w}{C}}{\gamma},$$

ou encore
$$= \frac{\frac{H}{A}\left(\frac{y_0 w}{C} - \frac{z_0 v}{B}\right)}{\frac{\beta w}{C} - \frac{\gamma v}{B}}$$

Egalant les rapports extrêmes, on a d'abord

$$\frac{v}{B}(\gamma x_0 - \alpha z_0) - \frac{w}{C}(\beta x_0 - \alpha y_0) = 0,$$

ce qui montre que le plan diamétral reste parallèle à une certaine droite du plan $x = 0$.

On a en outre

$$(\beta z_0 - \gamma y_0)\frac{H}{A} u^2 - \left(\frac{u^2}{A} + r^2\right)\left(\frac{\gamma v}{B} - \frac{\beta w}{C}\right) = 0.$$

Le plan a donc pour enveloppe un cylindre de troisième classe.

VASNIER.

---

972. — *Trouver le lieu des sommets des tétraèdres circonscrits à une quadrique donnée et tels que chacune des hauteurs soit la normale au point de contact de la face correspondante.*

Nous dirons qu'un tel tétraèdre est orthogonalement circonscrit à la surface donnée.

Considérons, alors, pour fixer les idées, un ellipsoïde rapporté à ses trois plans principaux

$$\text{I.} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Imaginons un tétraèdre orthogonalement circonscrit, et soient A_1, A_2, A_3, A_4 les points de contact des faces ; désignons par x_1, y_1, z_1 ; ... x_4, y_4, z_4, les coordonnées de ces points. Le sommet A_1 situé sur la normale en A_1 a pour coordonnées

$$(1) \qquad x = x_1 \frac{a^2+\lambda}{a^2}, \qquad y = y_1 \frac{b^2+\lambda}{b^2}, \qquad z = z_1 \frac{c^2+\lambda}{c^2}.$$

Nous allons exprimer que la normale en A_1 rencontre l'intersection des deux faces tangentes en A_1 et A_2 à l'ellipsoïde donné. Un point quelconque de cette normale a pour coordonnées

$$x = x_1 \frac{a^2+\rho}{a^2}, \qquad y = y_1 \frac{b^2+\rho}{b^2}, \qquad z = z_1 \frac{c^2+\rho}{c^2}.$$

Substituons ces valeurs dans les équations des plans tangents en A_1 et A_2 ; nous obtenons les équations

$$(2) \qquad xx_1 \frac{a^2+\rho}{a^2} + yy_1 \frac{b^2+\rho}{b^2} + zz_1 \frac{c^2+\rho}{c^2} - 1 = 0,$$

$$(3) \qquad xx_2 \frac{a^2+\rho}{a^2} + yy_2 \frac{b^2+\rho}{b^2} + zz_2 \frac{c^2+\rho}{c^2} - 1 = 0.$$

Ces deux équations doivent donner la même valeur pour ρ. Si on remarque que A_2 est dans le plan polaire de A'_1 par rapport à E, on a

$$(4) \qquad xx_1 \frac{a^2+\lambda}{a^2} + yy_1 \frac{b^2+\lambda}{b^2} + zz_1 \frac{c^2+\lambda}{c^2} - 1 = 0.$$

En comparant les équations (2) et (4), on voit que $\rho = \lambda$. En raisonnant ainsi pour les autres sommets on voit que le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ inscrit dans E est conjugué par rapport à la quadrique

$$(Q) \qquad x^2 \frac{a^2+\lambda}{a^2} + y^2 \frac{b^2+\lambda}{b^2} + z^2 \frac{c^2+\lambda}{c^2} - 1 = 0.$$

La considération des invariants simultanés des deux quadriques montre que pour qu'un tel tétraèdre existe on doit avoir

$$(5) \qquad \frac{a^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2}{b^2+\lambda} + \frac{c^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0;$$

λ est donc une constante qui peut prendre l'une des trois valeurs définies par cette équation ; ces valeurs sont d'ailleurs réelles et on sait qu'elles sont séparées par les quantités

$$a^2, \qquad b^2, \qquad c^2.$$

Si maintenant des équations (1) on tire les valeurs de x_1, y_1, z_1 pour les porter dans l'équation de λ on obtient le lieu des sommets du tétraèdre circonscrit

$$(6) \qquad \frac{x^2 a^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c^2+\lambda)^2} - 1 = 0.$$

Ce lieu se compose donc de trois quadriques obtenues en donnant à λ les trois valeurs qui sont racines de l'équation (5). A chaque racine λ correspond une famille de tétraèdres orthogonalement circonscrits à E et tous les tétraèdres de cette famille sont conjugués par rapport à la quadrique

$$(Q') \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0$$

homothétique de Q par rapport à E.

Les quadriques Q et E sont homofocales.

Parmi les tétraèdres que nous venons de considérer il y a lieu de distinguer les tétraèdres orthocentriques dont les hauteurs sont concourantes. Proposons-nous de déterminer le lieu du centre des hauteurs H. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de ce point. Les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont les pieds de quatre des normales issues de H. Soient α, β, γ; α', β', γ', les coordonnées de deux autres pieds des normales M et M'. On a

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} x_0 &= \alpha\frac{(a^2-\rho)}{a^2} = \alpha'\frac{(a^2-\rho')}{a^2},\\ y_0 &= \beta\frac{b^2}{b^2-\rho} = \beta'\frac{b^2}{b^2-\rho'},\\ z_0 &= \gamma\frac{c^2}{c^2-\rho} = \gamma'\frac{c^2}{c^2-\rho'}\end{aligned}\right.$$

Les deux paramètres ρ et ρ' sont manifestement différents. Supposons que le tétraèdre considéré appartienne à la famille qui correspond à la racine λ de l'équation (5). Nous allons montrer que ρ et ρ' sont précisément les deux autres racines de cette équation.

Les trois points A_2, A_3, A_4 sont dans le plan polaire du point A'_1 par rapport à E ; les trois autres pieds des normales sont dans un plan qu'on détermine facilement au moyen des formules de Joachimstal et dont le pôle a pour coordonnées

$$x = -\frac{a^2}{x'}, \qquad y = -\frac{b^2}{y'}, \qquad z = -\frac{c^2}{z'}.$$

En remplaçant x'_1, y'_1, z'_1 par leurs valeurs tirées de (1), l'équation de ce plan s'écrit alors

$$\frac{a^2x}{x_1(a^2-\lambda)} + \frac{b^2y}{y_1(b^2-\lambda)} + \frac{c^2z}{z_1(c^2-\lambda)} + 1 = 0;$$

x_1, y_1, z_1 s'expriment d'ailleurs par des relations de la forme

$$x_1 = \frac{a^2x_0}{a^2+\mu}, \qquad y_1 = \frac{b^2y_0}{b^2+\mu}, \qquad z_1 = \frac{c^2z_0}{c^2+\mu},$$

et l'équation précédente devient

$$\frac{x}{x_0}\,\frac{a^2+\mu}{a^2+\lambda} + \frac{y}{y_0}\,\frac{b^2+\mu}{b^2+\lambda} + \frac{z}{z_0}\,\frac{c^2+\mu}{c^2+\lambda} + 1 = 0.$$

Ce plan contient le point A_1 ; on le vérifie immédiatement en vertu de l'équation (5). Il doit contenir aussi les deux autres pieds des normales M et M' et par suite, on a

$$(8)\quad \frac{a^2(a^2+\rho)}{(a^2+\lambda)(a^2-\rho)} + \frac{b^2(b^2+\rho)}{(b^2+\lambda)(b^2-\rho)} + \frac{c^2(c^2+\rho)}{(c^2+\lambda)(c^2-\rho)} + 1 = 0,$$

$$(9)\quad \frac{a^2(a^2+\rho')}{(a^2+\lambda)(a^2-\rho')} + \frac{b^2(b^2+\rho')}{(b^2+\lambda)(b^2-\rho')} + \frac{c^2(c^2+\rho')}{(c^2+\lambda)(c^2-\rho')} + 1 = 0$$

Prenons l'équation (8) ; elle s'écrit

$$\left[\frac{a^2}{(a^2+\lambda)(a^2-\rho)} + \frac{b^2}{(b^2+\lambda)(b^2-\rho)} + \frac{c^2}{(c^2+\lambda)(c^2-\rho)}\right](\mu-\rho) + \frac{a^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2}{b^2+\lambda} + \frac{c^2}{c^2+\lambda} + 1 = 0$$

ou, en tenant compte de l'équation (5) et en remarquant que μ est différent de ρ,

$$(8')\quad \frac{a^2}{(a^2-\rho)(a^2+\lambda)} + \frac{b^2}{(b^2-\rho)(b^2+\lambda)} + \frac{c^2}{(c^2-\rho)(c^2+\lambda)} = 0;$$

ρ vérifie la même équation ; cette équation peut du reste s'écrire

$$\frac{a^2}{a^2-\rho} + \frac{b^2}{b^2-\rho} + \frac{c^2}{c^2-\rho} - \left(\frac{a^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2}{b^2+\lambda} + \frac{c^2}{c^2+\lambda}\right) = 0.$$

c'est-à-dire, d'après l'équation (5),

$$\frac{a^2}{a^2+\rho^2}+\frac{b^2}{b^2+\rho^2}+\frac{c^2}{c^2+\rho^2}+1=0.$$

Donc ρ et ρ' sont deux constantes et si des équations (7) on tire α, β, γ et α', β', γ' pour les porter successivement dans l'équation de E, on voit que le point H décrit une biquadratique gauche définie par les équations

$$(10)\qquad \frac{a^2x^2}{(a^2+\rho^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2+\rho^2)^2}+\frac{c^2z^2}{(c^2+\rho^2)^2}-1=0,$$

$$(11)\qquad \frac{a^2x^2}{(a^2+\rho'^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2+\rho'^2)^2}+\frac{c^2z^2}{(c^2+\rho'^2)^2}-1=0.$$

Quant au lieu des sommets, c'est la courbe d'intersection de l'ellipsoïde (6) avec la surface normopolaire de E.

Les résultats précédents s'appliquent immédiatement au cas où la surface donnée serait un hyperboloïde. On peut en déduire également la solution du problème pour les paraboloïdes. Déplaçons les axes parallèlement à eux-mêmes en prenant comme nouvelle origine le sommet situé sur Ox du côté des x négatifs. L'équation de la surface donnée devient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2x}{a}=0.$$

Si on fait croître indéfiniment a, b, c de telle façon que $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{c^2}{a}$ aient pour limites p et q, on obtient le paraboloïde P :

$$(\mathrm{P})\qquad \frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}+2x=0.$$

Voyons ce que deviennent les équations (5), (6), (10) et (11). On constate sans peine que les racines de l'équation (5) deviennent infinies, l'une de l'ordre de $\frac{1}{a^2}$ et les deux autres de l'ordre de $\frac{1}{a}$. Pour la première, on a

$$\lim \frac{1}{1+\frac{\lambda}{a^2}}=-1, \qquad \text{ou} \qquad \lim \frac{\lambda}{a^2}=-2.$$

On peut écrire l'équation (5) sous la forme

$$\frac{\frac{b^2}{a}+\frac{\lambda}{a}}{\frac{b^2}{a}+\frac{\lambda}{a}}+\frac{\frac{c^2}{a}+\frac{\lambda}{a}}{\frac{c^2}{a}+\frac{\lambda}{a}}+\frac{\lambda}{a}\cdot\frac{2-\frac{\lambda}{a^2}}{1+\frac{\lambda}{a^2}}=0.$$

Si l'on fait tendre $\frac{\lambda}{a^2}$ vers -2, $\frac{\lambda}{a}$ devient infini et les deux premières fractions ont pour limites respectives p et q. Donc

$$(12)\qquad \lim \frac{\lambda}{a}\left(2-\frac{\lambda}{a^2}\right)=p-q,$$

résultat que nous allons utiliser.

Si on effectue le changement d'axes, l'équation (6) devient

$$(13)\qquad \frac{a^2x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{c^2z^2}{(c^2+\lambda)^2}+\frac{2a^2x}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{\lambda\,2x}{a^2+\lambda}=0,$$

ou

$$\frac{\frac{x^2}{a^2}}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)^2}+\frac{\frac{b^2}{a^2}y^2}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{\lambda}{a^2}\right)^2}+\frac{\frac{c^2}{a^2}z^2}{\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{\lambda}{a^2}\right)^2}+\frac{2x}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)^2}+\frac{\frac{\lambda}{a}\left(2-\frac{\lambda}{a^2}\right)}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)^2}=0$$

Si a, b, c croissent indéfiniment et si $\frac{\lambda}{a^2}$ tend vers -2, cette équation devient, d'après (12),

$$2x + p + q = 0.$$

C'est l'équation du plan de Monge; on pouvait prévoir *a priori* que ce plan fait partie du lieu cherché. Les tétraèdres correspondants possèdent un angle trièdre trirectangle dont le sommet est dans le plan de Monge ; la face opposée est le plan de l'infini.

Considérons maintenant les deux autres racines telles que $\frac{\lambda}{a}$ reste fini. Soit $\lim \frac{\lambda}{a} = \lambda'$; on voit immédiatement que λ' est racine de l'équation

$$(14) \qquad \frac{p}{p+\lambda'} + \frac{q}{q+\lambda'} - 2 = 0.$$

Si on écrit l'équation (13) sous la forme

$$\frac{ax^2}{\left(a+\frac{\lambda}{a}\right)^2} + \frac{\frac{b^2}{a}y^2}{\left(\frac{b^2}{a}+\frac{\lambda}{a}\right)^2} + \frac{\frac{c^2}{a}z^2}{\left(\frac{c^2}{a}+\frac{\lambda}{a}\right)^2} - 2\frac{a^2}{\left(a+\frac{\lambda}{a}\right)^2}x - \frac{a^2\left(\frac{2\lambda}{a}+\frac{\lambda^2}{a^3}\right)}{\left(a+\frac{\lambda}{a}\right)^2} = 0,$$

on voit qu'à la limite cette équation devient

$$(15) \qquad \frac{py^2}{p+\lambda'^2} + \frac{qy^2}{(q+\lambda')^2} - \lambda'(x+\lambda') = 0;$$

λ' peut prendre deux valeurs fournies par l'équation (14).

Le lieu des sommets des tétraèdres orthogonalement circonscrits se compose alors du plan de Monge et de deux paraboloïdes de même espèce que le paraboloïde donné.

Si on considère spécialement les tétraèdres orthocentriques, il en existe trois familles, l'une comprend des tétraèdres ayant une face à l'infini ; le sommet opposé décrit l'intersection du plan de Monge avec la surface normopolaire.

Quant au point de rencontre des hauteurs, il décrit une courbe du quatrième ordre, qui est l'intersection des deux paraboloïdes représentés par l'équation (15), où l'on remplace successivement λ' par les deux racines de l'équation (14). Cette courbe est également le lieu des points d'où on peut mener à la surface donnée trois normales formant un trièdre trirectangle.

Les deux autres familles comprennent de véritables tétraèdres orthocentriques : les sommets décrivent deux courbes situées sur la surface normopolaire et les centres des hauteurs décrivent deux coniques qui sont les sections des deux paraboloïdes (15) par le plan de Monge du paraboloïde donné. D'ailleurs quand un tétraèdre orthocentrique est circonscrit à un paraboloïde, le centre des hauteurs est situé dans le plan de Monge ; il suffit, pour s'en convaincre, d'écrire qu'il existe un tétraèdre circonscrit à la surface donnée et conjugué par rapport à une sphère ayant pour centre l'orthocentre du tétraèdre.

La méthode précédente s'applique également aux coniques. Si on cherche le lieu des sommets des triangles orthogonalement circonscrits à une conique à centre, on trouve deux coniques et non pas quatre comme l'indique M. Koehler dans ses *Exercices de géométrie analytique* (page 64) : lorsqu'un tel triangle reste inscrit dans l'une de ces coniques son orthocentre décrit l'autre.

Pour la parabole on trouve comme lieu la directrice et une parabole lieu des points d'où l'on peut mener à la première deux normales rectangulaires.

Ajoutons enfin qu'on obtient des résultats analogues si on cherche le lieu des arêtes d'un trièdre orthogonalement circonscrit à un cône du second degré, c'est-à-dire tel que le plan passant par une arête quelconque et par la génératrice de contact de la face opposée soit normal au cône.

Il suffit d'écrire l'équation d'une quadrique à centre

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} - h = 0,$$

et de faire tendre h vers zéro : nous n'insisterons pas sur le calcul qui n'offre aucune difficulté.

On trouve comme lieu des arêtes deux cônes du second degré.

ROUYER.

CONCOURS DE 1901 (*Suite*).

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires (*).

Étant donnés un cercle fixe O, une droite fixe D, tangente à ce cercle, et une droite Δ, parallèle à D, située du même côté de D que le cercle O et ne coupant pas ce cercle, on mène d'un point A de Δ les deux tangentes au cercle O, qui coupent la droite D en B et C.

Le point A décrivant la droite Δ, on demande :

1° De trouver le lieu géométrique du point M de rencontre de la bissectrice intérieure de l'angle A du triangle ABC avec le cercle circonscrit à ce triangle ;

2° De trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle ABC ;

3° De trouver l'enveloppe du cercle passant par les milieux des côtés du triangle ABC ;

4° De calculer les longueurs des trois côtés du triangle ABC connaissant la somme l des longueurs des deux médianes issues des sommets B et C.

N. B. — On désignera par r le rayon du cercle O et par h la distance des deux droites parallèles D et Δ.

(1er juillet, de 7 h. à 2 h.)

Mathématiques spéciales.

1046. — On considère un système de trois axes rectangulaires ox, oy, oz.

1° Trouver l'équation générale des paraboloïdes P en admettant le plan xoy pour plan de symétrie, tangents au plan yoz au point o, et ayant pour trace sur le plan zox une ellipse de grandeur invariable dont le grand axe est dirigé suivant ox.

2° Trouver les équations des focales F et Φ de l'un de ces paraboloïdes P.

3° Trouver l'enveloppe de la focale F, qui est située dans le plan xoy, lorsque le paraboloïde P varie.

4° Dans la même hypothèse, trouver l'enveloppe de l'axe et le lieu du sommet de la focale Φ. Construire cette enveloppe et ce lieu.

5° Calculer le paramètre de la focale Φ en fonction du coefficient angulaire de son axe (qui est situé dans le plan xoy), et étudier la variation de ce paramètre quand ce coefficient angulaire varie.

6° En se servant des résultats qui précèdent, donner une idée de la forme de la surface engendrée par la focale Φ, quand le paraboloïde P varie. — En particulier, indiquer quelle est la section de cette surface par le plan xoz.

N. B. — On désignera par a et b ($a > b$) les demi-axes de l'ellipse donnée dans le plan zox.

(2 juillet, de 7 h. à 2 h.)

Composition sur l'analyse et ses applications géométriques.

On considère la courbe gauche définie, en coordonnées rectangulaires, par l'intersection des deux surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0,$$

$$z = \text{[illegible]}.$$

[illegible]

1° [illegible] de cette courbe, comptée à partir de l'origine jusqu'en un point M (x, y, z), exprimer $\frac{ds}{dx}$ en fonction de x et déterminer a de façon que s soit donné en fonction de x par une intégrale elliptique de première espèce.

(*) Les énoncés [illegible] de la question de Mathématiques élémentaires sont publiés dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

Dans tout ce qui suit, la constante a est supposée ainsi déterminée.

2° Exprimer les coordonnées x, y, z d'un point M de la courbe en fonction de s, en employant successivement les notations de Jacobi et celles de Weierstrass.

Quel est, dans un parallélogramme des périodes, le nombre des valeurs de s correspondant à un point donné de la courbe ?

3° Former la relation qui lie les valeurs de s correspondant à quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de la courbe situés dans un même plan. En déduire les points de la courbe où le plan osculateur est stationnaire et discuter la réalité de ces points.

4° Calculer, en fonction de s, les coordonnées du centre de gravité de l'arc s supposé homogène.

(1 juillet, de 7 h. à 2 h.)

Mécanique rationnelle.

On considère une plaque solide rectangulaire, homogène, infiniment mince, dont le centre O (centre de gravité) est fixe et qui s'appuie sur une sphère fixe infiniment petite S, sur laquelle elle peut glisser sans frottement ; la distance $OS = l$ de cette sphère au centre O est supposée telle que la circonférence décrite, dans le plan de la plaque, de O comme centre avec l comme rayon, soit tout entière dans l'intérieur de la plaque.

1° Trouver le mouvement de la plaque, en supposant les conditions initiales telles qu'au commencement du mouvement la plaque glisse sur la sphère S.

2° Calculer la réaction de la sphère S sur la plaque et voir si, à un certain instant, la plaque peut quitter la sphère.

Soit Ox_1, Oy_1, Oz_1, trois axes fixes menés par le point O, Ox_1 étant dirigé suivant OS ; soient de même Ox, Oy, Oz les axes de symétrie de la plaque, Ox étant parallèle aux plus grands côtés du rectangle, Oy aux plus petits côtés et Oz normal à la plaque, la sphère S étant placée, par rapport à la plaque, du côté des z négatifs.

On désignera par A, B, C les moments d'inertie de la plaque pris respectivement par rapport à Ox, Oy, Oz, par θ l'angle z_1Oz et par φ l'angle x_1Ox.

On désignera également par $\theta_0, \varphi_0, \theta'_0, \varphi'_0$ les valeurs initiales données de θ, φ et de leurs dérivées θ', φ' par rapport au temps, en supposant φ_0 compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; on examinera successivement l'hypothèse dans laquelle le produit $\theta'_0\varphi'_0$ est nul, puis celle dans laquelle ce produit n'est pas nul ; dans chacun des différents cas particuliers correspondant à ces hypothèses, on indiquera comment on a dû choisir les données initiales pour que le mouvement considéré se produise.

(5 juillet, de 7 h. à 2 h.)

BOURSES DE LICENCE PRÈS LES FACULTÉS DES SCIENCES

Mathématiques.

1047. — On considère les coniques (C) définies par l'équation

$$(m^2+1)x^2 - m^2y^2 + 2mxy + 4my - m^2 + 1 = 0,$$

où m est un paramètre ; montrer que toutes ces coniques ont deux points communs, P, Q.

Considérant les deux coniques (C) qui correspondent aux valeurs a, b du paramètre m, on demande de former l'équation de la droite qui joint les points d'intersection de ces deux coniques, autres que P et Q. Montrer que cette droite passe par un point fixe lorsque a, b varient.

Par un point M_0 du plan, de coordonnées x_0, y_0, passent en général deux coniques (C) ; la région du plan où doit se trouver le point M_0 pour que ces deux coniques soient réelles est limitée par une courbe (S), que l'on construira.

Les deux coniques qui passent par le point M_0 ont en commun, outre les points P, Q, un autre point M_1 dont on calculera les coordonnées x_1, y_1, en fonction de x_0, y_0.

Quel est le lieu décrit par l'un des points M_0, M_1 quand l'autre décrit la courbe (S) ?

(25 juin, de 8 h. à midi.)

Sciences physiques

Physique.

I. — Principe des hygromètres à condensation.

II. — **1048.** — Le tirage d'une lunette de Galilée est tel, que la distance entre l'objectif et l'oculaire divergent est de 12cm. Dans ces conditions, la lunette donne une image réelle, située à 3cm derrière l'oculaire, d'un

objet placé en avant de l'objectif à une distance [illegible]. Pour qu'un objet placé à l'infini donne une image réelle située à la même distance [illegible] de l'oculaire, il faut rapprocher celui-ci de l'objectif de [illegible]. Enfin pour que l'image de l'objet à l'infini se forme à l'infini, il faut de nouveau rapprocher l'oculaire de l'objectif de $0^{cm},6$.

On demande quel est, dans ce dernier cas, le grossissement de la lunette quand on s'en sert à la manière ordinaire.

Chimie.

I. — Propriétés chimiques de l'oxyde de carbone.

II. — **1049** — On recueille le mélange gazeux obtenu en faisant passer de la vapeur d'eau sur du charbon chauffé au rouge. L'analyse eudiométrique d'un volume V de ce mélange montre que le volume d'oxygène suffisant pour la combustion complète est égal à $\frac{2}{5}$ V et que le volume gazeux qui reste dans ces conditions, après le passage de l'étincelle, est égal à $\frac{3}{5}$ V.

On demande la composition de ce mélange gazeux.

(25 juin, de 8 h. à midi.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Épure.

INTERSECTION DE DEUX CÔNES

1050 — Le premier cône a pour sommet le point (s, s') $(x = 0,\ y = 2,\ z = 12)$. Sa directrice dans le plan $z = 6$ est une circonférence ayant pour centre le point O $(x = 0,\ y = 10)$ et pour rayon 8.

Le deuxième cône a pour sommet le point (s_1, s'_1) $(x = 0,\ y = 6,\ z = 10)$. Sa base dans le plan horizontal $z = 6$ est une ellipse ayant pour centre le point O et pour sommets : 1° (a, a') $(x = 8,\ y = 10)$; 2° [illegible] $(x = 0,\ y = 6)$.

On indiquera à l'encre la construction d'un point quelconque de la courbe, la tangente, et les points remarquables.

Représenter le solide commun, les deux cônes étant illimités et les plans de projection transparents.

Enfin on calculera en degrés l'angle de la tangente à la projection verticale de la courbe au point a avec le plan horizontal.

(23 juillet, de 8 h. à midi.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1051 — On considère deux droites de l'espace qui ne sont pas dans le même plan, D et D', et la perpendiculaire commune à ces deux droites, AB ; on prolonge AB d'une longueur BC = AB, et sur BC comme diamètre on décrit une sphère S.

1° Cela posé, on envisage une droite mobile, Δ, qui s'appuie sur D et D' et qui est tangente à la sphère, et on demande le lieu du point de contact de cette droite avec la sphère. Montrer que ce lieu est une biquadratique gauche ayant un point double.

2° Trouver le lieu engendré par la droite Δ et le lieu du milieu de la portion de cette droite comprise entre D et D'.

3° Construire ce dernier lieu, quand les deux droites D et D' sont rectangulaires.

N. B. — On représentera AB par $2a$ et par m la tangente de la moitié de l'angle formé par les droites D et D'.

E. H.

1052 — [illegible] les coniques inscrites à un triangle équilatéral et passant par son centre de gravité. Lieu du point de concours des droites joignant les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés.

L. D[illegible]

1053 — Étant donné un triangle T, on en considère deux autres T' et T'' en joignant les milieux des côtés de T et les centres de T les parallèles aux côtés opposés. Les paraboles inscrites à T' et les

paraboles circonscrites à T'' sont deux à deux coaxiales, et leurs axes sont les tangentes au sommet des paraboles inscrites à T.

E. Duporcq.

* **1054**. — Les tangentes à une ellipse aux extrémités des diamètres conjugués égaux sont normales à l'hyperbole équilatère homofocale.

E. Duporcq.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

971. — *On considère un cercle* (C) *de centre* O *et une droite* (D), *puis un cercle variable* (Γ) *ayant son centre sur la droite* (D) *et orthogonal au cercle* (C).

1° *Trouver l'enveloppe des cordes du cercle* (Γ) *qui sont vues de* O *sous un angle droit. Montrer que ce lieu est une conique* (S) *qui a un foyer au point* O.

2° *Trouver le lieu du second foyer réel de* (S) *quand* (Γ) *varie.*

3° *Trouver les axes de la conique* (S), *l'enveloppe de l'axe non focal et le lieu des sommets situés sur l'axe focal. Construire ce lieu.*

4° *Trouver le lieu des points de rencontre de deux coniques* (S) *dont les axes focaux sont rectangulaires.*

5° *La conique* (S) *et le cercle* (Γ) *ont en commun deux tangentes variables. Trouver le lieu du point de concours de ces tangentes.*

Prenons pour origine le point O, pour axe des x une perpendiculaire à la droite (D) et pour axe des y une parallèle à la droite (D). Désignons par R le rayon du cercle donné et par a l'abscisse de la droite (D) ; alors l'équation du cercle (Γ) sera

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2\lambda y + \mu = 0,$$

μ étant déterminé par la condition que ce cercle soit orthogonal au cercle donné, ce qui donne $\mu = R^2$.

1° Cela posé, soit $ux + vy + w = 0$ une des cordes de (Γ) qui sont vues de l'origine sous un angle droit : l'équation des rayons qui joignent ses extrémités à l'origine des coordonnées s'obtient en éliminant la variable d'homogénéité entre les deux équations du cercle et de la corde, et nous trouvons ainsi

$$w^2(x^2 + y^2) + 2w(ux + vy)(ax + \lambda y) + R^2(ux + vy)^2 = 0;$$

il n'y a plus qu'à écrire que ces deux droites sont rectangulaires, c'est-à-dire que $A + C$ est nul ; ce calcul donne

$$2w^2 + 2w(au + \lambda v) + R^2(u^2 + v^2) = 0.$$

Cette équation est la condition de contact de la corde avec son enveloppe ; c'est ce qu'on nomme habituellement l'équation tangentielle de cette enveloppe ; elle fait voir de suite que par chaque point du plan passent deux cordes de l'espèce indiquée et, par suite, que l'enveloppe est de seconde classe. Nous aurons l'équation ordinaire en cherchant le lieu des points pour lesquels ces deux droites sont confondues.

Or si nous exprimons que la droite $ux + vy + w = 0$ passe au point (x, y), nous avons, pour

déterminer α, β, γ, les deux équations

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad 2\alpha^2 - 2\alpha\beta xy + \beta^2 x^2 + \gamma^2 - 2R^2(\alpha x + \beta y) + R^4 = 0.$$

en éliminant γ entre elles, nous obtenons une équation homogène et du second degré en α et β et il suffit d'exprimer qu'elle a une racine double. Ce calcul fournit l'équation

$$2R^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta xy - \beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 - 2R^2(\alpha x + \beta y) + R^4 = 0,$$

ou

$$(1) \qquad 2R^2 - \alpha^2 - \beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 - \alpha x - \beta y - R^2 = 0.$$

Telle est l'équation ponctuelle de l'enveloppe : elle représente visiblement une conique qui a un foyer au point O et pour directrice correspondante la droite $\alpha x + \beta y - R^2 = 0$; si $2R^2 \leqslant \alpha^2$, c'est toujours une hyperbole ; si $2R^2 > \alpha^2$, la conique peut être du genre ellipse, mais alors c'est une ellipse imaginaire ; quand elle existe vraiment, c'est donc toujours une hyperbole.

2. Pour trouver le lieu du second foyer, il suffit de chercher le lieu du centre et de prendre l'homothétique par rapport au point O dans le rapport 2. Les équations du centre sont

$$2R^2 - \alpha^2 - \beta^2 x - \alpha x - \beta y - R^2 = 0,$$
$$2R^2 - \alpha^2 - \beta^2 y - \beta x - \alpha y - R^2 = 0,$$

elles donnent de suite $\frac{y}{\beta} = \frac{x}{\alpha}$, puis $\beta = \frac{\alpha y}{x}$; en portant cette valeur dans l'une des deux équations précédentes, nous obtenons pour lieu du centre la droite $x = \frac{\alpha}{2}$. Le lieu du second foyer est donc la droite (D) elle-même, $x = \alpha$. Le second foyer coïncide avec le centre du cercle (Γ) (α, β); le centre a pour coordonnées $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$.

3° L'axe focal a pour équation $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$. L'axe non focal est perpendiculaire à celui-ci et passe au point $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$; il a donc pour équation

$$\beta\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha\left(y - \frac{\beta}{2}\right) = 0, \qquad \text{ou} \qquad 2\beta x - 2\alpha y - \alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

Son enveloppe s'obtient en exprimant que cette équation regardée comme étant du second degré en β a une racine double, ce qui donne la ligne

$$(2) \qquad y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0.$$

C'est une parabole ayant l'origine pour foyer et pour directrice la droite (D_1).

Quant au lieu des sommets situés sur l'autre axe, il s'obtient en éliminant β entre l'équation (1) et l'équation $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$; ce calcul est facile et conduit à l'équation

$$(3) \qquad 2\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 - \alpha x - \alpha y - R^2 x = 0,$$

qui représente une cubique circulaire, symétrique par rapport à Ox, ayant pour asymptote la droite $x = \alpha$, passant à l'origine et tangente en ce point à Oy. Pour achever d'étudier la forme de cette courbe, écrivons y^2 :

$$y^2 = \frac{x}{\alpha}\,\frac{2x^2 - 2\alpha x - R^2}{2x - \alpha}.$$

Pour $x = \alpha$, y^2 [illegible] cette forme dépend de la valeur des racines de l'équation

$$2x^2 - 2\alpha x - R^2 = 0.$$

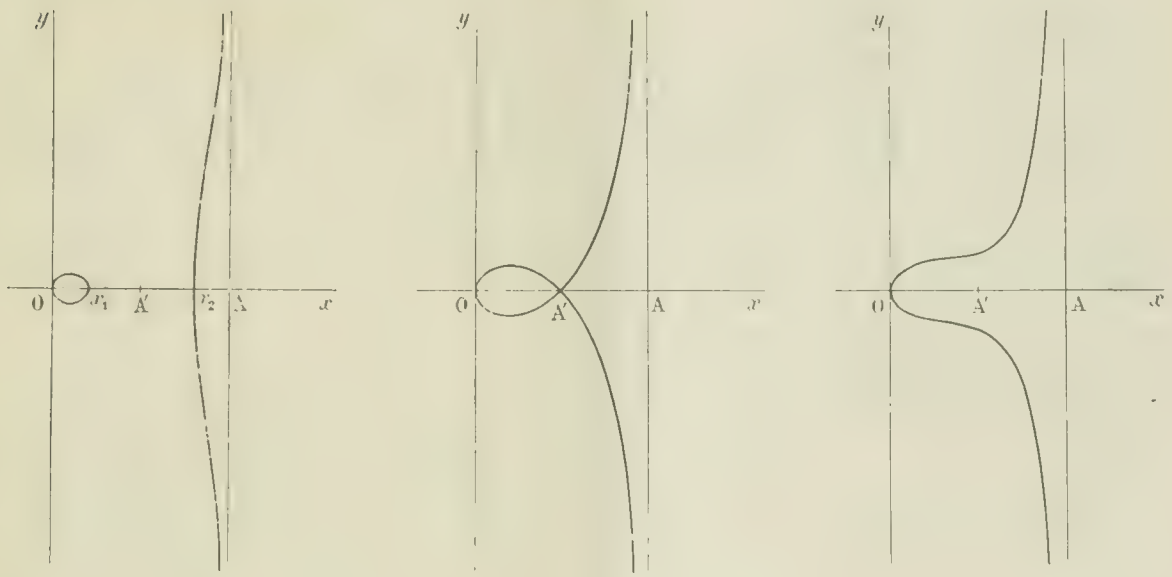
Si $\alpha^2 > 2R^2$, ces racines sont réelles et toutes deux comprises entre 0 et α, leur demi-somme $\frac{\alpha}{2}$

Si $a^2 = 2R^2$, les deux racines sont confondues avec le nombre $\frac{a}{2}$.

Si $a^2 < 2R^2$, les racines sont imaginaires.

Dans le premier cas, soient x_1 et x_2 les deux racines du trinome ; y^2 est positif de 0 à x_1 et de x_2 à a, il est négatif dans tout autre intervalle. La courbe se compose d'un ovale fermé qui correspond au premier intervalle et d'une branche infinie conchoïdale qui correspond au second.

Dans le second cas, la courbe présente un point double au milieu de OA. Il est facile de vérifier qu'en ce point les tangentes sont rectangulaires ; par conséquent, dans ce cas, la courbe est une strophoïde.



Dans le troisième cas, l'ovale disparaît, il ne reste que la branche infinie de forme conchoïdale (voir les trois figures).

4° Le coefficient angulaire de l'axe focal de la conique (S) est $\frac{\lambda}{a}$; par conséquent, pour que les axes des deux coniques (S) et (S') soient rectangulaires, il faut que l'on ait la relation $\lambda\lambda' = -a^2$.

Or si l'on exprime que la conique (S) passe au point (x, y), l'équation (1) donne les deux valeurs λ et λ' qui correspondent aux deux coniques (S) et (S') ; on aura donc le lieu demandé en exprimant que le produit des racines est égal à $-a^2$, ce qui donne

$$a^2(x^2 + y^2) = (2R^2 - a^2)(x^2 + y^2) + 2ax - R^2,$$

ou

$$4) \qquad 2R^2 - a^2)(x^2 + y^2) - 2aR^2x + R^2 = 0$$

Ce lieu est un cercle qui a son centre sur OA.

5° Pour traiter la dernière partie, le mieux est de se servir des coordonnées tangentielles, c'est-à-dire de chercher les coordonnées des tangentes communes à la conique (S) et au cercle (Γ). Ces nombres vérifient les deux équations

$$R^2(u^2 + v^2) - 2w(au + \lambda v) - w^2 = 0,$$

$$a^2(u^2 + v^2) - R^2(u^2 + v^2) - (au + \lambda v - w)^2 = 0.$$

En éliminant $u^2 + v^2$ entre elles, on a une équation qui se décompose en deux équations du premier degré, $\mu u + \nu v + w = 0$ et $2\mu^2 u^2 + \nu^2 - R^2 = R\sqrt{\mu u + \lambda v + w} = 0$.

La première représente le centre du cercle (Γ) : c'est en effet le point de concours de deux tangentes communes isotropes.

La seconde représente le point de concours des deux autres tangentes communes : c'est le point demandé, ses coordonnées cartésiennes sont

$$x = \frac{aR^2}{2a^2 + 2\nu^2 - R^2}, \qquad y = \frac{\lambda R^2}{2a^2 + 2\nu^2 - R^2};$$

ces formules donnent immédiatement $\lambda = \frac{ay}{x}$, et, en portant cette valeur dans l'une d'elles, nous trouvons l'équation du lieu cherché

$$5 \qquad 2a^2(x^2 + y^2) - R^2x^2 + aR^2x = 0.$$

C'est une conique qui passe à l'origine et qui admet Ox pour axe de symétrie.

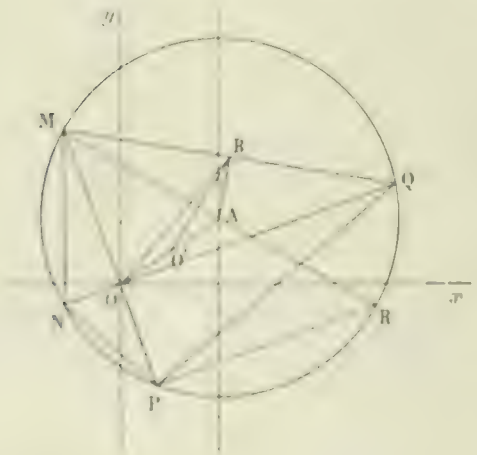
Si $2a^2 > R^2$, cette conique est une ellipse. Si $2a^2 < R^2$, c'est une hyperbole ; et enfin, si $2a^2 = R^2$, c'est une parabole.

Les lecteurs de la première partie pourront reprendre cet exercice, en se servant constamment des coordonnées tangentielles ; ils pourront aussi sans peine trouver une solution géométrique des premières parties de l'énoncé.

Bonne solution de M. E.-N. Barisien.

Remarques géométriques. — Voici quelques remarques intéressantes dues à M. **Cans**, de Versailles. Considérons un cercle (Γ) et, pour faciliter l'exposé géométrique, supposons que l'origine O soit intérieure à ce cercle, ce qui d'ailleurs n'est pas réalisé quand on suppose R^2 positif, c'est-à-dire le cercle donné réel, et soit A le centre du cercle (Γ). Si nous menons par le point O deux cordes rectangulaires OM et ON, rencontrant le cercle en M, P, N et Q, les quatre droites MN, MQ, PN et PQ sont des cordes satisfaisant aux conditions imposées. Or menons le diamètre MA qui coupe le cercle en R, l'angle MPR est droit, PR est parallèle à OQ et, par suite

$$\text{arc } NP = \text{arc } QR ; \qquad \text{donc} \qquad \widehat{NMP} = \widehat{QMA}$$

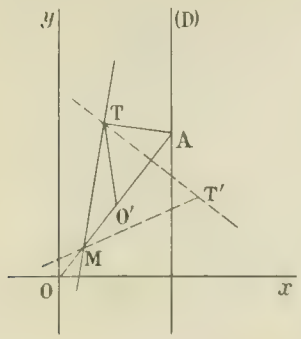


Par conséquent les deux droites MN et MQ sont tangentes à une même conique ayant pour foyers O et A.

Le même raisonnement s'applique aux angles en N et en Q ; donc les tangentes à cette conique, issues de N et de Q autres que celles signalées, sont NP et QP. Il y a donc une conique inscrite dans le quadrilatère MNPQ et ayant pour foyers les points O et A.

Il reste à démontrer que cette conique est indépendante de la direction des deux droites OM et ON. A cet effet, abaissons de A une perpendiculaire AB sur l'une des tangentes MQ, et joignons le point B au point O et au point O', milieu de OA. La longueur O'B est la longueur du demi-axe focal de la conique ; d'autre part, c'est la médiane du triangle BOA, et, comme le point B est le milieu de MQ et que l'angle $\widehat{MOQ}$ est droit, nous avons $OB = MB = QB$. Appliquant dans le théorème précédent, nous trouvons $2\overline{O'B}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = 2\frac{\overline{OA}^2}{4}$, car $\overline{OB}^2 = \overline{AB} \times \overline{MB} = \frac{\overline{OA}^2}{4}$ et $\overline{AB} \times \overline{MB}$ est égal au carré du rayon du cercle (Γ) donc $O'B$ est [illegible] indépendamment de la direction.

Si maintenant on désigne par $2a$ $2b$ les longueurs des deux axes et la distance focale nous avons de



suite, à l'aide des notations employées antérieurement,

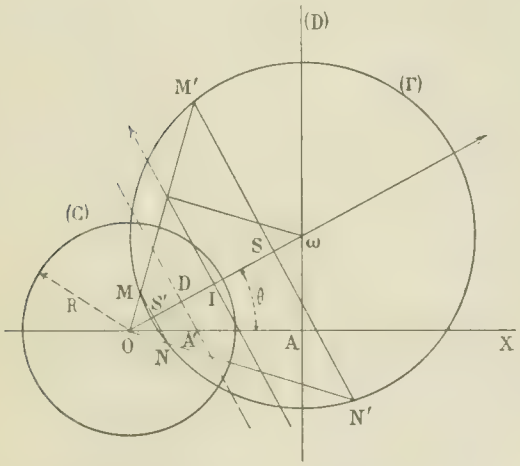
$$4\gamma^2 = a^2 + \lambda^2, \qquad 4\alpha^2 = a^2 + \lambda^2 - 2R^2 \qquad \text{et} \qquad 4\beta^2 = -2R^2.$$

Tels sont les éléments de la conique (S). La dernière égalité montre bien que cette conique est toujours une hyperbole, quand R^2 est positif.

Pour traiter la dernière partie, M. Cans remarque que si MT désigne une tangente commune au cercle (Γ) et à la conique correspondante, (S), le point de contact T avec le cercle est un point du cercle principal de la conique. La corde des contacts relative aux deux tangentes communes, TT′, est l'axe radical du cercle (Γ) et du cercle ayant pour centre O′ et pour rayon α.

Le point M est le pôle de cette droite par rapport au cercle (Γ) et l'on est ramené à trouver le lieu de ce pôle, problème facile et que nous ne développerons pas.

Solution géométrique. — 1° Si l'on transforme par polaires réciproques, en prenant pour cercle de base le cercle (C), le problème revient à chercher le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique transformée du cercle (Γ). Ce lieu est un cercle, dont la polaire réciproque est bien une conique (S) qui a un foyer en O.



2° Soit ω le centre d'un cercle (Γ). Les droites OMM′, ONN′, inclinées à 45° sur Oω nous donnent les tangentes aux sommets MN, M′N′ de la conique (S). En menant le rayon du cercle (Γ) perpendiculaire à MM′, on voit immédiatement que le milieu I de SS′ coïncide avec le milieu de Oω.

Le second foyer réel de (S) est donc le point ω, dont le lieu est la droite (D).

3° L'axe focal de (S) est la droite Oω. Le lieu de I étant la parallèle à (D) équidistante de O et de (D), l'enveloppe de l'axe non focal est la parabole qui a pour foyer O et pour directrice la droite (D).

L'équation polaire du lieu des sommets S, S′ s'obtient très facilement. On a en effet

$$OS + OS' = O\omega = \frac{a}{\cos\theta}, \qquad OS.OS' = \frac{1}{2}\,OM.OM' = \frac{R^2}{2},$$

de sorte que l'équation en r, à laquelle satisfont OS, OS′, est

$$r^2 - \frac{a}{\cos\theta}\,r + \frac{R^2}{2} = 0,$$

cubique circulaire passant en O et ayant pour asymptote la droite (D).

4° D étant le pied de la directrice relative au foyer O d'une conique (S), on a

$$\frac{2}{OD} = \frac{1}{OS} + \frac{1}{OS'} = \frac{2a}{R^2\cos\theta},$$

ou $OD = \frac{R^2}{a}\cos\theta$, ce qui montre que la directrice passe par le pôle A′ de la droite (D) par rapport au cercle (C).

D'autre part, à la simple inspection de la figure, on voit que si (S) est réelle, c'est forcément une hyperbole. En désignant alors par a^2, $-b^2$, les carrés de ses demi-axes, on a

$$b^2 = \overline{OS}.\overline{OS'} = \frac{R^2}{2} \qquad \text{et} \qquad c^2 = a^2 + b^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\theta},$$

d'où

$$\frac{a^2}{c^2} = 1 - \frac{b^2}{c^2} = 1 - \frac{2R^2\cos^2\theta}{a^2}.$$

Pour la conique (S′) dont l'axe focal est perpendiculaire à celui de la précédente, on a

$$\frac{a'^2}{c'^2} = 1 - \frac{2R^2\sin^2\theta}{a^2},$$

[illegible] que

$$\frac{[illegible]}{c^2} + \frac{[illegible]}{[illegible]} = 2\left(1 + \frac{R^2}{[illegible]}\right)$$

Si l'on projette alors un des points de rencontre P des deux coniques en Q, Q' sur les directrices relatives à O, il vient $PQ = \frac{[illegible]}{[illegible]} PO$, $PQ' = \frac{[illegible]}{[illegible]} PO$, d'où

$$\overline{PA}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{PQ'}^2 = 2\left(1 + \frac{R^2}{[illegible]}\right) PO^2$$

$\frac{PO}{PA}$ étant constant, le lieu de P est un cercle.

4° Soient K, z les projections des foyers O, ω de S sur une tangente commune à S et à T, et I son point de rencontre avec $O\omega$, point dont on cherche le lieu

On a

$$\overline{OK} \cdot \overline{Oz} = -\frac{R^2}{2} \qquad \text{et} \qquad Oz = z,$$

[illegible] le rayon du cercle T. Il en résulte que

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{O\omega}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{OK} + z} = \frac{R^2}{R^2 + 2z} = \frac{R^2}{2\overline{O\omega}^2 - R^2}$$

puisque $R^2 + z = \overline{O\omega}^2$.

Remplaçant $\overline{OI}$ par ρ, $\overline{O\omega}$ par $\frac{a}{\cos^2\theta}$, on obtient l'équation polaire du lieu du point de rencontre des tangentes

$$\rho = \frac{a \cos^2\theta}{2a \cos^2\theta - R^2 \cos^2\theta},$$

conique passant au point O.

VASNIER.

ALGÈBRE

987. — *Dans un triangle ABC astreint à avoir les angles à la base B et C aigus, on donne la base BC = a, la hauteur AH = h, issue du sommet A et la somme AB + AC = l des deux autres côtés.*

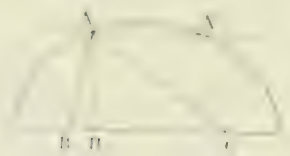
Calculer ces deux côtés AB = x et AC = y.

Discuter et déduire de la discussion le maximum et le minimum de l en supposant qu'on fasse varier cette longueur en laissant a et h invariables.

Indiquer les formes du triangle qui correspondent au maximum et au minimum de l.

(Ecole des Ponts et Chaussées. Cours préparatoires, 1930.)

Le sommet A du triangle est à l'intersection d'une demi-ellipse d'axe focal l ayant pour foyers B et C avec une parallèle à BC menée à la distance donnée h. Les angles B et C du triangle devant être aigus, il faut que la projection H du sommet A tombe entre B et C, ce qui exige que h soit compris entre l'ordonnée focale $\frac{l^2 - a^2}{2l}$ et la longueur du demi-petit axe $\frac{1}{2}\sqrt{l^2 - a^2}$.



La condition de possibilité du problème est donc

$$\frac{l^2 - a^2}{2l} \leq h \leq \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - a^2}$$

ou en déduit

(1) $\qquad l^2 - 2hl + a^2 \leq 0, \qquad$ d'où $\qquad l \leq h + \sqrt{a^2 - h^2}$

et

(2) $\qquad l^2 + a^2 \geq 4h, \qquad$ d'où $\qquad l \geq \sqrt{a^2 - 4h^2}$

Si cette double condition est remplie, le problème est possible et admet deux solutions qui n'en

font qu'une en réalité. Pour $l = \sqrt{a^2 + 4h^2}$ (minimum), les deux points A et A′ sont confondus et on a un triangle isocèle ; pour $l = h + \sqrt{a^2 + h^2}$ (maximum), le point H vient en B ou C et on a un triangle rectangle.

Nous allons retrouver ces résultats évidents géométriquement par la discussion algébrique du problème.

Soient x et y les côtés inconnus ; nous avons pour les calculer les équations

$$x + y = l, \qquad x^2 + y^2 - 2xy \cos A = a^2, \qquad xy \sin A = ah.$$

La seconde équation peut s'écrire

$$a^2 = (x + y)^2 - 2xy(1 + \cos A) = l^2 - 4xy \cos^2 \frac{A}{2},$$

d'où

$$4xy \cos^2 \frac{A}{2} = l^2 - a^2;$$

la troisième donne de même

$$2xy \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = ah;$$

on en déduit

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{2ah}{l^2 - a^2}.$$

et par suite

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \frac{(l^2 - a^2)^2}{(l^2 - a^2)^2 + 4a^2h^2}.$$

d'où enfin

$$xy = \frac{(l^2 - a^2)^2 + 4a^2h^2}{4(l^2 - a^2)};$$

x et y sont donc les racines de l'équation du second degré

$$U^2 - lU + \frac{(l^2 - a^2)^2 + 4a^2h^2}{4(l^2 - a^2)} = 0.$$

Pour que ces racines soient acceptables, il faut d'abord qu'elles soient réelles et positives et de plus qu'elles vérifient la double inégalité

$$|x - y| < a < x + y.$$

Il faut en outre que les angles B et C correspondants soient aigus. Or, on a

$$x^2 = a^2 + y^2 - 2ay \cos C, \qquad \text{d'où} \qquad \cos C = \frac{a^2 + y^2 - x^2}{2ay}$$

$$y^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos B, \qquad \text{d'où} \qquad \cos B = \frac{a^2 + x^2 - y^2}{2ax};$$

il faut que les valeurs de ces cosinus soient positives, ce qui exige

$$|x^2 - y^2| < a^2,$$

ou, en remarquant que $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = l(x - y)$,

$$|x - y| < \frac{a^2}{l}.$$

La condition de réalité des racines est

$$l^2 - \frac{(l^2 - a^2)^2 + 4a^2h^2}{l^2 - a^2} \geq 0.$$

Cette condition remplie, il faut que les deux racines soient positives, ce qui exige $l > a$ (condition évidente *a priori*). Il reste à exprimer que $|x - y|$ est inférieure à la fois à a et à $\frac{a^2}{l}$ $\left(\frac{a^2}{l} < a\right.$, il suffit d'exprimer que $\left.|x - y| < a\right)$ ce qui donne

$$l^2 - \frac{(l^2 - a^2)^2 + 4a^2h^2}{l^2 - a^2} < \frac{a^4}{l^2}.$$

Finalement, on est ramené à discuter la double inégalité

$$0 \leqq l^2 - \frac{l^2 - a^2 l^2 + 4a^2h^2}{l^2 - a^2} \leqq \frac{a}{l^2},$$

l étant supposé supérieur à a. La première partie de l'inégalité peut s'écrire, toutes réductions faites,

$$l^2 \geqq a^2 + 4h^2, \qquad \text{d'où} \qquad l \geqq \sqrt{a^2 + 4h^2}$$

condition qui entraîne $l \geqq a$.

La seconde partie donne de même

$$l^2 \leqq a^2 + 4h^2 l^2,$$

d'où, puisqu'on a $l > a$,

$$l^2 - a^2 \leqq 2hl,$$

$$l^2 - 2hl - a^2 \leqq 0.$$

Ce qui exige que l soit inférieur à la racine positive du trinome $l^2 - 2hl - a^2$, c'est-à-dire,

$$l \leqq h + \sqrt{h^2 + a^2}.$$

On vérifie sans peine que $\sqrt{a^2 + 4h^2}$ est toujours plus petit que $h + \sqrt{h^2 + a^2}$. La condition de possibilité du problème est donc

$$\sqrt{a^2 + 4h^2} \leqq l \leqq h + \sqrt{h^2 + a^2}.$$

1° *Cas du minimum* : $l = \sqrt{a^2 + 4h^2}$. La quantité sous le radical est nulle et on a un triangle isocèle dont les côtés sont

$$x = y = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}.$$

2° *Cas du maximum* : $l = h + \sqrt{h^2 + a^2}$. La différence $x - y$ est égale à $\pm \frac{a^2}{l}$: il en résulte que $\cos C$ ou $\cos B$ est égal à 0 et que le triangle est rectangle. D'ailleurs les côtés sont donnés par l'équation

$$U^2 - (h - \sqrt{h^2 + a^2})U - h\sqrt{h^2 + a^2} = 0,$$

d'où on tire

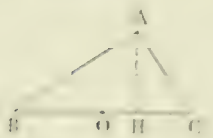
$$x = h, \qquad y = \sqrt{h^2 + a^2} \qquad \text{(triangle rectangle en B)}$$

ou

$$x = \sqrt{h^2 + a^2}, \qquad y = h \qquad \text{(triangle rectangle en C)}.$$

Remarque. — On aurait pu prendre pour inconnue $x = \overline{OH}$; l'équation du problème aurait été

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + h^2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + h^2} = l,$$



d'où l'on tire

$$x = \frac{l^2 \sqrt{l^2 - a^2 - 4h^2}}{4l^2 - a^2}.$$

On ferait la discussion en écrivant que cette valeur est positive et inférieure à $\frac{a}{4}$ (x réel et inférieur en valeur absolue à $\frac{a}{2}$).

P. L.

Bonnes solutions MM. H. Sausse, à Dieppe, et P. Lemoyne.

CONCOURS DE 1901 (*Suite*).

ÉCOLE CENTRALE (**Première session**).

Géométrie analytique

1055. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy :

1° Démontrer que les coniques du faisceau Δ représenté par l'équation

$$(m^2-1)y^2-2nxy-2py-2mpx-p^2=0,$$

où m est variable, ont un foyer commun, une asymptote commune et que la directrice correspondante au foyer commun passe par un point fixe.

2° Déterminer les points par lesquels passent deux hyperboles équilatères du faisceau et ceux par lesquels n'en passe qu'une ; puis, prenant un point (α,β) sur le lieu de ces derniers, exprimer en fonction de α et β les coordonnées des centres des deux coniques qui passent par le point (α,β).

3° Trouver le lieu des foyers réels des coniques Δ et celui des pieds des directrices correspondantes sur l'axe focal (le lieu se compose de deux courbes distinctes). Donner une construction géométrique de la tangente en un point quelconque.

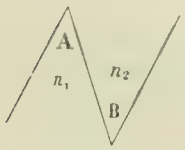
4° Trouver le lieu des symétriques des foyers réels par rapport aux asymptotes des coniques Δ (le lieu se compose de deux courbes distinctes) et celui de leurs sommets réels. On construira géométriquement la tangente au point $(x=0,\ y=-p)$ de ce dernier.

(*3 juillet, de 7 h. à 11 h.*)

Physique et Chimie.

I. — Appareil du général Morin. — Comment vérifie-t-on sur les courbes : 1° La loi des espaces ; 2° La loi des vitesses.

II. — **1056.** — Deux prismes d'angles A et B, d'indices n_1 et n_2, dont les arêtes sont parallèles et opposées, se touchent par une face ;



Ecrire les équations qui règlent la marche, à travers ce système, d'un rayon de lumière homogène situé dans un plan perpendiculaire aux arêtes ;

A quoi se réduisent ces équations si les angles A et B sont très petits, ainsi que l'angle d'incidence ; écrire, dans ce cas, la condition à laquelle doivent satisfaire les angles A et B pour que le système se comporte comme une lame à faces parallèles.

III. — **1057.** — Soit une chambre close ayant 80 mètres cubes de capacité renfermant de l'air formé de $20^{vol},8$ d'oxygène et $79^{vol},2$ d'azote, mesuré à 0° et 760^{mm} de pression. Elle est éclairée par deux becs de gaz brûlant chacun 192 litres de gaz de houille à l'heure, et, une personne l'habite pendant 5 heures.

1° Quelle sera, après ces cinq heures, la composition de l'air confiné ?

2° Pour rendre à cet air sa composition initiale, quel poids de bioxyde de baryum pur et sec faudra-t-il décomposer ?

3° Avec la baryte résultant de cette opération, on absorbera le gaz carbonique et la vapeur d'eau. Quel poids de baryte faudra-t-il employer pour chacune de ces opérations ?

4° On se débarrassera de l'excès d'azote avec un appareil à étincelles analogue à celui de Cavendish dans lequel on aura placé une certaine quantité de baryte en dissolution. Quelle sera l'augmentation de poids de ce produit ?

Le gaz de houille contient les corps principaux suivants mesurés en volume :

Méthane (ou formène, ou protocarbure d'hydrogène).	50
Hydrogène	35
Oxyde de carbone.	8
Azote.	3
Autres produits dont on ne tiendra pas compte . . .	4

On rappelle qu'en moyenne un homme consomme par heure 25 litres d'oxygène et exhale 20 litres d'anhydride carbonique et 30 grammes de vapeur d'eau.

Pour simplifier, on supposera que la température et la pression n'ont pas varié.

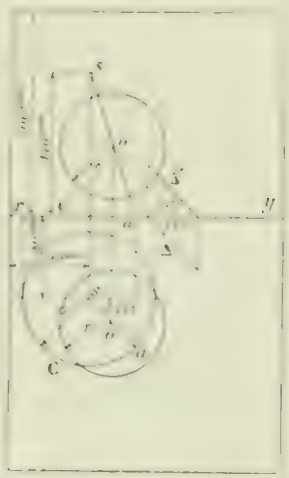
Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

(*3 juillet, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Épure.

1058. — On demande de déterminer par ses deux projections la courbe d'intersection d'une sphère avec un cône de révolution, les deux surfaces étant définies de la manière suivante :

1° Le cône de révolution a pour base le cercle (C, C') du plan horizontal et pour sommet le point s, s' de cote donnée.



2° La sphère de rayon $r = 50^{mm}$, a pour centre le point (o, o') milieu de la génératrice donnée $(sa, s'a')$ du cône (voir la figure).

Dans la mise au net de cette première partie de l'épure qui se fera à l'encre, on supposera les deux corps opaques, et on représentera par un trait pointillé les lignes cachées soit en projection horizontale soit en projection verticale.

Cela fait, on déterminera en projection horizontale seulement les ombres propres et portées soit des deux corps entre eux soit des deux corps sur le plan horizontal, en les supposant éclairés par des rayons lumineux parallèles à la direction donnée (Δ, Δ').

Les courbes d'ombres propres et celles d'ombres portées se traceront au crayon noir. Le trait sera continu pour les courbes qui sont cachées. Enfin les portions des surfaces qui sont dans l'ombre devront être recouvertes de hachures faites à l'encre bleue.

Titre extérieur : COMPTE DESCRIPTIVE.

Titre intérieur : CÔNE ET SPHÈRE.

Cadre de 27^{cm} sur 45^{cm}. Ligne de terre xy parallèle aux petits côtés du cadre à 200^{mm} du côté supérieur.

(1 juillet, de 7 h. à 10 h.)

Trigonométrie.

CALCUL

I. — **1059.** — Calculer les arcs positifs, inférieurs à 360° qui vérifient la formule

$$\cos^2 \frac{2x}{5} = \frac{\sqrt{a \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\sin \beta \cot \gamma},$$

ou $a = 0{,}0878143$, $\alpha = 23°42'53'',5$, $\beta = 131°13'45'',7$, $\gamma = 125°26'38'',5$.

PROBLÈME

II. — **1060.** — 1° Calculer les angles B, C d'un triangle ABC connaissant l'angle A ainsi que le rayon R du cercle circonscrit et le rayon r du cercle inscrit.

2° Condition de grandeur entre les données A, R, r pour que le problème soit possible.

3° Résolution graphique du triangle ABC ; discussion de la construction.

4° Dans le cas particulier où le triangle ABC est isocèle (AB = AC), calculer, en fonction de R et de r, la distance du centre du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit.

Déduire du résultat la construction d'un triangle isocèle connaissant les rayons des cercles inscrit et circonscrit.

(1 juillet, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1061. — On considère les triangles inscrits dans une ellipse, et tels que leur centre de gravité soit au centre de l'ellipse. Démontrer que les normales aux trois sommets de ce triangle sont concourantes, et trouver le lieu de leur point de concours.

1062. — Lieu des foyers des coniques normales aux quatre côtés d'un rectangle.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMP. COMTE-JACQUET.

11e Année. N° 12 Septembre 1901.

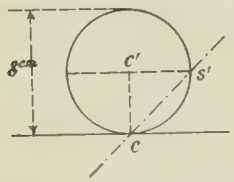
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR L'ÉPURE
DONNÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1901

[Le but de la présente note est d'indiquer rapidement les principales méthodes que l'on pouvait employer pour résoudre cette épure et de montrer brièvement les défauts et les avantages de ces méthodes, leur discussion complète étant beaucoup trop volumineuse. La marche que nous allons suivre n'est autre que celle que doit suivre la personne à qui l'on donne l'épure à faire.]

Intersection d'un cône et d'un hyperboloïde de révolution. — *Le cône a pour base un cercle de front* (c, c') *situé dans la partie supérieure du plan vertical, tangent au plan horizontal, et qui a 8 centimètres de diamètre. Son sommet* (s, s') *est en avant du cercle, à une distance égale au diamètre, et sur la ligne de bout menée par le point* s' *le plus à droite du cercle.*



Cette ligne de bout sert de génératrice à l'hyperboloïde : l'axe de révolution est la droite du plan horizontal qui est confondue avec la ligne cs' *de l'épure.*

Le point c *sera placé à 15 centimètres à gauche du bord droit de la feuille, et à 15 centimètres au-dessous du trait le plus bas de l'en-tête.*

On demande de représenter en traits noirs la projection horizontale du solide commun au cône et à l'hyperboloïde.

On indiquera en traits rouges les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point, ainsi que les points remarquables.

Remarques générales. — Les deux surfaces sont du second degré ; elles ont une génératrice commune ; l'intersection se composera donc de cette droite et d'une cubique. Cette cubique passe par le sommet du cône, la tangente en ce point est la deuxième génératrice du cône contenue dans le plan tangent à l'hyperboloïde. Elle n'a pas de point double réel, sinon les surfaces seraient bitangentes et se couperaient suivant deux courbes planes, dont l'une se composerait de la génératrice commune et d'une autre droite. Cette droite serait la deuxième génératrice de l'hyperboloïde qui passe par le sommet du cône ; il y aura donc lieu de vérifier de suite si cette génératrice n'appartient pas au cône soit en faisant la construction de la tangente au sommet, soit par tout autre moyen. Le premier est préférable puisqu'on sera toujours obligé de faire cette construction. Pour la clarté de l'exposition nous ne parlerons que plus tard des méthodes à employer pour cette détermination. On doit d'ailleurs se servir pour cela d'une méthode semblable à celle employée pour le point courant, à moins que dans le cas particulier on n'ait une façon beaucoup plus simple d'opérer.

La cubique n'a pas non plus de point double en projection horizontale, car les plans diamétraux des surfaces, conjugués de la verticale, sont deux plans horizontaux différents.

Enfin quoique la projection verticale ne fût pas exigée, on pouvait remarquer que la courbe étant projetée sur ce plan parallèlement à son asymptote, sa projection est une conique et que cette conique est une ellipse.

Choix d'une méthode en général. — Ces remarques étant faites, on procédera à la recherche de la méthode à employer. Cette discussion se fait en crayonnant rapidement sur un bout de papier les constructions qu'entraine chaque méthode examinée. Une bonne méthode doit être graphiquement précise, les constructions doivent bien s'enchaîner tant pour la construction du point que pour celle de la tangente en ce point, exiger le minimum de constructions pour que l'épure ne présente pas l'aspect d'une toile d'araignée ; ces conditions rendent l'épure très nette et très lisible. L'épure que nous donnons ici ne remplit pas complètement ces conditions la nécessité d'expliquer quelques points ne nous ayant pas permis d'employer la méthode la plus simple et nous

avant de la surcharger le dessin). Ce brouillon cause une légère perte de temps qui est largement rattrapée par la rapidité avec laquelle on exécute l'épure et évite dans le dessin soigné de celle-ci toute fausse construction. Il faut soigneusement éviter de partir tout de suite en guerre sur son épure, sinon on arrive à un fouillis où l'on ne reconnaît plus rien soi-même et on salit énormément sa feuille.

On tire encore un autre avantage de cette discussion. A côté d'une méthode précise mais un peu lente, on en trouve souvent une très rapide mais moins précise. On détermine par la deuxième très rapidement et en dessinant très légèrement la forme générale de la courbe. On voit sur cette courbe les points qu'il est important de connaître, celui qui se présentera le mieux pour être gardé comme point courant dans la mise à l'encre. On évite ainsi d'être obligé de recommencer la construction si les lignes ne se présentent pas d'une façon lisible.

Méthodes particulières au problème présent. — Les deux méthodes générales en présence sont :

1° Prendre une génératrice quelconque du cône ou de l'hyperboloïde et chercher son intersection avec l'autre surface sans tenir compte des conditions particulières du problème. Cette solution est à rejeter ; les solutions générales, très bonnes lorsqu'on a affaire à une droite isolée quelconque, sont assez compliquées, et ne s'enchaînent pas, ce qui complique l'épure ;

2° Couper par des surfaces auxiliaires. Ces surfaces auxiliaires doivent être simples ; ce seront donc des plans, des sphères, des cônes ou des cylindres. Elles doivent donner des sections simples dans les surfaces, de préférence des circonférences et des droites, seules précises graphiquement. Les surfaces n'étant pas de révolution, les sphères ne nous donneront rien. L'emploi des cylindres et des cônes conduit à des constructions compliquées ; il faut, en effet, rechercher celles de ces surfaces qui coupent à la fois le cône et l'hyperboloïde suivant des courbes planes. Il reste les plans.

Parmi les plans, nous remarquons de suite ceux qui passent par la génératrice commune ; ils coupent chacune des deux surfaces suivant cette génératrice et suivant une autre droite. Parmi les autres plans nous en avons bien qui coupent l'une des surfaces suivant un cercle, mais ils coupent l'autre suivant des paraboles, même en évitant, comme nous l'indiquons, la construction de toutes les paraboles il faut toujours se servir d'une d'entre elles et cela est peu précis au point de vue graphique. Ces méthodes sont d'ailleurs compliquées, et par suite à rejeter. Quant à celle des plans dont les sections sont projetées suivant des cercles il fallait un peu chercher pour la trouver.

D'ailleurs, dans le cas présent, cette discussion générale était inutile ; on devait songer de suite aux plans passant par la génératrice commune, solution classique du problème. Il n'y avait que leur utilisation qui était à discuter.

MÉTHODE DES PLANS SÉCANTS PASSANT PAR LA GÉNÉRATRICE COMMUNE

Recherche du point courant. — Chacun de ces plans coupe les deux surfaces suivant la génératrice commune et suivant une autre droite ; le point où ces deux dernières droites se coupent est un point de l'intersection. Les plans sécants étant de bout, ces génératrices des deux surfaces ont même projection verticale. On pourra donc suivre deux méthodes :

(*A*) se donner une génératrice de l'hyperboloïde et chercher la génératrice du cône qui a même projection verticale ;

(*B*) se donner une génératrice du cône et chercher celle de l'hyperboloïde qui a même projection verticale.

La détermination des projections d'une génératrice du cône étant facile, nous ne nous en occuperons pas ; les deux méthodes reviennent alors à

(*A*) déterminer les deux projections d'une génératrice de l'hyperboloïde ;

(*B*) déterminer la projection horizontale d'une génératrice de l'hyperboloïde connaissant sa projection verticale.

(*A*) 1° On a tout de suite la projection horizontale d'une génératrice de l'hyperboloïde en menant une tangente à son contour apparent ; on aura la projection verticale en remarquant que sa trace horizontale est son point de contact avec le contour apparent. On devra bien se garder de mener la tangente au sentiment, ce qui manquerait complètement de précision. Elle est d'ailleurs déterminée de façon peu précise, même en employant les moyens rapides de construction au moyen des asymptotes.

2° On prend un plan vertical auxiliaire parallèle à celui du cercle de gorge, on se donne la projection de la génératrice sur ce plan, tangente à ce cercle, et on détermine sa projection horizontale en rappelant le point de contact sur la trace horizontale du cercle de gorge, et en construisant le point où elle coupe la génératrice

commune, car elle doit être d'un système différent de celui de celle-ci, que nous nommerons premier système, ou bien en cherchant le point où elle rencontre un parallèle.

On aura la projection sur le plan vertical en faisant le changement de plan soit pour un de ces points (sur l'épure on l'a fait pour le point du cercle de gorge), soit pour la trace horizontale, qui servira d'ailleurs pour la détermination du contour apparent et même pour la construction de la tangente.

(*B*) 1° Etant donnée la projection verticale, on a de suite la trace horizontale de la génératrice cherchée qui se trouve sur l'hyperbole de contour apparent. En menant par ce point la tangente à l'hyperbole, on a la projection horizontale cherchée.

2° Servons-nous d'un plan auxiliaire parallèle au plan du cercle de gorge. On cherche la trace sur le plan du cercle de gorge du plan sécant; on remarquera pour cela que cette trace passe par le point fixe où la génératrice commune coupe le plan du cercle de gorge. On aura un autre point, soit à l'intersection de la trace horizontale du plan de gorge et de celle du plan auxiliaire, soit en faisant le changement de plan pour le point où la trace du plan sécant rencontre l'intersection du plan vertical et du plan de gorge, soit en coupant par un plan de profil (la projection horizontale du point de la trace contenu dans ce plan est à l'intersection des traces du plan de profil et du plan de gorge, et sa cote est celle du point où se coupent les traces du plan de profil et du plan sécant). La trace déterminée ainsi coupe le cercle de gorge en un point qui est le point de contact de la génératrice cherchée avec ce cercle. On détermine sa projection horizontale comme précédemment. Cette méthode est un peu plus longue que (*A*, 2°).

3° On évite de tracer cette projection horizontale en projetant sur le plan auxiliaire la génératrice du cône; on a alors la projection sur le plan du cercle de gorge du point d'intersection cherché et on le rappelle sur la génératrice du cône. Cette méthode est d'ordre analogue. Avoir bien soin de faire le changement de plan directement et de ne pas se servir de la projection (ellipse) de la directrice du cône pour avoir celle de la génératrice du cône.

4° On détermine comme précédemment la trace du plan sécant sur un parallèle de l'hyperboloïde; par le point où cette trace coupe cette circonférence, on mène une tangente au cercle de gorge. On projette ensuite horizontalement. Il y a alors à faire attention à mener la génératrice du système convenable, d'où légère infériorité de méthode.

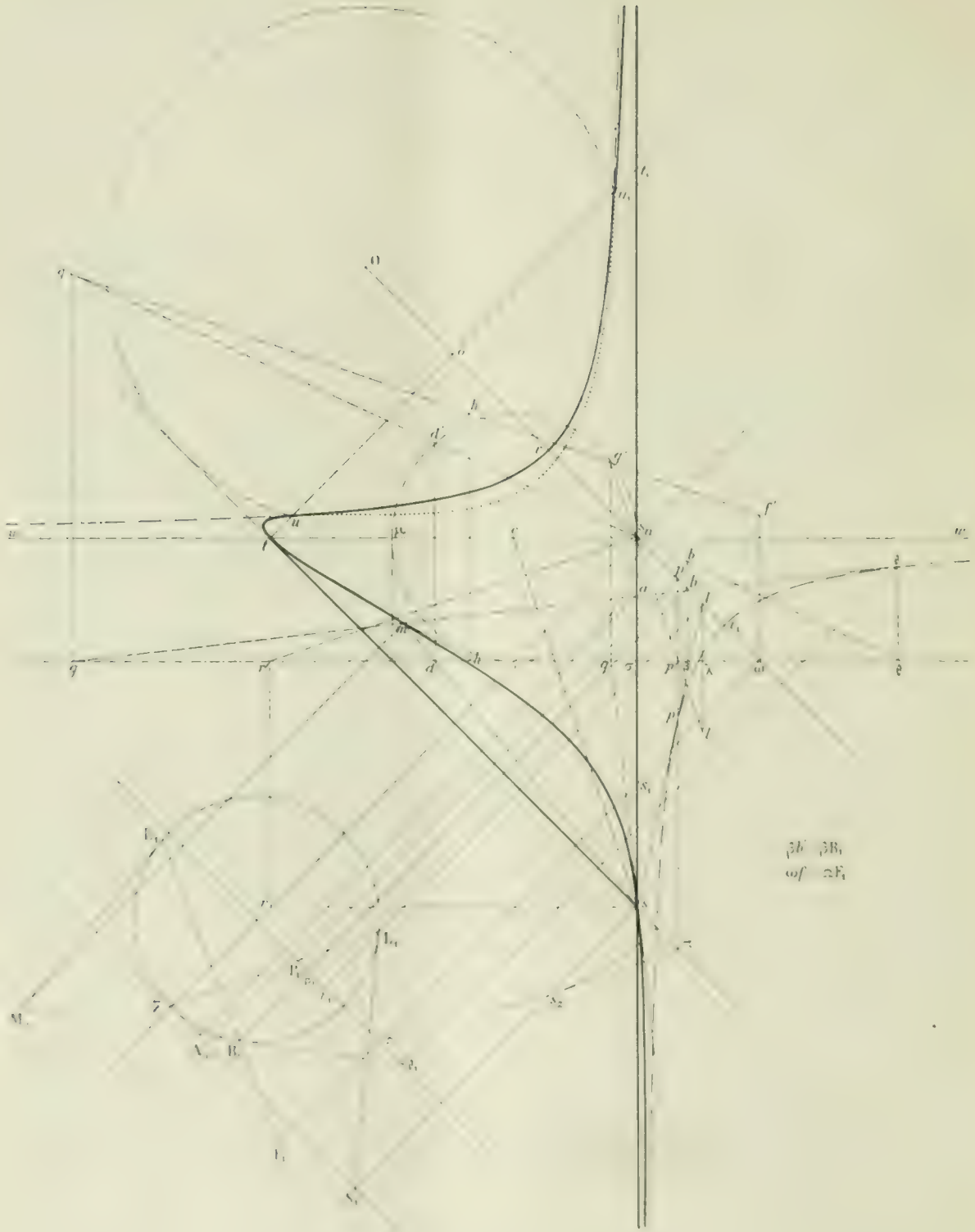
5° On emploie deux parallèles, on détermine la trace du plan auxiliaire directement pour un de ces parallèles et pour l'autre en menant par le point fixe correspondant une parallèle à la première. Ces deux droites coupent les circonférences correspondantes en un point que l'on rappelle sur les traces horizontales des parallèles ; on a ainsi deux points de la projection horizontale de la génératrice cherchée.

6° On remarquera que les projections verticales des génératrices du premier système passent par le point s'_1, symétrique de s' par rapport à la ligne de terre, que la droite $vos'c'$ représente les deux projections confondues d'une génératrice du deuxième système, et par suite, que les deux projections d'une génératrice du premier système se coupent sur cette droite. On a d'ailleurs une génératrice G_1 de ce premier système projetée suivant $s'c'$ et sa symétrique par rapport à la ligne de terre. La remarque précédente permet de construire les projections verticales des deux génératrices G_2, G_3 du premier système dont les projections horizontales sont les tangentes parfaitement déterminées aux sommets v, v_1 de l'hyperbole de contour apparent. En rappelant sur les projections horizontales de deux des trois génératrices G_1, G_2, G_3 les points où leurs projections verticales sont coupées par la trace verticale du plan sécant, on aura la projection de la génératrice cherchée. On prend ceux de ces deux points qui sont dans les limites de l'épure. C'est pourquoi on détermine G_2 et G_3 et non une seule de ces droites.

7° Si on considère la génératrice (ss', s') de l'hyperboloïde, son point central est projeté horizontalement en s', son plan central est le plan horizontal $s'c'$, et le paramètre de distribution est le rayon $c's'$, du cercle de gorge.

Le plan sécant $s'd'$ est un plan tangent à l'hyperboloïde en un point de s,s', et l'angle qu'il fait avec le plan central est $d's'c'$. La parallèle à la trace $s'd'$ du plan auxiliaire menée par $s'c'$ coupe donc s,s' au point de contact de ce plan, c'est-à-dire au point où la génératrice cherchée rencontre ss'. Pour avoir un deuxième point de la génératrice, on remarquera que l'on a la projection verticale de sa trace horizontale, et que la distance de la projection horizontale de ce point à l'asymptote de l'hyperbole de contour apparent est la moitié de celle du premier point trouvé à cette droite. Cette méthode est très rapide et très élégante ; toutes les constructions sont dans les limites de l'épure.

8° On remarque que les sections de l'hyperboloïde par des plans verticaux dont la trace est inclinée à $\frac{1}{2}$ sur la ligne de terre (direction $\mu\sigma$) se projettent verticalement suivant des circonférences On tracera deux de ces circonférences qui passent toutes par s' et en rappelant les points où la trace verticale du plan auxiliaire



les coupe sur la trace horizontale des plans correspondants, on aura la génératrice cherchée. Toutes les constructions tiennent encore dans l'épure.

Tangente. — Le plan tangent au cône est déterminé par la tangente à la directrice qui est la trace verticale de ce plan, projetée horizontalement suivant la ligne de terre, et par la génératrice du cône. On peut donc déterminer sa trace sur un plan quelconque. Le plan tangent à l'hyperboloïde sera déterminé lorsqu'on aura construit la génératrice du premier système passant par le point considéré. Il faut s'abstenir de déterminer cette génératrice en menant par m une tangente à l'hyperbole de contour apparent, mais bien en déterminer un autre point.

Remarquons que dans les méthodes précédentes ou bien (I) nous avons déterminé la projection de la génératrice de l'hyperboloïde sur le plan du cercle de gorge (A, 2°; B, 2°; B, 3°; B, 4°), ou bien (II) nous avons simplement déterminé sa projection horizontale.

(I) Dans le premier cas, pour que la méthode soit enchaînée à celle employée pour le point courant, on se sert de ce plan auxiliaire de projection. A cet effet rappelons m en M_1, sur la projection sur ce plan de la génératrice déterminée et menons par M_1 la seconde tangente au cercle de gorge, on aura ainsi la projection sur ce plan de la génératrice du premier système passant par m. Il est inutile de chercher les projections de cette droite pour déterminer ses traces sur un plan quelconque. Il suffit de remarquer que la corde de contact B_1E_1 est la trace sur le plan du cercle de gorge du plan tangent à l'hyperboloïde, cette droite étant projetée horizontalement sur la trace horizontale vs' du plan du cercle de gorge, d'où :

1° On cherche la trace de cette droite sur un plan quelconque (sur l'épure on l'a fait pour le plan vertical en remarquant que ce point est celui où elle rencontre la droite $\omega f'$, ΩF, d'intersection du plan du cercle de gorge et du plan vertical), et on la joint à la trace sur ce plan de la génératrice du deuxième système. Il y a avantage à employer un plan de front, car si ce plan est le plan vertical on a déjà la trace du plan tangent au cône, s'il est quelconque on mène par la trace de la génératrice du cône une parallèle à la tangente à la circonférence, d'où économie de constructions.

2° On cherche la trace du plan tangent au cône sur le plan du cercle de gorge ou sur un plan parallèle, la trace du plan tangent à l'hyperboloïde est toute trouvée ou facile à construire.

On emploiera l'une ou l'autre de ces méthodes suivant qu'elle s'appliquera mieux.

(II) La génératrice de l'hyperboloïde est seule donnée. On commence par déterminer sa projection verticale en rappelant m en m' sur la projection verticale et joignant m' au point s'_1 symétrique de s' par rapport à la ligne de terre, on détermine sa projection horizontale par la méthode que l'on a employée pour le point courant.

En particulier, pour (B, 6°), on joint m au point où la projection verticale rencontre la droite $s'c'$.

Pour (B, 7°) on remarquera que tout ce que nous avons dit pour s, s' et les génératrices du deuxième système s'applique aux génératrices du premier système combinées avec la symétrique (ss', s'_1) de la génératrice commune par rapport au plan horizontal. En menant par c' une parallèle à la projection verticale on aura le point où la génératrice commune coupe cette génératrice de bout de l'hyperboloïde.

(III) Par les normales. On mène le parallèle du point m. La normale au point où ce parallèle coupe la génératrice s, s' est projetée suivant la perpendiculaire à s, s' au point où la trace du parallèle rencontre cette droite. Cette normale coupe l'axe de l'hyperboloïde en un certain point qui, joint au point m, donne la normale en m. On peut alors soit déterminer le plan tangent à l'hyperboloïde qui est perpendiculaire à cette droite, soit chercher la normale au cône. Les projections de cette normale sont les perpendiculaires abaissées de (m, m') sur la tangente au cercle c', et sur la trace du plan tangent au cône sur un plan horizontal, par exemple celui passant par le sommet du cône. On détermine la trace du plan de ces normales sur un plan horizontal et par m, on mène une perpendiculaire à cette trace. Cette méthode, trop longue, n'était pas à employer.

(IV) On pouvait aussi construire le cône tangent à l'hyperboloïde le long du parallèle de m. Le plan tangent est déterminé par la génératrice de ce cône qui passe par m et la tangente au parallèle en ce point.

Remarque. — On voit que la méthode (B, 5°) ne s'enchaîne avec aucune de celles-ci.

Tangente au sommet du cône. — 1° [A, 1°; B, 1°] On mène par le sommet s la tangente sp au contour apparent de l'hyperbole et on cherche sa projection verticale, d'où la génératrice du cône.

2° [A, 2°; B, 2°; B, 3°; B, 4°]. On projette s en s_1 sur le plan auxiliaire, on mène par s_1 une tangente au cercle de gorge et on cherche la projection verticale de cette tangente, comme nous l'avons indiqué, en faisant le changement de plan pour L_1 ou pour P_1 qui est un point de la trace horizontale du plan tangent à l'hyperboloïde.

3° [B, 5°; B, 6°; B, 8°]. On coupe par le parallèle de s, on mène la tangente $s_2\pi$ à ce parallèle; le point π

où cette tangente coupe la trace horizontale du parallèle appartient à la trace horizontale, perpendiculaire à la ligne de terre, du plan tangent, d'où sa trace verticale.

4° (*B*, 6° ; *B*, 8°) On mène la normale en *s*, (*sr*, *s'r'*) : la trace verticale du plan tangent est perpendiculaire à la projection verticale de cette normale.

5° (*B*, 7°) La trace verticale du plan tangent est la parallèle à *sc'* menée par *s'*.

De cette trace verticale on déduit la tangente *sq*. Toutes ces constructions sont indiquées sur l'epure.

Point sur le contour apparent du cône. — Si on coupe par le plan horizontal passant par la génératrice commune, il coupe le cône suivant son contour apparent, et l'hyperboloïde suivant les génératrices projetées horizontalement en *ss'*, *s'c'*, les points sur le contour apparent sont donc *s* et *t*.

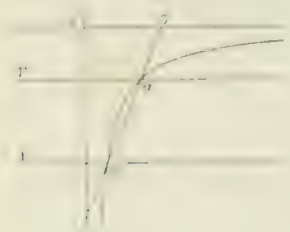
Point sur le contour apparent de l'hyperboloïde. — Ces points sont dans le plan horizontal : ils sont donc à l'intersection de l'hyperbole de contour apparent de l'hyperboloïde et de la trace horizontale du cône. Cette méthode exigeant le tracé de l'hyperbole trace du cône, elle n'est pas précise au point de vue graphique. On peut éviter le tracé de cette hyperbole et même de se servir de celle de contour apparent de l'hyperboloïde.

Remarquons que l'hyperbole de contour apparent est la trace sur le plan horizontal du cône de révolution ayant son sommet projeté horizontalement en *s'* et situé dans le plan horizontal du sommet du cône et pour axe une perpendiculaire à l'axe de l'hyperboloïde et pour génératrice la génératrice commune.

Ce cône et le cône donné se coupent suivant une courbe qui percera le plan horizontal aux points cherchés. Ces deux cônes sont tangents tout le long d'une génératrice (*ss'*), ils se coupent donc suivant une courbe plane. Le plan horizontal des sommets est un plan principal commun, la projection horizontale de cette courbe est donc une droite. De plus les parallèles du cône de révolution étant des plans antiparallèles pour le cône donné, cette courbe est une circonférence. Les génératrices *s'c'*, *st* des deux cônes se coupent au point *t*, la trace du plan est donc tt_1. Rabattons-le autour de cette droite : la circonférence se rabat en O et les deux points cherchés sont *u*, u_1.

AUTRES MÉTHODES

1° Si l'on coupe par des parallèles de l'hyperboloïde les sections du cône sont des paraboles : on évite de tracer toutes ces paraboles en les projetant coniquement avec *s* comme point de vue sur un de ces parallèles A. Toutes les sections du cône seront projetées suivant la parabole correspondant à ce parallèle, les sections de l'hyperboloïde sont projetées suivant des cercles ayant leurs centres sur une même droite perspective de l'axe de l'hyperboloïde et passant par le point où la génératrice commune perce le plan P. Pour la tangente, il faut employer la méthode des normales.



2° On coupe par des plans de front. Les sections du cône sont alors des paraboles dont les projections horizontales ont pour axe la ligne de terre et qui passent toutes par *s*. On se réduit encore à une seule parabole par des projections coniques sur un plan de front P, mais maintenant le point de vue est variable ; c'est le point σ où l'asymptote *s'c'* dans le plan horizontal est rencontrée par la droite qui joint les points où les traces des plans sécants coupent l'hyperbole de contour apparent.

Les tangentes sont déterminées par les normales. On pouvait aussi prendre les sections antiparallèles d'une façon analogue.

3° On transporte le cône asymptote parallèlement à lui-même de manière que son sommet soit sur *s*, *s'*. L'intersection de ce cône et du cône donné est une conique située dans un plan vertical dont la trace est inclinée à 1/3 sur la ligne de terre ($t\sigma$). Les plans verticaux parallèles à ces directions coupent donc les surfaces suivant des sections semblables, qui, projetées coniquement sur le plan vertical avec *s* comme centre deviennent des cercles.

On peut prendre aussi leurs projections obliques sur un plan vertical, plan cyclique pour les cylindres ayant pour bases ces coniques et pour génératrices les projectantes.

4° La projection verticale était une ellipse ; on en connaissait de suite deux points *a* et *s'* et la tangente en *s'* ; on pouvait donc la construire. En rappelant sur les projections horizontales des génératrices du cône les points où leurs projections verticales coupaient l'ellipse, on avait la projection horizontale de la courbe.

Pour la tangente, on avait sa trace verticale au point de rencontre de la tangente à l'ellipse et de celle au [illegible]

Conclusion — Les méthodes (*B*, 7°) et (*B*, 8°) demandent un peu de réflexion pour un examen, mais

les autres (A, 2°) (B, 2°) et (B, 6°) sont classiques ; elles se présentaient d'elles-mêmes et de toutes (B, 6°) était certes la préférable, n'exigeant que la règle et l'équerre, ensuite (A, 2°) et (B, 2°) étaient les plus simples.

Quant à la ponctuation, elle ne présentait aucune difficulté.

E. B.

NOTES DIVERSES

par M. **Guérithault**, élève de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

1° *Lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans une ellipse.*

Prenons pour axes les axes de l'ellipse et soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de cette ligne. Le centre d'un triangle équilatéral est à la fois le centre du cercle inscrit, celui du cercle circonscrit et celui du cercle conjugué au triangle.

Si nous représentons par $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \rho^2 = 0$ l'équation du cercle inscrit, celle du cercle conjugué au triangle sera $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2\rho^2 = 0$.

Il reste à exprimer maintenant que l'ellipse est harmoniquement circonscrite au second cercle et qu'elle est circonscrite à un triangle circonscrit au premier cercle, ce qui donne les deux conditions

$$-2\rho^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = E, \qquad (\theta' = 0)$$

$$\left[E - \rho^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\right]^2 - \frac{4\rho^2}{a^2b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - \rho^2) = 0, \qquad (\theta'^2 - 4\Delta'\theta = 0)$$

avec

$$E = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1.$$

En posant $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$, la première relation donne $\rho^2 = -\frac{Eh^2}{2}$, et il n'y a plus qu'à porter cette valeur dans la seconde pour avoir le lieu demandé. On trouve ainsi une courbe du quatrième degré

$$\frac{9E^2}{4} - \frac{2Eh^2}{a^2b^2}\left(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 + \frac{Eh^2}{2}\right) = 0.$$

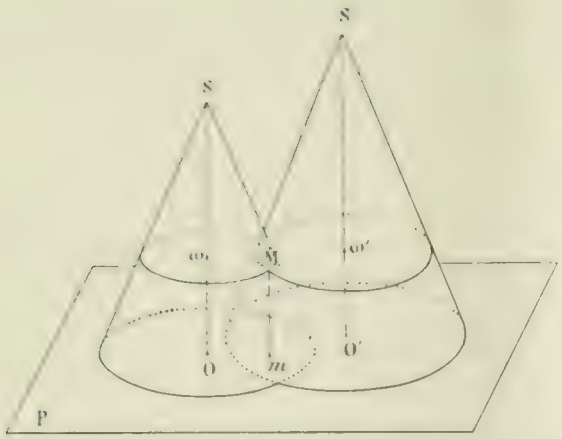
2° *Trouver les paraboles circonscrites à un triangle et telles que les normales aux sommets du triangle soient concourantes.*

Au lieu de chercher directement ces paraboles, on peut se borner à chercher leurs axes. Or l'axe de chacune d'elles passe au centre de gravité G du triangle donné ABC ; d'autre part, les axes des paraboles circonscrites au triangle ABC enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements. Du point G on peut mener trois tangentes à cette courbe ; donc le problème a trois solutions.

On peut mettre facilement le problème en équation et trouver les solutions indiquées en suivant la méthode que nous venons de signaler.

3° *Sur les ovales de Descartes.*

L'équation d'un ovale de Descartes en coordonnées bipolaires est $ar^2 + br'^2 + c = 0$. Cela posé,



considérons deux cônes de révolution à axes parallèles et projetons leur intersection sur un plan P perpendiculaire à l'axe ; nous aurons, comme nous allons le montrer, un ovale de Descartes.

En effet, coupons les deux cônes par un plan perpendiculaire à l'axe et soient ω, ω' les deux cercles d'intersection et M un de leurs points de rencontre ; en désignant par α et β les demi-angles aux sommets des deux cônes, nous avons $\omega M = S\omega \operatorname{tg} \alpha$, $\omega' M = S'\omega' \operatorname{tg} \beta$; posons $S\omega = \lambda$, $S'\omega' = \lambda + h$, $\omega M = Om = \rho$, $\omega' M = O'm = \rho'$; nous aurons $\rho = \lambda \operatorname{tg} \alpha$, $\rho' = (\lambda + h) \operatorname{tg} \beta$, et en éliminant λ entre ces deux relations,

$$(1) \qquad \rho \operatorname{tg} \beta - \rho' \operatorname{tg} \alpha + h \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 0.$$

Cette égalité démontre la proposition annoncée.

Deux cas de dégénérescence sont évidents :

1° Si les deux cônes sont égaux, c'est-à-dire si $\alpha = \beta$, on a

$$\rho - \rho' = h \operatorname{tg} \alpha,$$

et la projection est une hyperbole de foyers O et O' ;

2° Si les sommets des deux cônes sont dans un même plan perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire si $h = 0$, on a $\frac{\rho}{\rho'} = c^{te}$, et la projection est un cercle.

Il est facile de montrer que tout ovale de Descartes peut être obtenu par le procédé précédent : car l'équation $ax + bz + c = 0$ peut toujours être identifiée avec l'équation (1) d'une infinité de façons.

Si on considère alors deux cônes S et S' définissant un ovale donné, les divers moyens d'obtenir l'intersection de ces deux cônes donneront divers modes de génération de cette ligne.

Par exemple, soit SS' la ligne des sommets qui rencontre la ligne des centres des deux cercles choisis pour cercles de bases en un point σ ; si on mène par cette droite un plan auxiliaire qui rencontre les deux cercles de bases en P et P', les deux rayons OP et OP', projections des génératrices SP et SP', se coupent en un point M de l'ovale et la tangente en ce point s'obtient en joignant le point M au point de rencontre des tangentes aux deux cercles en P et P'.

On retrouve ainsi une construction connue de l'ovale de Descartes à l'aide de deux cercles et d'un point de la ligne des centres.

Nous allons montrer maintenant qu'il y a un troisième foyer. Pour cela, nous considérons le faisceau de quadriques déterminé par les deux cônes S et S' ; dans ce faisceau, il y a deux cônes qui coïncident avec les deux cônes donnés et deux autres dont l'un est le cylindre projetant la courbe d'intersection sur le plan des deux axes. Le sommet de ce cône particulier est à l'infini sur une perpendiculaire au plan des axes ; les trois autres sommets sont donc dans le plan polaire commun de celui-ci par rapport aux deux cônes, c'est-à-dire dans le plan des axes ; il y a déjà S et S' ; l'autre sommet S'' est un point ayant même polaire par rapport aux deux couples de génératrices situées dans ce plan ; c'est donc le point de concours des deux conjuguées harmoniques de la droite SS' par rapport à ces deux couples.

La projection O'' de ce point S'' sur le plan de base choisi est le troisième foyer. C'est un point situé sur la ligne des centres.

Cela résulte de ce que les quadriques qui passent par l'intersection de deux quadriques de révolution ayant leurs axes parallèles sont des quadriques de révolution ayant leurs axes parallèles à ceux-ci. Le cône de sommet S'' joue donc le même rôle que chacun des deux cônes S et S'.

◆

ALGÈBRE

978. — 1° *Étant donnée une équation du troisième degré à coefficients réels,*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

calculer la fonction symétrique des racines

$$\Sigma(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2.$$

Montrer que, sauf le cas d'une racine triple, cette quantité n'est nulle que si l'équation a deux racines imaginaires conjuguées.

2° *Désignant alors par α la racine réelle et par $u + iv$, $u - iv$ les deux racines imaginaires conjuguées, trouver la relation qui existe entre α, u et v. Calculer u et v sachant que $\alpha = 1$ et que les modules des deux autres racines sont égaux à 1. Former l'équation du troisième degré correspondante.*

1. L'identité $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ entraîne évidemment l'identité

$$f'(x) = a(x - \beta)(x - \gamma) + a(x - \alpha)(x - \gamma) + a(x - \alpha)(x - \beta)$$

et l'on en déduit

$$\frac{f'(\alpha)}{a} = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma);$$

par conséquent la fonction symétrique proposée a pour expression

$$\frac{1}{a^2}\left[\overline{f'(\alpha)}^2 + \overline{f'(\beta)}^2 + \overline{f'(\gamma)}^2\right].$$

Mais, pour une racine de l'équation proposée, $\overline{f'(x)}^2$ peut être abaissé au second degré : il suffit en effet de développer ce carré, de diviser le polynome ainsi obtenu

$$9a^2x^4 + 12abx^3 + (4b^2 + 6ac)x^2 + 4bcx + c^2,$$

par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et de prendre le reste de cette opération

$$R(x) = (b^2 - 3ac)x^2 + (bc - 9ad)x + c^2 - 3bd;$$

la fonction symétrique à évaluer devient alors

$$\frac{1}{a^2}\left[R(\alpha) + R(\beta) + R(\gamma)\right],$$

ou, avec les notations habituelles,

$$\frac{(b^2 - 3ac)S_2 + (bc - 9ad)S_1 + 3c^2 - 9bd}{a^2}.$$

D'autre part les formules de Newton, appliquées à l'équation proposée du troisième degré, donnent aisément S_1 et S_2 et le calcul est achevé.

Nous trouvons ainsi

$$(1) \qquad \Sigma(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2 = \frac{(b^2 - 3ac)^2}{a^2}.$$

Il est facile de voir que cette fonction ne peut être nulle que dans les deux cas signalés; car si les trois racines sont réelles et distinctes, elle est la somme de trois quantités positives ; et s'il y a une racine double, c'est-à-dire si $\beta = \alpha$, elle se réduit à $(\alpha - \gamma)^4$, quantité positive non nulle. D'ailleurs $b^2 - 3ac = 0$ exprime que la dérivée a une racine double et on sait que cela n'arrive que si l'équation proposée a une racine triple ou bien deux racines imaginaires.

2. Soient alors dans ce cas, α, $u + iv$, $u - iv$ les trois racines de l'équation proposée, les différences $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$, $\beta - \gamma$ se représentent par $\alpha - u - iv$, $\alpha - u + iv$, $-2iv$; la fonction symétrique $\Sigma(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2$ devient

$$(\alpha - u)^2 + v^2)^2 - 8v^2((\alpha - u)^2 - v^2).$$

et la relation demandée s'obtient en égalant cette quantité à 0.

En y joignant $\alpha = 1$ et $u^2 + v^2 = 1$, qui donne $v^2 = 1 - u^2$, cette relation se simplifie et s'écrit

$$(1 - u^2)^2 + (1 - u^2)^2 + 8(1 - u^2)[1 - u^2 - (1 - u)^2] = 0,$$

puis

$$(1 - u^2)^2 + 4(1 - u^2)^2 u(1 + u) = 0;$$

elle donne deux fois la solution $u = 1$, à laquelle correspond $v = 0$, et, dans ce cas, l'équation proposée a la racine triple $x = 1$; elle donne ensuite deux fois la solution $u = -\frac{1}{2}$, à laquelle correspondent les deux valeurs de v, $v = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, et, dans ce cas, l'équation a pour racines 1, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'équation proposée se réduit donc alors à $x^2 - 1 = 0$.

La relation trouvée plus haut entre u et v peut s'écrire

$$(\alpha - u)^2 - v^2)^2 - 4v^2(\alpha - u)^2 - v^2) + 4v^4 = 0,$$

ou

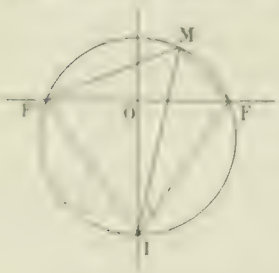
$$(\alpha - u)^2 - 3v^2)^2 = 0;$$

le calcul de u et v est alors immédiat. Cette dernière relation, $(\alpha - u)^2 - 3v^2 = 0$, peut se trouver plus rapidement en s'appuyant sur la première partie, où l'on a montré que la fonction symétrique indiquée est égale à $\frac{(b^2 - 3ac)^2}{a^4}$.

Très bonnes solutions : MM. J.-D. Dufaut, à Aiguillon ; P. Tribier ; J. Marchal.
Bonnes solutions : MM. L. Micoud, à Romans ; F. Pégorier, à Carcassonne.

GÉOMÉTRIE

980. — *Si l'on mène la normale en un point quelconque M d'une conique à centre, que l'on désigne par I son point de rencontre avec l'axe non focal et par F l'un des foyers, le rapport* $\frac{IF}{IM}$ *est constant et égal à l'excentricité de la conique.*



Soit une ellipse de foyers F et F'. Si l'on considère le cercle circonscrit au triangle MFF', la normale en M étant bissectrice de l'angle FMF' coupe ce cercle sur la perpendiculaire au milieu de FF', c'est-à-dire sur l'axe non focal. Le quadrilatère MFIF' est donc inscriptible, et en lui appliquant le théorème de Ptolémée, on a

$$MF \times IF' + MF' \times IF = IM \times FF',$$

ou

$$2a.IF = 2c.IM, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{IF}{IM} = \frac{c}{a}.$$

La démonstration est la même pour l'hyperbole.

G. FAUVERNIER, élève de l'École normale supérieure.

Solution géométrique analogue : MM. P. Puig ; J. Marchal ; Sigma, à Pau.
Autres solutions : MM. P. Tribier ; E. Grossetête ; Cans ; Vasnier ; F. Lemoyne.
Solutions analytiques : MM. E. N. Barisien ; J.-D. Dufaut ; L. Micoud.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

973. — *Par un point P de l'axe focal d'une conique (S) on mène deux droites rectangulaires rencontrant (S) en A, B, C, D. Montrer que la conique (S) passant par A, B, C, D et tangente à la tangente en un sommet de l'axe focal de la conique (S) est aussi tangente à la tangente en l'autre sommet, et que lorsque*

les droites AB, CD *tournent autour de* P *le point de rencontre des deux autres tangentes communes aux coniques* (S) et (S′) *décrit une droite.*

Que deviennent ces propositions quand le point fixe P *occupe une position quelconque par rapport à* (S) *et que les droites* A, B, C, D *ne sont pas assujetties à être rectangulaires?*

Prenons pour axes de coordonnées l'axe focal de la conique (S) et la tangente en un sommet.

Son équation sera de la forme

$$S \equiv y^2 - 2px - qx^2 = 0.$$

L'équation quadratique de deux droites rectangulaires passant par le point P $x = a$, $y = 0$, peut s'écrire

$$H = (x - a)^2 + 2\lambda(x - a)y - y^2 = 0,$$

λ étant un paramètre variable.

Soit $S' \equiv \mu S + H = 0$ l'équation de la conique (S′). Écrivons que l'axe des y [tangente au sommet de (S)] rencontre (S′) en deux points confondus. Nous avons, en faisant $x = 0$ dans (S′),

$$(\mu - 1)y^2 - 2a\lambda y + a^2 = 0,$$

d'où, la condition (1) $\lambda^2 + 1 - \mu = 0.$

Or, $x_0 = -2\dfrac{p}{q}$ est l'abscisse du deuxième sommet de (S). La substitution de x_0 à x dans (S′) donne

$$(\mu - 1)y^2 + 2\lambda(x_0 - a)y + (x_0 - a)^2 = 0,$$

équation qui a une racine double en y en vertu de la condition (1), ce qui montre que (S′) est tangente à la tangente au deuxième sommet de (S).

Démontrons maintenant la deuxième proposition énoncée.

En tenant compte de la condition $\mu = 1 + \lambda^2$, on trouve facilement pour équations tangentielles des coniques (S) et (S′) :

$$\Sigma \equiv p^2v^2 - 2puw + qw^2 = 0,$$

$$\Sigma' \equiv 2ap\lambda uv - (a^2q + 2ap + p^2 + p^2\lambda^2)v^2 + 2p\lambda^2uw - 2\lambda(aq + p)vw - q\lambda^2w^2 = 0.$$

Les deux coniques (S) et (S′) ayant deux tangentes communes parallèles à Oy ont un ombilic à l'infini sur Oy (équation tangentielle : $v = 0$). D'ailleurs, on a identiquement

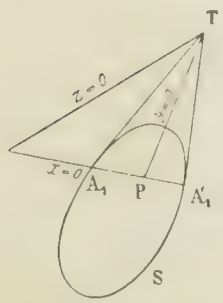
$$\Sigma' \equiv -\lambda^2\Sigma + v(2ap\lambda u - (a^2q + 2ap + p^2)v - 2\lambda(aq + p)w) = 0.$$

Ceci montre que l'équation tangentielle du point de rencontre des deux autres tangentes communes est

$$2ap\lambda u - (a^2q + 2ap + p^2)v - 2\lambda(aq + p)w = 0.$$

L'abscisse de ce point, $x = -\dfrac{ap}{aq + p}$, est indépendante de λ. Le point décrit donc la droite $x = -\dfrac{ap}{aq + p}$, polaire du point P par rapport à la conique (S).

Nous allons enfin démontrer que les deux droites AB, CD étant quelconques, ainsi que P, la conique S′ passant par A, B, C, D et tangente à la tangente en un point A_1 de la conique (S) est aussi tangente à la tangente en A'_1 où la droite A_1P rencontre de nouveau (S), et que quelles que soient les sécantes AB, CD, le point d'intersection des deux autres tangentes communes à (S) et (S′) est sur la polaire de P par rapport à (S).



Prenons pour triangle de référence le triangle conjugué à la conique (S) et ayant pour sommets P($x = 0$, $y = 0$) et le point T($y = 0$, $z = 0$) d'intersection de la tangente en A_1 à la conique et de la polaire de P.

Nous suivrons une marche identique à celle que nous avons déjà suivie.

Soient $S \equiv x^2 - y^2 - z^2 = 0$, $H \equiv \lambda x^2 + \mu y^2 - 2\nu xy = 0$,

les équations de la conique et de deux droites passant par P.

L'équation de la conique (S) est $S = S + H = 0$.

Soit $y - z = 0$, l'équation de la tangente TA. En coupant (S) par cette droite, on a

$$(1+\lambda)x^2 + 2\nu xz + \mu z^2 = 0,$$

qui doit avoir une racine double en $\frac{x}{z}$; d'où

$$(1) \qquad \nu^2 - \mu(1+\lambda) = 0.$$

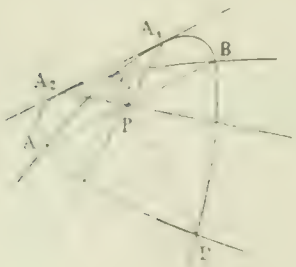
Or, si l'on coupe par la tangente TA'_1 à la conique (S) $(y + z = 0)$, on a

$$(1+\lambda)x^2 - 2\nu xz + \mu z^2 = 0,$$

qui a aussi une racine double en $\frac{x}{z}$.

Enfin en tenant compte de la relation (1), on peut mettre l'équation tangentielle de la conique (S') sous la forme

$$(1+\lambda)u^2 - v^2 + w^2) - u(\lambda + \mu)u - 2\nu v = 0,$$



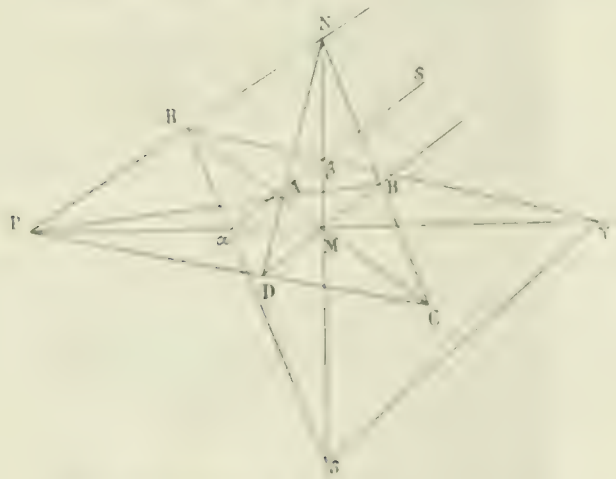
ce qui montre que le point de rencontre des deux autres tangentes, $\lambda + \mu)u - 2\nu v = 0$, décrit la droite $z = 0$, polaire de P.

Remarques. — Si S est une parabole, et si l'on mène le diamètre de la parabole passant par P, PA_1, on voit que la conique S' tangente à la tangente en A_1 à la parabole et ayant P pour pôle double avec S est une parabole (elle est tangente à la tangente à S à l'autre extrémité du diamètre, c'est-à-dire à la droite de l'infini).

Réciproquement P étant pôle double de deux paraboles, et A_1A_2 les points de contact d'une tangente commune les droites PA_1, PA_2 sont respectivement parallèles aux axes des paraboles. Il s'agit bien entendu de celle des tangentes communes qui ne rencontre aucune des deux autres sur la polaire de P.

VASNIER

Solution géométrique. — La solution de ce problème résulte immédiatement des considérations suivantes : Soient deux coniques circonscrites au quadrilatère ABCD. Le triangle diagonal MNP sera le triangle autopolaire commun à ces deux coniques.



Supposons qu'on mène les quatre tangentes communes à ces deux coniques, on aura un quadrilatère dont le triangle formé par les diagonales sera le triangle autopolaire des deux coniques ; le triangle MNP sera donc le triangle formé par les trois diagonales de ce quadrilatère. On aura donc un quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ tel que les côtés opposés $\alpha\delta$ et $\beta\gamma$, $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ se couperont sur la droite NP polaire du point M par rapport à toutes les coniques du faisceau passant par ABCD.(¹); les sommets opposés α, γ seront sur la polaire du point N, les sommets β, δ sur la polaire du point P.

Si un des côtés $\alpha\beta$ est parallèle à la polaire du point M, le côté opposé $\gamma\delta$ lui sera également parallèle.

Cela posé, revenons au problème :

1° Si le point M est sur le grand axe d'une ellipse et qu'on mène par ce point deux sécantes quelconques (il n'est pas nécessaire qu'elles soient rectangulaires), ces deux sécantes coupent l'ellipse aux points A, B, C, D

(¹) Ces deux points d'intersection R et S sont conjugués harmoniques de P et N, ce qui permet de construire facilement le quadrilatère des tangentes lorsqu'on se donne une de ces tangentes.

Si l'on mène une conique passant par ces points et tangente à l'une des tangentes menée à un des sommets du grand axe, elle sera, d'après ce qui précède, tangente à la tangente menée à l'autre sommet du même axe. Les deux autres tangentes communes se couperont toujours sur la polaire du point M.

2° Si le point M est quelconque, tout ce qui vient d'être dit subsiste, sauf que les tangentes aux sommets du grand axe peuvent être remplacées par les tangentes aux extrémités d'une corde menée par le point M.

CANS

Solution semblable : M. Sigma, à Pau.
Bonne solution plus générale : M. P. Tribier.
Bonnes solutions : MM. G. Fauvernier ; J. Marchal.

PHYSIQUE

969. — *Une lunette astronomique a un objectif de diamètre* $D = 125^{cm}$ *et de distance focale* $\varphi = 60^{m}$.

1° *Quel est le grossissement minimum* g *qui utilise toute la surface de l'objectif, en supposant que la pupille de l'observateur ait un diamètre* $a = 3^{mm}$?

2° *Quel est le grossissement minimum* γ *qui rend apparents sur l'objet le plus possible de détails, sachant que l'angle que peut dédoubler un objectif aplanétique varie en raison inverse de son diamètre, et qu'un objectif de* 13^{cm} *dédouble* $1''$?

3° *Ayant mis à la lunette l'oculaire qui produit le grossissement* γ, *on se sert de l'instrument pour projeter l'image du soleil sur un écran placé à* 5^{m} *de l'oculaire. Quelle fraction du diamètre du soleil occupe sur cette image une longueur de* 1^{m}, *et quel est l'éclairement de cette image, sachant que le soleil a environ* $\frac{1}{2}$ *degré de diamètre apparent et que son pouvoir éclairant équivaut à* 75000 *bougies-mètre* ?

1° Pour que tout l'objectif soit utilisé, il faut que le cercle oculaire soit plus petit que la pupille. Or le diamètre du cercle oculaire est égal, d'une manière générale, au quotient du diamètre de l'objectif par le grossissement G ; la condition énoncée s'exprime donc par l'inégalité $\frac{D}{G} < a$, ou $G > \frac{D}{a}$, et le grossissement minimum demandé est $g = \frac{D}{a} = \frac{1250}{3} = 417$.

2° L'objectif dédouble un angle α qui vaut un nombre de secondes égal à $\frac{13}{D}$. A cet angle correspond sur l'image objective une longueur $\varepsilon\varphi$; cette longueur sera vue dans l'oculaire sous l'angle $\frac{\varepsilon\varphi}{f}$, f désignant la distance focale de l'oculaire, et cet angle doit être supérieur à l'angle α que l'œil dédouble. Nous devons donc avoir $\frac{\varepsilon\varphi}{f} > \alpha$, d'où $\frac{\varphi}{f}$ ou $G > \frac{\alpha}{\varepsilon}$. Or α vaut environ 60 secondes. Donc $\gamma = 60\,\frac{D}{13} = 577$.

3° Au grossissement 577 correspond un oculaire de distance focale $\frac{60}{577} = 0^{m},104$. Ce serait une distance focale énorme pour un oculaire, mais n'oublions pas qu'il s'agit d'un grossissement minimum.

Pour projeter, à l'aide de cet oculaire, l'image objective sur un écran placé à 5^{m}, il faut le placer à une distance x de cette image telle qu'on ait $\frac{1}{x} + \frac{1}{5} = \frac{1}{0,104}$, d'où $x = 0^{m},106$: il faut donc à peine modifier le tirage.

A une longueur de 1^{m} sur l'image projetée correspond, sur l'image objective, une longueur $1 \times \frac{0,106}{5} = 0^{m},021$.

Or le diamètre apparent du soleil est $\frac{\pi}{360}$ et son image objective a pour diamètre

$$\frac{\pi}{360} \times 60 = \frac{\pi}{6} = 0^{m},5236.$$

La fraction demandée est $\frac{0,021}{0,5236} = \frac{1}{25}$ environ.

La quantité de lumière q que l'objectif reçoit d'une fraction λ de la surface apparente du soleil se répartit finalement sur la surface s de la partie correspondante de l'image et produit un éclairement

$$e = \frac{q}{s}.$$

Or q est le produit de la surface de l'objectif par une fraction λ de l'éclairement solaire :

$$q = \lambda \,.\, 75000 \,\frac{\pi}{4} \,.\, \overline{1.25}^{2}.$$

D'autre part s est le produit d'une fraction λ de la surface de l'image objective par le carré du grossissement de l'oculaire :

$$s = \lambda \,.\, \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2} \left(\frac{5}{0.106}\right)^{2}.$$

En remplaçant q et s par ces valeurs dans l'expression de e, on trouve

$$e = 192 \text{ bougies-mètre}.$$

On peut arriver au même résultat par un raisonnement différent.

D'une manière générale, si l'on projette, à l'aide d'un système optique quelconque, une image réelle sur un écran, l'éclairement produit en un point de cet écran est le même, aux pertes par réflexion près, que si l'on substituait à l'objet et au système une surface lumineuse de même éclat que la source et représentant une section quelconque du faisceau qui converge vers le point considéré. Si, en particulier, k est l'éclat du soleil et σ la section faite par l'oculaire dans un faisceau lumineux venu d'un point de l'astre, l'éclairement cherché est

$$e = \frac{k\sigma}{S^{2}}.$$

La section σ est sensiblement égale au cercle oculaire ou, plus exactement, à une fraction de la surface Σ de l'objectif égale au rapport des carrés des distances de l'image objective à l'oculaire et à l'objectif :

$$\sigma = \left(\frac{0,106}{60}\right)^{2} \Sigma.$$

Or $\Sigma = \frac{\pi}{4} \overline{1.25}^{2}$. D'autre part, l'éclairement produit par le soleil est $k\omega$, ω désignant sa surface apparente ou $\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{360}\right)^{2}$, donc $k\omega = 75000$ ou $k = 75000 \,.\, \frac{\pi}{4}\left(\frac{360}{4}\right)^{2}$.

En remplaçant k et σ par ces expressions, on trouve pour e la valeur déjà obtenue.

QUESTIONS PROPOSÉES

1063. — On considère un plan P et une sphère de centre A, tout entière d'un même côté du plan. Soit O la projection du centre de la sphère sur le plan P.

1° On demande l'équation générale des paraboloïdes circonscrits à la sphère, passant en O et coupant le plan P suivant une ellipse dont les axes ont des directions données.

2° Trouver le lieu des sommets de ces paraboloïdes.

3° On considère les sphères inscrites dans l'un de ces paraboloïdes et, en particulier, celle qui passe en O.

Trouver le lieu du cercle de contact de cette sphère avec le paraboloïde et le lieu de son centre.

4° Trouver le lieu des foyers de ces paraboloïdes.

E. H.

1064. — Par un point P on mène les quatre normales PA, PB, PC, PD à une ellipse. Les cercles circonscrits aux triangles PAB, PCD se coupent en P et en un autre point M_1 ; de même les cercles circonscrits aux triangles PAC, PBD se coupent en M_2 ; puis ceux qui sont circonscrits aux triangles PAD, PBC se coupent en M_3.

Trouver le lieu des points P pour lesquels les trois points M_1, M_2, M_3 sont en ligne droite et, dans ces conditions, l'enveloppe de la droite $M_1 M_2 M_3$.

VASNIER.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

Nouveau programme d'admission.

Le programme des connaissances exigées pour l'admission à l'École Centrale vient d'être l'objet de profonds remaniements. Le nouveau programme, approuvé le 19 août par le Ministre du Commerce et applicable à partir de 1902, a été publié au *Bulletin de l'Enseignement technique* (1) du 24 août.

Voici quelques renseignements généraux sur l'esprit dans lequel les modifications au programme ont été faites :

Les modifications apportées au programme ont été faites dans le but de le **simplifier**, *de le* **préciser** *et de le* **développer** *dans le sens dans lequel les élèves eux-mêmes sont appelés à se diriger après leur entrée à l'école.*

1° **Simplifications.** — On a supprimé toutes les questions pouvant donner lieu à des discussions sur les principes : ces questions qui touchent à la philosophie des mathématiques seraient intéressantes et utiles pour des élèves se destinant à l'enseignement ; elles ne peuvent même pas être comprises d'un élève de lycée. Personne ne songerait à demander à des candidats à l'École Centrale d'approfondir et de justifier les définitions de la ligne droite et du plan, de discuter le postulatum d'Euclide : les notions simples et intuitives fournies par le bon sens ne peuvent qu'être obscurcies par des discussions prématurées. La même prudence s'impose en arithmétique, en algèbre et en mécanique.

C'est ainsi que, pour l'algèbre et l'arithmétique, on a supprimé du programme toutes les questions pouvant donner lieu à des développements ou à des interrogations sur les nombres incommensurables en général, sur l'idée générale de limite, sur la continuité en un point ou dans un intervalle, sur l'existence des dérivées et des fonctions implicites... : ce genre de notions se trouvera précisé par les exemples particuliers qui se présentent dans le cours ; l'idée d'incommensurable par le rapport de la diagonale du carré au côté ; l'idée de limite par les progressions géométriques décroissantes, les séries, les dérivées... ; pour éviter toute difficulté pour la continuité on a indiqué au programme que l'idée d'un trait continu pour la représentation graphique de la fonction suffirait à définir la continuité ; on a, d'une façon générale, introduit dans toutes les questions d'analyse et d'algèbre la représentation graphique ; par exemple, on a indiqué que, pour le théorème des accroissements finis, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, on peut le déduire de cette remarque que, sur l'arc de courbe $y = f(x)$ entre les deux points $x = a$ et $x = b$, il existe un point $x = c$ où la tangente est parallèle à la corde, pourvu que la dérivée remplisse les conditions connues ; de même la représentation graphique doit jouer un rôle fondamental dans tout ce qui touche à la théorie des équations à coefficients réels, théorème de Rolle, méthodes d'approximation de Newton et des parties proportionnelles...

Pour les séries, on ne demandera que l'étude des séries dont la convergence ou la divergence puisse s'étudier par l'application directe des théorèmes indiqués au programme.

En mécanique, les interrogations ne porteront pas sur les principes. Les candidats devront être exercés aux

(1) Il a paru aussi au *Journal officiel*, mais avec une multitude d'erreurs.

questions du programme accompagnées d'applications simples : par exemple les conditions générales d'équilibre d'un corps solide devront être appliquées aux cas simples d'un corps solide sollicité par deux forces, par trois forces, par des forces parallèles, par des forces dans un même plan...

Une autre simplification du programme a consisté à supprimer les petites questions traitées par des méthodes spéciales et compliquées, quand il existe des méthodes générales plus simples.

Enfin, une dernière simplification en mathématiques a consisté à diminuer en géométrie analytique la place excessive prise par la théorie des courbes et surfaces du second ordre, principalement en supprimant des questions relatives à ces courbes ou surfaces rapportées à des axes quelconques. On a supprimé toutes les formules générales qui ne sont que des exercices de mémoire ou des jeux d'écriture ; exemples : condition de contact d'une droite et d'une conique, équation quadratique des tangentes menées d'un point, équation quadratique des asymptotes dans l'équation générale, théorie générale des foyers et des directrices...

De même, dans l'espace, on a supprimé ce qui se rapporte à la réduction de l'équation générale du deuxième degré ; par contre, on a précisé les points sur lesquels portera l'étude des quadriques avec les formes réduites.

Pour éviter de charger la mémoire de formules compliquées, on a spécifié en géométrie analytique que, dans toutes les questions relatives aux angles et aux distances, on emploierait les coordonnées rectangulaires.

Dans le même ordre d'idées, on a supprimé les notions de sciences naturelles précédemment exigées.

2° **Précision**. — L'ancien programme contient quelques expressions trop vagues ou trop générales, de telle sorte que les professeurs, ne sachant jusqu'où l'examinateur ira, fatiguent les élèves à force de vouloir prévoir des questions possibles. Dans cet ordre d'idées rentrent d'abord des questions sur les principes qui sont déjà écartées, puis des questions comme les suivantes :

En trigonométrie :

Application à la résolution de *certaines* équations trigonométriques.

En algèbre :

Fonctions primitives qui s'obtiennent comme conséquences immédiates des dérivées ci-dessus indiquées.

En géométrie analytique :

Recherche des asymptotes à une courbe : *application aux courbes algébriques.*

Équations générales de coniques assujetties à *certaines* conditions. Équations d'un plan assujetti à *certaines* conditions, etc.

Ces questions ont été précisées et on a énuméré les applications demandées, ce qui allonge le texte, mais diminue le programme.

3° **Développement**. — Enfin, on s'est proposé de développer le programme. Il y a actuellement une tendance à faire tourner toute la géométrie analytique autour de l'étude des courbes et surfaces du second ordre *définies par leurs équations générales* et de la recherche de *lieux géométriques artificiels* ; les élèves apprennent par cœur des formules et des équations tout à fait inutiles. Comme nous l'avons déjà dit, on a supprimé dans le programme tout ce qui pourrait pousser les professeurs dans cette voie, où les élèves se fatiguent sans aucun développement de l'intelligence et acquièrent le dédain des questions simples et précises, des applications numériques, des calculs entièrement terminés. Beaucoup d'élèves sont incapables de construire une courbe définie par une équation numérique explicite $y = f(x)$, de calculer les maxima, minima, les points d'inflexion, etc. On a, en conséquence, introduit quelques questions qui obligeront les élèves à appréhender la représentation d'une fonction par une courbe sur des exemples numériques et à pousser les calculs jusqu'au bout. C'est pourquoi on a divisé la partie du programme relative aux courbes en trois parties :

A) Étude des courbes définies par une équation explicite $y = f(x)$, cas très important au point de vue des applications ;

B) Étude des courbes telles que les coordonnées d'un de leurs points soient exprimées en fonction d'un paramètre, cas qui se présente constamment en cinématique ;

C) Courbes définies par une équation implicite, cas sur lequel portaient presque toutes les questions de l'ancien programme.

En trigonométrie on a ajouté la formule de Moivre et la formule d'Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Pour établir cette formule, on remarquera que, en prenant la dérivée de

$$y = \log(\cos x + i \sin x)$$

par les règles ordinaires et réduisant, on trouve

$$y' = i,$$

on en conclut

$$y = ix + C,$$

$$\cos x + i \sin x = Ae^{ix},$$

et en faisant $x = 0$, $A = 1$. Il ne sera soulevé aucune difficulté au sujet de cette démonstration.

Enfin le programme se trouve complété, dans le sens que nous avons indiqué, par l'introduction de quelques notions de cinématique et de mécanique.

Si pour les parties déjà anciennes et depuis longtemps classiques du programme, on a tenu à le préciser, à plus forte raison en est-il ainsi dans ces parties nouvelles.

Ce qu'on a voulu tout d'abord, c'est que de futurs ingénieurs acquièrent le plus tôt possible quelques notions précises sur les machines les plus simples et que, sur chacune d'elles, il leur soit montré clairement qu'on ne peut pas gagner à la fois en force et en chemin parcouru, ce qui n'exige en aucune façon qu'on leur donne et surtout qu'on leur développe la notion du travail mécanique.

Galilée, sans cette notion, pouvait déjà dire à ses contemporains que celui qui chercherait un dispositif mécanique ayant par lui-même la double vertu de faire gagner à la fois de la force et du temps ne mériterait pas d'avoir du temps, parce qu'il l'emploierait trop mal. C'est ce que les machines comprises au programme suffisent à faire concevoir.

Si ce but avait été le seul utile, le programme de statique y eût suffi. Si l'on y a ajouté les premiers éléments de la cinématique et de la dynamique du point, c'est surtout en vue de l'enseignement de la physique, cette science dont l'importance en industrie grandit chaque jour. Les professeurs de physique n'ont jamais pu se passer d'employer des notions de mécanique plus ou moins déguisées. Il a paru préférable de les donner franchement en les réduisant à ce qui est indispensable dans la physique élémentaire et restera indispensable dans la physique la plus industrielle, à savoir : la notion du champ de forces uniforme et celle du champ de forces centrales variant en raison directe de la distance au centre. C'est à bien en imprégner les débutants que s'attache le programme dès ses premières lignes, dès qu'on a défini l'accélération.

On ne demandera d'ailleurs aucun des théorèmes généraux relatifs à la dynamique du point.

En statique, on a, dès le début, et contrairement à l'usage, introduit la notion du frottement. C'est la réalité, ce que chacun conçoit. Elle est de nature à donner aux débutants des idées beaucoup plus justes que l'abstraction sur laquelle, d'ordinaire, on les tient peut-être un peu longtemps et non au profit de la claire vue des choses.

Géométrie analytique.

981. — *Les axes des coordonnées étant rectangulaires, on considère la conique* C *qui a pour équation* $y^2 - 2px = 0$, *et un point* P *de son plan dont les coordonnées sont désignées par* α, β.

1° *Former l'équation de la ligne* S *qui limite la région du plan dans laquelle doit se trouver le point* P *pour qu'il existe trois normales réelles et distinctes à la conique* C *issues de ce point* P. *Tracer la ligne* S.

2° *Trouver le lieu* S′ *du point* P *pour lequel l'une des normales* PQ *à la conique* C *passe par le milieu du segment intercepté sur l'axe* Ox *par les deux autres. Déduire graphiquement la ligne* S *du tracé de* S.

3° *Les pieds de ces deux dernières normales étant* M *et* N, *trouver le lieu* V *du pôle de la corde* MN, *quand le point* P *parcourt la ligne* S′.

4° *Le pied de la troisième normale étant* Q, *trouver le lieu du pôle de chacune des cordes* QM, QN.

5° *Quel est le nombre des points* P *tels que deux des normales à* C, *issues de ce point, soient rectangulaires, et que l'une d'elles passe par le milieu du segment intercepté sur* Ox *par les deux autres? Construction graphique de ces points.*

(*Ecole Centrale, concours de 1900, deuxième session.*)

1° Cette question relative à la ligne S qui est la développée de la parabole $y^2 - 2px = 0$, est classique. Rappelons-la brièvement.

L'équation aux ordonnées des pieds des trois normales à la parabole issues de $P(\alpha, \beta)$ est

$$(1) \qquad y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0.$$

La condition pour que cette équation ait deux racines égales est

$$(S) \qquad \beta^2 = \frac{8(\alpha - p)^3}{27p}.$$

C'est l'équation de la ligne S, développée de la parabole. Si le point P est dans la région négative de cette courbe, c'est-à-dire en son intérieur, les trois normales issues de P à la parabole sont réelles et distinctes.

2° Soient x_1, y_1 les coordonnées de Q, x_2, y_2, x_3, y_3 celles de M et N, ces trois points étant les pieds des normales issues de P.

L'abscisse du point de rencontre de la normale en Q avec l'axe Ox de la parabole est $(x_1 + p)$. Celles qui sont relatives aux normales en M et N sont $(x_2 + p)$ et $(x_3 + p)$. Exprimons que l'abscisse relative à Q est la moyenne arithmétique des deux autres. On a ainsi

$$2(x_1 + p) = (x_2 + p) + (x_3 + p), \qquad \text{ou} \qquad 2x_1 = x_2 + x_3,$$

ou, encore,

$$(2) \qquad 2y_1^2 = y_2^2 + y_3^2.$$

Mais d'après l'équation (1), on a

$$(3) \qquad y_1 + (y_2 + y_3) = 0,$$

$$(4) \qquad y_1(y_2 + y_3) + y_2y_3 = -2p(x + p),$$

$$(5) \qquad y_1y_2y_3 = 2p^2\beta.$$

On aura l'équation de la ligne S' en éliminant y_1, y_2 et y_3 entre (2), (3), (4) et (5). En remplaçant $y_2 + y_3$ par $-y_1$, (2) et (4) deviennent

$$2y_1^2 = (y_2 + y_3)^2 - 2y_2y_3 = y_1^2 - 2y_2y_3,$$

$$(6) \qquad y_1^2 = -2y_2y_3,$$

$$(7) \qquad y_2y_3 - y_1^2 = -2p(x + p).$$

On est ramené à éliminer y_1 et y_2y_3 entre les trois équations (5), (6), (7); (6) donne $y_2y_3 = -\frac{y_1^2}{2}$; (5) et (7) deviennent

$$y_1^2 = -4p^2\beta, \qquad 3y_1^2 = 4p(x + p).$$

L'élimination de y_1 entre ces deux dernières équations donne pour le lieu la ligne S',

$$(S') \qquad \beta^2 = \frac{4(x + p)^3}{27p}.$$

Le tracé de la ligne S' se déduit de celui de la ligne S en divisant l'ordonnée correspondante de S par $\sqrt{2}$. La courbe S' est aussi une développée de parabole : elle est la développée de la parabole d'équation

$$y^2 = 4p(x + p).$$

Il y a lieu de remarquer que si l'on mène par P la parallèle PT à l'axe Ox de la parabole, les quatre droites PQ, PT, PM et PN forment un faisceau harmonique, PT étant la quatrième normale issue de P à la parabole (dont le pied est à l'infini) : il en résulte que la courbe S' est le lieu des points d'où les quatre normales issues de ce point forment un faisceau harmonique.

3° La corde MN a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{y_1^2}{2p} & y_1 & 1 \\ \frac{y_2^2}{2p} & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x(y_2 - y_1) - \frac{y_1^2(y_2 - y_1)}{2p} + \frac{y_2^2 y_1}{2p}(y_2 - y_1) = 0,$$

ou, après avoir supprimé le facteur $(y_2 - y_1)$,

$$(8) \qquad 2px - y_1y_2 + y_1^2 + y_2^2 = 0.$$

La polaire d'un point (X, Y) par rapport à la parabole a pour équation

$$(9) \qquad px - yY + pX = 0.$$

L'identification des équations (8) et (9) donne

$$(10) \qquad y_2 + y_3 = 2Y,$$

$$(11) \qquad y_2y_3 = 2pX.$$

ou, d'après (3) et (6),

$$y_1 = -2Y, \qquad y_1^2 = -4pX.$$

Le lieu du point (X, Y) c'est-à-dire la courbe V est donc la parabole

(V) $$Y^2 = -pX.$$

4° Les coordonnées (X, Y) du pôle de QM, analogues à (10) et (11), sont

(12) $$y_1 + y_2 = 2Y.$$

(13) $$y_1 y_2 = 2pX.$$

La relation (6) devient, en y faisant $y_3 = -(y_1 + y_2)$,

(14) $$y_1^2 = 2y_2(y_1 + y_2).$$

Il faut donc éliminer y_1 et y_2 entre (12), (13) et (14). De (12), on tire $y_2 = 2Y - y_1$; alors (13) et (14) deviennent

$$y_1(2Y - y_1) = 2pX, \qquad y_1^2 = 4Y(2Y - y_1),$$

ou

$$y_1^2 - 2Yy_1 + 2pX = 0, \qquad y_1^2 + 4Yy_1 - 8Y^2 = 0.$$

L'élimination de y_1 entre ces deux équations donne

$$(4Y^2 + pX)^2 + 12Y^2(pX - 2Y^2) = 0,$$

ou

$$8Y^4 - 20pXY^2 - p^2X^2 = 0.$$

D'où $$Y^2 = \frac{(5 \pm 3\sqrt{3})pX}{4}.$$

Le lieu des pôles des cordes QM et QN se compose donc des deux paraboles

(15) $$Y^2 = \frac{(3\sqrt{3} + 5)pX}{4}, \qquad Y^2 = -\frac{(3\sqrt{3} - 5)pX}{4}.$$

5° Si les deux normales PM et PN sont rectangulaires, comme leurs coefficients angulaires sont $-\frac{y_2}{p}$ et $-\frac{y_3}{p}$, on a

$$y_2 y_3 = -p^2.$$

Donc, d'après (6). $$y_1^2 = 2p^2, \qquad y_1 = \pm p\sqrt{2}.$$

Les coordonnées du point Q sont donc l'un ou l'autre des deux points

(16) $$x_1 = p, \qquad y_1 = \pm p\sqrt{2}.$$

Les coordonnées des points M et N satisfont aux équations

(17) $$y_2 + y_3 = \mp p\sqrt{2}, \qquad y_2 y_3 = -p^2.$$

D'où l'on déduirait y_2 et y_3, par l'équation $y^2 \pm py\sqrt{2} - p^2 = 0$.

Reste à trouver les coordonnées α, β du point P correspondant au point (16). En substituant les valeurs (16) et (17) dans (4) et (5), on a pour α et β

(18) $$\alpha = \frac{5p}{2}, \qquad \beta = \pm \frac{p\sqrt{2}}{2}.$$

Ces deux points sont faciles à construire.

Il est à remarquer que la normale au point (16) rencontre la parabole au point $(x = 4p,\ y = 2p\sqrt{2})$, qui est le point d'intersection de la parabole et de sa développée.

On peut traiter la question d'une autre façon. On sait que la courbe d'où l'on peut mener deux normales rectangulaires à la parabole est la parabole

(19) $$4y^2 = 2px - 3p^2.$$

Nous avons vu que l'équation de la courbe S' était

(20) $$y^2 = \frac{4(x - p)^3}{27p}.$$

Les points demandés sont donc à l'intersection des deux courbes (19) et (20). En éliminant y^2, on a l'équation

(21) $$16(x - p)^4 = 27p^2(2x - 3p).$$

On vérifie que $x = \frac{5p}{2}$ est racine. Les deux autres racines sont données par l'équation

$$8x^2 - 4px - 13p^2 = 0.$$

Ces racines sont

$$x = \frac{p}{4}(1 \pm 3\sqrt{3});$$

on en déduit pour y, d'après (19),

$$y^2 = \frac{p^2}{8}(\pm 3\sqrt{3} - 5).$$

En prenant le signe +, on a un premier système :

$$(22) \qquad y^2 = \frac{p^2}{8}(3\sqrt{3} - 5), \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{p}{4}(1 + 3\sqrt{3}),$$

qui donne deux points réels, faciles à construire :

$$x = \frac{p}{4}(1 - 3\sqrt{3}), \qquad y = \pm \frac{p}{4}\sqrt{6\sqrt{3} - 10}.$$

En prenant le signe —, on a

$$(23) \qquad y^2 = -\frac{p^2}{8}(3\sqrt{3} + 5), \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{p}{4}(1 - 3\sqrt{3}),$$

qui donne deux points imaginaires conjugués.

En résumé, il existe quatre points réels et deux imaginaires satisfaisant à la condition énoncée, savoir :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{5p}{2}, \\ y = \pm \frac{p\sqrt{2}}{2}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{p}{4}(1 - 3\sqrt{3}), \\ y = \pm \frac{p}{4}\sqrt{6\sqrt{3} - 10}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{p}{4}(1 - 3\sqrt{3}), \\ y = \pm i\frac{p}{4}\sqrt{6\sqrt{3} + 10}. \end{array}\right.$$

E.-N. BARISIEN.

Bonnes solutions de MM. J.-D. Dufaut ; J. Marchal ; Pégorier ; Souts.

Trigonométrie.

CALCUL.

985. — *Donner l'expression générale des angles x qui satisfont à l'équation*

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta,$$

sachant que α est le plus petit des angles positifs tels que

$$\cot^2 \alpha = -0{,}3548568, \qquad \text{et que} \qquad \beta = 132^\circ 25' 21'',11.$$

(*École Centrale, concours de 1900, deuxième session.*)

L'équation donnée peut s'écrire

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{\cos^2 \beta}}{\sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}}}.$$

Le second membre a une valeur positive. On calculera au moyen des tables l'angle aigu φ, donné par la formule $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{\cos^2 \beta}}{\sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}}}$, et on sera ramené à résoudre l'équation

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \varphi;$$

d'où

$$\frac{x}{2} = \varphi + k\pi, \qquad x = 2\varphi + 2k\pi.$$

L'angle β est donné et égal à $132°25'21'',11$; son supplément est $\beta' = 47°34'38'',89$.

L'angle α est un angle compris entre $90°$ et $180°$; son supplément α' est donné par l'équation

$$\operatorname{cotg}^3 \alpha' = 0,3548568,$$

d'où on déduit

$$\alpha' = 54°42'8'',9$$

et

$$\alpha = 125°17'51'',1,$$

$$\frac{\alpha}{2} = 62°38'55'',55 ;$$

on calculera l'angle φ par la formule

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt[4]{\cos^2 \beta'}}{\sqrt[4]{\sin \frac{\alpha}{2}}},$$

obtenue en remplaçant dans la formule donnée $\cos \beta$ par $-\cos \beta'$. On trouve ainsi

$$\varphi = 38°23'25'',45,$$

d'où

$$x = k.360° + 76°46'50'',9.$$

Bonne solution : M. P. Thonet.

ALGÈBRE

994. — *Montrer que toute équation du troisième degré*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

peut se mettre de deux façons sous la forme $(x - \alpha)(x - \beta)^2 = h$, α, β *et* h *étant certaines constantes.*

Dans quel cas le nombre α *de la première forme est-il égal au nombre* β *de la seconde? Calculer alors les valeurs de* α, β *et* h *et résoudre l'équation du troisième degré.*

Si nous divisons le polynome du troisième degré $x^3 + ax^2 + bx + c$ par $x - \alpha$, nous obtenons l'identité

$$f(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx + c \equiv (x - \alpha)[x^2 + (\alpha + a)x + \alpha^2 + a\alpha + b] + f(\alpha).$$

Nous avons donc à exprimer que le trinome $x^2 + (\alpha + a)x + \alpha^2 + a\alpha + b$ est un carré parfait et à prendre $h = -f(\alpha)$; la condition ainsi trouvée est $3\alpha^2 + 2a\alpha + 4b - a^2 = 0$; elle donne deux valeurs pour α, réelles ou imaginaires, et rien n'est plus simple que de discuter cette équation quand on suppose que les coefficients de l'équation cubique donnée sont réels. Pour ces valeurs de α, l'identité écrite au début devient

$$f(x) \equiv (x - \alpha)\left(x + \frac{a + \alpha}{2}\right)^2 + f(\alpha);$$

nous avons donc

$$\beta = -\frac{a + \alpha}{2}.$$

En remplaçant, dans l'équation qui donne α, ce nombre par $-a - 2\beta$, nous obtenons l'équation qui donne β, $3\beta^2 + 2a\beta + b = 0$; c'est justement l'équation obtenue en annulant la dérivée du polynome cubique donné. Il est facile d'expliquer ce résultat : posons en effet $x - \beta = X$ ou $x = \beta + X$; nous aurons

$$f(x) = f(\beta + X),$$

ou

$$f(x) = f(\beta) + \frac{X}{1} f'(\beta) + \frac{X^2}{2} f''(\beta) + \frac{X^3}{6} f'''(\beta);$$

si donc nous voulons la forme indiquée, il faudra prendre $f'(\beta) = 0$.

Nous avons reçu d'ailleurs d'un de nos correspondants une généralisation très simple de la question. Elle consiste en ce que $f(x)$ étant un polynome entier quelconque, on peut toujours le mettre sous la forme $(x - \beta)^{i+1}F(x) + \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant un polynome de degré $i - 1$. Il n'y a qu'à procéder comme

précédemment et annuler $f'(\beta)$; on trouve ainsi, dans le cas où $f(x)$ est du degré n, $n-i$ valeurs de β, par suite $n-i$ façons de faire la transformation.

Pour traiter la seconde partie de la question, appelons α et α' les deux valeurs de α, et β, β' les valeurs correspondantes de β; nous aurons

$$\beta = -\frac{a+\alpha}{2}, \qquad \beta' = -\frac{a+\alpha'}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \beta',$$

par suite, $2\alpha + \alpha' + a = 0$. D'autre part, $\alpha + \alpha' = -\frac{2a}{3}$; par conséquent $\alpha = -\frac{a}{3}$. Il en résulte que, dans ce cas, les deux transformations sont confondues et qu'on a en outre $\alpha = \beta$. La condition pour qu'il en soit ainsi est donc $a^2 - 3b = 0$; puis $h = -f(\alpha) = \frac{9ab - 2a^3 - 27c}{27} = \frac{ab - 9c}{9}$, en tenant compte de ce que $a^2 = 3b$. L'équation cubique prend donc la forme

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{ab - 9c}{9},$$

et l'on en conclut

$$x + \frac{a}{3} = \sqrt[3]{\frac{ab-9c}{9}} \qquad \text{ou} \qquad j\sqrt[3]{\frac{ab-9c}{9}} \qquad \text{ou} \qquad j^2\sqrt[3]{\frac{ab-9c}{9}},$$

$\sqrt[3]{\frac{ab-9c}{9}}$ désignant la racine cubique du nombre $\frac{ab-9c}{9}$ et j, j^2 les deux racines cubiques imaginaires de l'unité.

On peut apercevoir plus rapidement la solution de la seconde partie; car dire que α est égal à β, c'est dire que α et β sont les deux valeurs de β, par conséquent que α est racine de la dérivée $f'(\alpha) = 0$. En comparant ce résultat à l'équation qui donne α, on trouve de suite $a^2 - 3b = 0$ et tout le reste s'ensuit.

Bonne solution : M. J. Marchal.
Solution sans la suite : M. P. Pégorier.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

990 — *Les points A, B, C étant fixes, par B et C on fait passer un cercle variable qui rencontre AB et AC en B' et C'. Trouver le lieu du pôle de B'C' par rapport à ce cercle.*

Prenons pour axes la droite BC et la perpendiculaire au milieu; désignons par $2a$ la longueur BC et par x_0, y_0 les coordonnées du point A. Les équations des droites AB et AC sont alors

$$\frac{y}{x-a} = \frac{y_0}{x_0 - a} \qquad \text{et} \qquad \frac{y}{x+a} = \frac{y_0}{x_0 + a},$$

et l'ensemble de ces deux droites peut être représenté par l'équation

$$(xy_0 - yx_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = 0.$$

Un cercle quelconque passant par les points B et C a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2\lambda y - a^2 = 0;$$

ce cercle rencontre les droites AB et AC aux points B' et C', et l'équation générale des coniques passant par les quatre points B, C, B', C' est

$$(x^2 + y^2 + 2\lambda y - a^2)^2 + (xy_0 - yx_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = 0.$$

Pour $x = -y_0$, le premier membre de cette équation est divisible par y; elle représente alors l'ensemble des deux droites BC et B'C'. En divisant par y, nous obtenons l'équation de la droite B'C',

$$-2xx_0y_0 + y_0x_0^2 - y_0^3 + a^2 + 2y_0a^2 - \lambda y_0 = 0.$$

La direction de cette droite est constante quel que soit λ. Ce résultat était à prévoir, car les droites BC et B'C' sont antiparallèles par rapport à l'angle A.

Les coordonnées du pôle de la droite B'C' par rapport au cercle sont fournies par les équations

$$\frac{x}{-2x_0y_0} = \frac{y+\lambda}{x_0^2-y_0^2-a^2} = \frac{\lambda y-a^2}{2y_0(a^2-\lambda y_0)}.$$

On obtiendra le lieu de ce pôle en éliminant λ entre ces deux équations.

Des équations fournies en égalant successivement le premier rapport à chacun des deux autres on tire aisément

$$\lambda = -\frac{x(x_0^2-y_0^2-a^2)+2x_0y_0y}{2x_0y_0} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{a^2(x-x_0)}{xy_0-yx_0}.$$

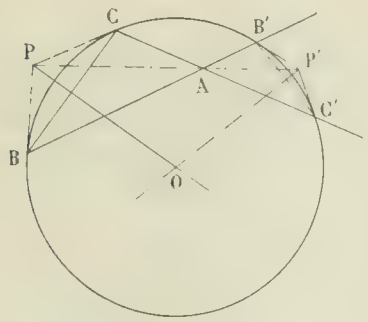
Par suite, l'équation du lieu est

$$(xy_0-yx_0)[x(x_0^2-y_0^2-a^2)+2x_0y_0y]+2a^2x_0y_0(x-x_0)=0.$$

Cette équation représente une hyperbole dont les directions asymptotiques sont OA et une perpendiculaire à la direction constante de B'C'. De plus on voit sur l'équation que l'hyperbole passe par les points de rencontre des parallèles aux asymptotes menées par l'origine avec la perpendiculaire issue du point A à la droite BC.

J. MARCHAL.

Bonnes solutions par MM. E. N. Barisien et Souls à Condom.



Solution géométrique. — La droite PP' qui joint les pôles de BC, B'C' par rapport à un cercle O passe par le point fixe A. D'autre part, B'C' antiparallèle à BC dans l'angle BAC, a une direction fixe, de même que OP' qui lui est perpendiculaire. Il est alors visible que les droites AP', OP' sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques, l'une ou l'autre de ces droites déterminant le cercle. Le lieu de P' est donc une hyperbole passant en A, et dont une asymptote est parallèle à OP'.

VASNIER.

---

995. — *On considère un diamètre fixe* AB *dans un cercle donné. Soient* M *un point variable du cercle,* P *sa projection sur* AB *et* A' *le symétrique de* A *par rapport à* P ; *soit aussi* Q *la projection de* A *sur* MA'.

1° *Trouver le lieu de l'orthocentre du triangle* AMA'.

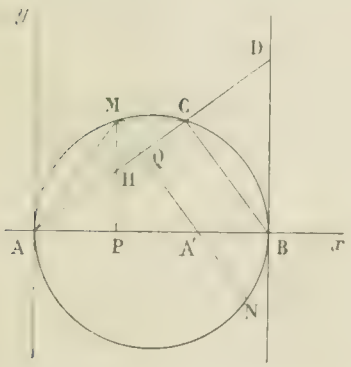
2° *Trouver l'enveloppe de la droite* MA' *et le lieu du point* Q. *Construire ces courbes.*

Prenons pour axe des x le diamètre AB et pour axe des y la tangente au cercle en A et désignons par a le rayon du cercle. L'équation du cercle peut s'écrire

$$(x-a)^2+y^2-a^2=0$$

et les coordonnées du point M peuvent se mettre sous la forme

$$x = a+a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi.$$



Si nous posons $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, nous aurons

$$x = \frac{2a}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2at}{1+t^2};$$

par conséquent, le coefficient angulaire de AM est égal à t, ce qui, du reste, est évident géométriquement; le coefficient angulaire de MA' est donc $-t$ et celui de AQ, $\frac{1}{t}$; les coordonnées du point A' sont $\frac{4a}{1+t^2}$, 0.

1. Le point H, orthocentre du triangle MAA', est à l'intersection des deux droites

$$x = \frac{2a}{1+t^2}, \qquad y = \frac{a}{t};$$

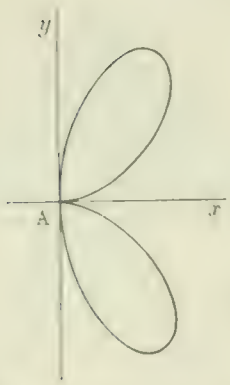
par suite, le lieu de ce point s'obtient en éliminant t entre ces deux équations. La seconde donne $t = \frac{x}{y}$, et, en portant cette valeur dans la première, nous obtenons

$$(1) \qquad x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0,$$

équation qui représente une cissoïde droite ayant pour point de rebroussement le point O et pour tangente en ce point l'axe des x, $y = 0$; l'asymptote de cette courbe est la droite $x - 2a = 0$, tangente au cercle au point B.

Ce résultat est évident géométriquement, car si on prolonge AQ jusqu'à sa rencontre avec le cercle, en C, et avec la tangente en B, en D, la droite AC est perpendiculaire à BC; donc BC est parallèle à MA' et, par suite, symétrique de AM par rapport au diamètre du cercle perpendiculaire à AB : il en résulte que l'arc BC est égal à l'arc AM et que leurs projections sur AB sont égales : les deux segments AH et CD, portés par la même droite, et qui ont des projections égales sur AB, sont égaux, et l'on retombe sur la définition même de la cissoïde.

2. Quant à la droite MA', elle a pour équation $y + tx - \frac{4at}{1 + t^2} = 0$. Il a été démontré dans le n° de décembre 1899 de la *Revue* (prob. 842) que cette droite enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements tritangente au cercle donné et, plusieurs fois, il a été donné une démonstration géométrique de cette propriété basée sur ce fait que la droite MA' rencontre le cercle en deux points M et N qui se déplacent en sens contraires, le second avec une vitesse double du premier, fait qui se constate immédiatement dans le cas actuel.



Le lieu du point Q est la podaire de cette hyperboloïde par rapport à l'origine; il s'obtient en éliminant t entre l'équation de MA' et celle de AH; celle-ci donne $t = \frac{x}{y}$, et, en portant cette valeur dans la première, nous avons

$$(2) \qquad (x^2 + y^2)^2 - 4axy^2 = 0.$$

Cette courbe, qui est fermée et symétrique par rapport à Ox, se construit immédiatement à l'aide des coordonnées polaires; il suffit de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$ dans l'équation

$$\rho = 4a \sin^2\omega \cos\omega,$$

et de prendre la symétrique par rapport à Ox; ρ est nul pour $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$ et maximum pour une valeur $\omega = \alpha$ donnée par l'équation

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}.$$

La courbe a la forme ci-dessus.

G. BOUJU, lycée d'Orléans.

Bonnes solutions : MM. J. MARCHAL; SOUDS, à Condom; G. FAUVERNIER; T. LEMOYNE, à Troyes.

QUESTIONS PROPOSÉES

1065. — Étudier la série dont le terme général est

$$\log n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right).$$

1066. — Lieu des foyers des hyperboles équilatères qui passent par un point fixe A et admettent comme axe non transverse une droite donnée D.

P. TRIBIER.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PAR LE SUC. IMP. COMTE-JACQUET.

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

12e Année. — N° 1. Octobre 1901.

PREMIÈRE PARTIE

SUR CERTAINES RELATIONS INVOLUTIVES

par M. **Lelieuvre**, professeur au lycée de Caen.

On peut, d'une infinité de manières, former une relation $R(x, y) = 0$ entière et symétrique ou *involutive*, entre deux variables x et y, qui soit vérifiée quand on y remplace x et y par deux quelconques des racines d'un polynome entier $f(x)$; il est clair, en effet, que quelle que soit la fonction entière $\varphi(x, y)$, la relation

$$R(x, y) = \frac{f(x)\varphi(x, y) - f(y)\varphi(y, x)}{x - y} = 0$$

répond à la question.

1. Appelons *ordre* de $R(x, y)$ son degré par rapport à chaque variable et soit m le degré de $f(x)$; toute relation $R(x, y) = 0$, vérifiée par deux quelconques des racines du polynome peut être ramenée à une autre, également entière et symétrique, d'ordre $q < m$: il suffit, en effet, de la diviser successivement par $f(x)$ et $f(y)$, ce qui donne

$$R(x, y) = Af(x)f(y) + Bf(x) + Cf(y) + S(x, y),$$

A, B, C étant entiers en x et y, et $S(x, y)$ entière et symétrique. Alors, x et y étant deux racines du polynome $f(x)$, la relation $R = 0$ peut se remplacer par $S = 0$, qui est d'ordre $m - 1$.

Cherchons alors la forme générale des relations involutives d'ordre $m - 1$ qui sont vérifiées par tout couple de deux racines d'un polynome $f(x)$ de degré m.

Soit a une racine du polynome : les polynomes entiers en x, $R(x, a)$ et $\frac{f(x)}{x - a}$ doivent avoir les mêmes racines ; si je suppose réduit à l'unité le coefficient de x^m dans $f(x)$, le quotient $\varphi(a)$ des deux polynomes sera le coefficient de x^{m-1} dans $R(x, a)$, c'est-à-dire un polynome entier en a de degré $m - 1$, et on aura

$$R(x, a) = \frac{f(x)}{x - a}\varphi(a).$$

Par suite, le polynome en y $(x - y)R(x, y) - f(x)\varphi(y)$ est annulé par les racines y de $f(y)$: il doit donc être divisible par $f(y)$, *quel que soit* x, et le quotient sera manifestement $-\varphi(x)$, d'où l'identité

$$(x - y)R(x, y) - f(x)\varphi(y) = -f(y)\varphi(x),$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad R(x, y) = \frac{f(x)\varphi(y) - f(y)\varphi(x)}{x - y}.$$

Réciproquement, *la relation $R(x, y) = 0$ étant déterminée par la formule (1), cherchons tous les polynomes $F(x)$ de degré m tels qu'un couple quelconque de leurs racines y satisfasse.*

Soit a une racine d'un tel polynome ; il pourra se mettre sous la forme

$$F(x) = (x - a)R(x, a) = f(x)\varphi(a) - \varphi(x)f(a).$$

Donc $F(x)$ appartient au *faisceau linéaire* de polynomes $\lambda f(x) + \mu\varphi(x)$, et inversement tout polynome de ce faisceau répond à la question, car si x et y sont deux quelconques de ses racines distinctes, on a

$$\lambda f(x) + \mu\varphi(x) = 0, \qquad \lambda f(y) + \mu\varphi(y) = 0;$$

d'où, λ et μ n'étant pas simultanément nuls, $f(x)\varphi(y) - \varphi(x)f(y) = 0$; et comme x est différent de y,

$$\frac{f(x)\varphi(y) - \varphi(x)f(y)}{x - y} = 0.$$

La démonstration s'étend sans peine au cas de deux racines x et y égales.

Remarque. — On peut, en particulier, remplacer dans la formule (1) $\varphi(x)$ par $(\varphi(x) + \lambda f(x))$ et par suite supposer, si l'on veut, $\varphi(x)$ de degré m comme $f(x)$.

2. Cherchons les relations qui doivent exister entre les coefficients de $R(x, y)$ pour qu'on puisse lui donner la forme (1) ; cela revient à considérer celles qui lient les coefficients du numérateur $f(x)\varphi(y) - \varphi(x)f(y)$; supposons toujours $\varphi(x)$ de degré $m - 1$ et soit

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0, \qquad \varphi(x) = B_{m-1}x^{m-1} + \ldots + B_0.$$

Désignons par A_{pq} le coefficient de $x^p y^q$ dans le numérateur considéré ; on aura

$$(\alpha) \qquad A_{pq} = a_p B_q - a_q B_p \qquad (p, q \text{ différents, pris chacun de } 0 \text{ à } m, \text{ avec } B_m = 0).$$

En particulier, pour $p = m$,

$$A_{m0} = a_m B_0, \qquad A_{m1} = a_m B_1, \qquad \ldots \qquad A_{m,m-1} = a_m B_{m-1}.$$

Si je suppose $a_m = 0$, ces équations donnent les coefficients B en fonction des A ; l'un de ces coefficients est différent de 0, soit par exemple B_0, c'est-à-dire que A_{m0} est différent de 0 ; on a alors, pour $p = 0$,

$$A_{01} = a_0 B_1 - a_1 B_0, \qquad A_{02} = a_0 B_2 - a_2 B_0, \qquad \ldots \qquad A_{0,m-1} = a_0 B_{m-1} - a_{m-1} B_0,$$

d'où l'on tire les coefficients $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$:

$$a_1 = \frac{a_0 A_{m1} - a_m A_{01}}{A_{m0}}, \qquad a_2 = \frac{a_0 A_{m2} - a_m A_{02}}{A_{m0}}, \qquad \ldots \qquad a_{m-1} = \frac{a_0 A_{m,m-1} - a_m A_{0,m-1}}{A_{m0}}.$$

Ces valeurs doivent vérifier les relations restantes, en nombre $\frac{m(m-1)}{2}$; en substituant dans l'une d'elles (α), on a

$$a_m A_{pq} A_{m0} = A_{mq} a_0 A_{0p} - a_p A_{0q} - A_{mp} a_0 A_{0q} - a_m A_{0q}).$$

Alors a_0 et a_m disparaissent, et il reste

$$A_{pq} A_{m0} - A_{mq} A_{0p} - A_{0q} A_{mp} = 0,$$

dans laquelle pq est un couple de deux nombres de la suite $1, 2, \ldots (m-1)$. On a ainsi $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ équations de condition entre les coefficients A, et le calcul qui vient d'être fait montre bien que, quand elles sont remplies, le polynome $f(x)$ correspondant dépend linéairement d'un paramètre arbitraire.

Remarque. — La question qui vient d'être traitée revient à celle-ci : établir les relations qui lient les déterminants tirés d'un tableau rectangulaire :

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ B_0 & B_1 & B_2 & \ldots & B_m \end{matrix} \right\|.$$

3. Ce qui précède s'applique immédiatement à la *théorie des polygones de Poncelet*.

Supposons qu'il existe un polygone *proprement dit* P de m côtés inscrit dans une conique C et circonscrit à une autre Γ ; déterminons individuellement les points de C à l'aide d'un paramètre t ; il

doit exister entre les paramètres t_0 et t de deux sommets quelconques de P *une relation involutive d'ordre* $m-1$: en effet, si l'on se donne t_0, tous les autres sommets sont déterminés d'une manière unique ; soient $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ les paramètres de ces sommets, rencontrés successivement en parcourant le périmètre de P toujours dans le même sens ; t_k et t_{m-k} sont, comme on sait (1), racines d'une relation involutive du second ordre, $I_k(t, t_0) = 0$, dont le premier membre, pour $k = \frac{m}{2}$, quand m est pair, devient carré parfait, de sorte que t_0 et $t_{\frac{m}{2}}$ se correspondent homographiquement ; donc, si l'on pose

$$R(t,t_0) \equiv I_1(t,t_0)I_2(t,t_0)\ldots \begin{cases} I_{\frac{m-1}{2}}(t,t_0) & (m \text{ impair}) \\ \sqrt{I_{\frac{m}{2}}(t,t_0)} & (m \text{ pair}) \end{cases}$$

la relation $R(t, t_0) = 0$ sera bien une relation involutive d'ordre $m-1$ qui sera vérifiée par les paramètres t et t_0 de deux sommets quelconques ; si l'on appelle $f(t)$ le polynome qui a pour racines les paramètres des m sommets, on pourra donc mettre cette relation sous la forme

$$(2) \qquad R(t, t_0) = \frac{f(t)\varphi(t_0) - \varphi(t)f(t_0)}{t - t_0} = 0.$$

Par conséquent *l'existence du polygone* P *entraîne celle d'une infinité d'autres polygones analogues dont les sommets forment sur* C *l'involution* $f(t) + \lambda\varphi(t) = 0$, où λ est arbitraire (2).

Conséquence. — Ce résultat facilite la recherche des lieux géométriques relatifs aux polygones P.

Par exemple, soient $f(t) = 0$ et $\varphi(t) = 0$ deux équations du troisième degré déterminant les paramètres des sommets de deux triangles inscrits dans C : il existe toujours une conique Γ inscrite à la fois dans ces deux triangles ; alors l'équation générale qui détermine les sommets de tous les triangles inscrits dans K et circonscrits à Γ sera $f(t) + \lambda\varphi(t) = 0$, et permettra de trouver aisément des lieux géométriques tels que ceux de leurs centres de gravité, de leurs orthocentres, etc (3).

Remarque I. — Il est bien évident que tout faisceau linéaire de polynomes de degré m, $f(t) + \lambda\varphi(t) = 0$ ne détermine pas toujours des polygones inscrits dans R et tous circonscrits à une même conique Γ ; il faut pour cela que la relation involutive correspondante,

$$R(t, t_0) = \frac{f(t)\varphi(t_0) - \varphi(t)f(t_0)}{t - t_0} = 0,$$

se décompose, comme nous l'avons vu, en relations du second ordre (ou du premier). La relation $R(t, t_0) = 0$ équivaut d'ailleurs à l'équation tangentielle de *l'enveloppe des cordes de l'involution* $f(t) + \lambda\varphi(t) = 0$, λ étant le paramère variable : car la corde qui joint les deux sommets (t) et (t_0) a des coordonnées homogènes qui sont fonctions linéaires de $t + t_0$ et de tt_0 ; il faut donc que cette enveloppe, de classe $m-1$, se décompose en coniques, complétées par un point quand m est pair.

Remarque II. — La méthode suivie ici s'étend à beaucoup de questions du même genre ; par exemple, elle s'applique au problème connu des tétraèdres inscrits dans une cubique gauche et conjugués par rapport à une quadrique.

ALGÈBRE

997. — *On considère une équation du troisième degré*

$$ax^3 - 3bx^2 + 3cx - d = 0,$$

dont on désigne les trois racines par α, β, γ.

(1) Voir dans la *Revue* d'octobre 1900 un article de M. Cahen sur les *Polygones de Poncelet*.

(2) Par une voie toute différente, M. Darboux (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, note II sur les *polygones de Poncelet*, page 183) est arrivé à l'équation (2) et en a déduit le théorème de Poncelet. M. Darboux détermine individuellement les *côtés* du polygone, au lieu des sommets.

(3) Voir un article de M. Fontené dans la *Revue* d'avril 1900.

Trouver un trinome du second degré

$$\theta(x) = px^2 + 2qx + r,$$

tel que l'on ait simultanément

$$\theta(\alpha) = \beta, \qquad \theta(\beta) = \gamma, \qquad \theta(\gamma) = \alpha,$$

ou

$$\theta(\alpha) = \gamma, \qquad \theta(\beta) = \alpha, \qquad \theta(\gamma) = \beta.$$

Considérons les trois trinomes

$$\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \qquad \frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}, \qquad \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

qui s'annulent chacun pour deux racines de l'équation du troisième degré et qui, pour la troisième racine, prennent la valeur 1 : les deux trinomes cherchés $\theta(x)$ et $\theta_1(x)$ s'expriment immédiatement à l'aide de ceux-ci et prennent les formes suivantes :

$$\theta(x) = \beta\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \gamma\frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \alpha\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

$$\theta_1(x) = \gamma\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \alpha\frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \beta\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Nous aurons ces deux trinomes en calculant la somme et la différence de θ et θ_1. Désignons par P le produit $(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$, nous aurons

$$\theta + \theta_1 = \frac{\Sigma(\beta^2-\gamma^2)(x-\beta)(x-\gamma)}{P}$$

et

$$\theta - \theta_1 = -\frac{\Sigma(\beta-\gamma)^3(x-\beta)(x-\gamma)}{P}.$$

La première expression est une fonction symétrique de α, β, γ, telle que chaque coefficient du numérateur soit divisible par P : le coefficient de x^2 est nul ; celui de x est égal à $\Sigma(\beta+\gamma)(\beta^2-\gamma^2)$ ou à $\Sigma(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)$ et cette quantité est égale à $-P$ comme il est facile de le vérifier : enfin le terme constant est égal à $\Sigma\beta\gamma(\gamma^2-\beta^2)$ ou à $P(\alpha+\beta+\gamma)$. Par conséquent la valeur de $\theta+\theta_1$ est immédiate, et l'on a

$$\theta + \theta_1 = -x - \frac{3b}{a}.$$

La deuxième expression est le quotient d'une fonction symétrique par P ou par $-P$. Au numérateur le coefficient de x^2 est $\Sigma(\beta-\gamma)^2$ ou $2\Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\alpha\beta$; sa valeur est immédiate, car $\Sigma\alpha^2 = (\Sigma\alpha)^2 - 2\Sigma\alpha\beta$; le coefficient de x^2 est donc $\frac{18b^2 - ac}{a^2}$.

Le coefficient de x est $-\Sigma(\beta+\gamma)(\beta^2-\gamma^2)$, ou $-\Sigma(\beta-\gamma)(\beta-\gamma)^2$, ou finalement $-2\Sigma\alpha^3 + \Sigma\alpha^2\beta$; or on trouve de suite $\Sigma\alpha^3 = \Sigma\alpha\Sigma\alpha^2 - \Sigma\alpha^2\beta$ et $\Sigma\alpha^2\beta = \Sigma\alpha\Sigma\alpha\beta - 3\alpha\beta\gamma$; le calcul s'achève dès lors aisément et donne $\frac{9}{a}\cdot\frac{6b^3 - 7abc + a^2d}{a}$.

Enfin le terme constant a pour valeur $\Sigma\beta\gamma(\beta-\gamma)^2$ ou $\Sigma\alpha\beta - 2\Sigma\alpha^2\beta^2$; nous avons

$$\Sigma\alpha\beta\Sigma\alpha^2 = \Sigma\alpha^2\beta + \alpha\beta\gamma\Sigma\alpha$$

et

$$\Sigma\alpha^2\Sigma\alpha\beta = \Sigma\alpha^2\beta + 2\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha,$$

par suite,

$$\Sigma\alpha\beta - 2\Sigma\alpha^2\beta^2 = \Sigma\alpha\Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\alpha^2\beta - 3\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha ;$$

le calcul s'achève facilement et donne

$$\frac{9}{a}(3b^2 - 4ac - abd).$$

Nous avons donc finalement

$$\theta - \theta_1 = \frac{-9}{aP}(2ab^2 - a^2c)x^2 + (6b^3 - 7abc + a^2d)x + 3b^2c - 4ac^2 + abd.$$

et il reste à calculer P. Or si nous considérons le résultant des deux équations

$$\frac{1}{3}f_x = ax^2 + 2bx + c = 0, \qquad \frac{1}{3}f'_x = bx^2 + 2cx + d = 0,$$

$$\Delta = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2),$$

ce résultant est le discriminant de l'équation du troisième degré et il a pour expression $-\frac{a^4}{27}(\alpha - \beta)^2$ ou $-\frac{a^4}{27}P^2$, comme il est aisé de s'en assurer. Nous avons donc $a^2P = \sqrt{-27\Delta}$. Le calcul de $\theta - \theta_1$ est dès lors achevé et celui de θ et θ_1 se fait ensuite sans difficulté.

Remarque. — Le calcul particulièrement facile qui donne $\theta + \theta_1$ peut être envisagé comme une conséquence naturelle d'une méthode générale de calcul applicable aux fonctions symétriques rationnelles, et qui a été indiquée d'une façon sommaire par M. Drach dans l'ouvrage qu'il a publié en collaboration avec M. Borel sur la *Théorie des nombres et l'Algèbre supérieure*, en 1895, à la librairie Nony. Voici en quoi consiste cette méthode : considérons une fraction rationnelle et symétrique de plusieurs nombres a, b, c, l, $\frac{f(a, b, \ldots l)}{g(a, b, \ldots l)}$, et supposons que f et g ne soient pas symétriques ; s'ils ne sont pas symétriques par rapport au couple (a, b), en échangeant a et b, nous aurons

$$\frac{f(a, b, \ldots, l)}{g(a, b, \ldots, l)} = \frac{f(b, a, \ldots, l)}{g(b, a, \ldots, l)};$$

par suite, chacun des rapports est égal à

$$\frac{f(a, b, \ldots, l) - f(b, a, \ldots, l)}{g(a, b, \ldots, l) - g(b, a, \ldots, l)},$$

et les deux termes de cette fraction sont divisibles par $a - b$; elle prend la forme nouvelle

$$\frac{f_1(a, b, \ldots, l)}{g_1(a, b, \ldots, l)}.$$

Nous continuerons l'application de ce procédé, tant que le numérateur et le dénominateur ne seront pas symétriques par rapport à tous les couples $(a, b), (a, c), \ldots (k, l)$, et cela arrivera nécessairement a un certain moment, puisqu'à chaque fois les degrés s'abaissent d'une unité. Nous serons ainsi ramenés au calcul de deux fonctions symétriques entières ou d'une seule, si le dénominateur s'abaisse au degré 0, ou le numérateur.

E. H.

Bonne solution : M. J. Marchal.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

992. — *On donne dans un plan deux coniques* (S) *et* (S') *et un point* R. *Soient* P, Q *et* P', Q' *les points de contact des tangentes menées de* R *respectivement aux coniques* (S) *et* (S').

1° *Montrer que les droites* PP', PQ', P'Q *et* QQ' *et les quatre tangentes communes aux coniques* (S) *et* (S') *sont tangentes à une même conique* Σ. P_1, Q_1, *et* P'_1, Q'_1 *étant les points de contact des tangentes menées d'un point* R_1 *à* (S) *et à* (S') ; *montrer qu'il existe une infinité de points* R_1 *tels que les droites* $P_1P'_1$, $P_1Q'_1$, $Q_1P'_1$, $Q_1Q'_1$ *soient tangentes à* Σ *et trouver le lieu des points* R_1.

2° *La conique* (S) *et le point* R *étant supposés fixes, trouver l'enveloppe de la polaire de* R *par rapport à* Σ, *lorsque* (S') *varie en restant inscrite à un quadrilatère circonscrit à* (S), *ou circonscrite à un quadrilatère inscrit à* (S).

1. Supposons les coniques rapportées à leur triangle autopolaire commun. Leurs équations tangentielles peuvent s'écrire

$$S = au^2 + bv^2 + cw^2 = 0, \qquad S' = a'u^2 + b'v^2 + c'w^2 = 0.$$

Soit

$$R = \alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

l'équation du point R.

L'équation tangentielle de l'ensemble des points P, Q est de la forme $\lambda S - R^2 = 0$, celle des points P, R, de la forme $\lambda' S - R^2 = 0$. La conique obtenue en retranchant ces équations membre à membre :

$$\Sigma = \lambda S - \lambda' S' = 0,$$

satisfait bien aux conditions énoncées pour Σ.

Remarque. — Si l'on suppose que les équations précédentes représentent de véritables coniques bitangentes à S et S' respectivement en PQ et PQ', on a cette proposition plus générale :

Étant données deux coniques S et S' et deux autres coniques S_1 et S'_1 bitangentes respectivement à S et S', le pôle R des cordes de contact étant le même, les tangentes communes à S et S', et à S_1 et S'_1 sont huit droites tangentes à une même conique.

On a, du reste,

$$\lambda = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c}, \qquad \lambda' = \frac{\alpha^2}{a'} + \frac{\beta^2}{b'} + \frac{\gamma^2}{c'}.$$

L'équation d'une conique Σ relative à un point R_1 $(R_1 = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w = 0)$ est $\lambda_1 S - \lambda'_1 S' = 0$, avec

$$\lambda_1 = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c}, \qquad \lambda'_1 = \frac{\alpha^2}{a'} + \frac{\beta^2}{b'} + \frac{\gamma^2}{c'}.$$

Pour que les coniques Σ et Σ_1 coïncident, il faut qu'on ait $\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{\lambda'_1}{\lambda'}$.

Or on a $\lambda_1 = s(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $\lambda'_1 = s'(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, en désignant par $s(x, y, z) = 0$ et $s'(x, y, z) = 0$, les équations ponctuelles des coniques S et S'. Le point R étant fixe, le lieu des points R_1 est donc la conique

$$\lambda' s - \lambda s' = 0.$$

2. Supposons d'abord S' inscrite dans un quadrilatère circonscrit à S.

Nous prendrons pour triangle de référence le triangle des diagonales du quadrilatère. Les équations des coniques ne seront pas changées, mais on aura les conditions

$$a + b + c = 0, \qquad a' + b' + c' = 0.$$

Les coordonnées u, v, w de la polaire de R par rapport à Σ satisfont aux équations

$$\frac{\frac{\partial \Sigma}{\partial u}}{\alpha} = \frac{\frac{\partial \Sigma}{\partial v}}{\beta} = \frac{\frac{\partial \Sigma}{\partial w}}{\gamma},$$

qui peuvent s'écrire

$$\frac{\lambda a - \lambda' a'}{\frac{\alpha}{a}} = \frac{\lambda b - \lambda' b'}{\frac{\beta}{b}} = \frac{\lambda c - \lambda' c'}{\frac{\gamma}{c}}.$$

Si on additionne les numérateurs, on a $\lambda(a + b + c) - \lambda'(a' + b' + c') = 0$.

La somme des dénominateurs est donc nulle :

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0.$$

L'enveloppe des polaires de R est par suite une conique inscrite dans le triangle des diagonales du quadrilatère et elle est la même pour toutes les coniques S inscrites dans ce quadrilatère, pourvu que le point R soit fixe.

Supposons maintenant S' circonscrite à un quadrilatère inscrit dans S. Pour conserver la forme des équations des coniques, il nous faudra prendre comme triangle de référence, le triangle qui a pour sommets le point de concours des diagonales et les points de rencontre des côtés opposés du quadri-

latère. On aura alors les conditions (*)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0, \qquad \frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}=0.$$

Les équations qui déterminent les coordonnées u, v, w de la polaire de R peuvent s'écrire

$$\frac{\dfrac{\lambda}{a'}-\dfrac{\lambda'}{a}}{\dfrac{\alpha}{aa'u}}=\frac{\dfrac{\lambda}{b'}-\dfrac{\lambda'}{b}}{\dfrac{\beta}{bb'v}}=\frac{\dfrac{\lambda}{c'}-\dfrac{\lambda'}{c}}{\dfrac{\gamma}{cc'w}}.$$

La somme des numérateurs étant nulle $\left(\lambda\left(\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\right)-\lambda'\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0\right)$, il doit en être de même de la somme des dénominateurs :

$$\frac{\alpha}{aa'u}+\frac{\beta}{bb'v}+\frac{\gamma}{cc'w}=0.$$

Multiplions les deux termes de chaque fraction respectivement par α^2, β^2, γ^2 et ajoutons les numérateurs ; nous obtenons $\lambda\lambda'-\lambda'\lambda=0$.

On a donc la condition

$$\frac{\alpha^3}{aa'u}+\frac{\beta^3}{bb'v}+\frac{\gamma^3}{cc'w}=0.$$

Or la première équation de condition $\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}=0$ peut s'écrire

$$\frac{au}{aa'u}+\frac{bv}{bb'v}+\frac{cw}{cc'w}=0.$$

Si nous éliminons $\frac{1}{aa'u}$, $\frac{1}{bb'v}$, $\frac{1}{cc'w}$, entre les trois équations homogènes, nous avons

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \\ au & bv & cw \end{vmatrix}=0.$$

ou, en posant

$$\frac{\alpha'}{\dfrac{a}{\alpha}(\beta^2-\gamma^2)}=\frac{\beta'}{\dfrac{b}{\beta}(\gamma^2-\alpha^2)}=\frac{\gamma'}{\dfrac{c}{\gamma}(\alpha^2-\beta^2)},$$

$$\alpha'u+\beta'v+\gamma'w=0.$$

La polaire de R passe donc par le point fixe $(\alpha', \beta', \gamma')$. VASNIER.

Nous avons reçu de M. L. Bickart une solution analogue à la précédente, le problème ayant d'abord été transformé en son corrélatif.

Solution satisfaisante : M. G. Fauvernier.

---

993. — *On considère un triangle* OAB *rectangle en* O *et le cercle circonscrit à ce triangle. Soit* C *un point variable sur ce cercle. On demande l'équation de la conique passant aux quatre points* O, A, B, C *et ayant pour centre le milieu de* OA.

1° *Trouver le lieu du pôle de* OB *par rapport à cette conique.*

2° *Trouver le lieu du point de rencontre de la droite* AC *avec la droite qui joint les points de rencontre de* OA *avec* BC *et de* OC *avec* BA ;

3° *Trouver le lieu des sommets de cette conique et construire ce lieu.*

(*) Ces équations de condition de même que celles du cas précédent peuvent s'écrire ainsi qu'il a été fait parce que l'on peut prendre pour coordonnées de l'un des sommets du quadrilatère les nombres 1, 1, 1, et, dans le premier cas, les mêmes nombres pour coordonnées d'un côté.

Désignons OA par $2a$, OB par $2b$ (fig. 1).

L'équation du cercle donné rapporté aux deux axes indiqués, OA ou ox et OB ou oy, est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0;$$

l'équation de AC est $\lambda y + x - 2a = 0$, λ étant un paramètre variable.

Il s'ensuit immédiatement que l'équation de la conique demandée est

$$(x^2 + y^2 - 2ax - 2by) + \mu(\lambda y + x - 2a) = 0,$$

pour une certaine valeur de μ ; nous obtiendrons cette valeur en exprimant que les deux équations du centre sont vérifiées pour les coordonnées α, β du point ω, milieu de OA ; la première de ces équations, $f'_x = 0$, est vérifiée identiquement, la seconde donne $\mu = \frac{a\lambda}{2b}$; par suite l'équation de la conique demandée est

$$(x^2 + y^2 - 2ax - 2by) + \frac{a\lambda}{2b}(\lambda y + x - 2a) = 0.$$

1. Les coordonnées du pôle de OB vérifient les équations $f'_y = 0$, $f'_x = 0$. La première contient λ en facteur et fournit immédiatement le lieu demandé :

$$(1) \qquad ay + bx - ab = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0;$$

c'est la droite $\omega\omega'$ qui joint les milieux des côtés OA et OB.

Ce résultat était évident *a priori*, car la droite $\omega\omega'$ qui joint le centre de chacune des coniques au milieu de la corde OB est dans chacune d'elles le diamètre conjugué de OB, et, par suite, elle contient toujours le pôle de cette corde. D'ailleurs ces coniques passent toutes par le point D symétrique de B par rapport à ω ; elles forment donc le faisceau linéaire circonscrit au parallélogramme ODAB ; dès lors, elles ont un système de diamètres conjugués fixe, celui qui est formé par les deux parallèles aux côtés de ce parallélogramme menés par le point ω.

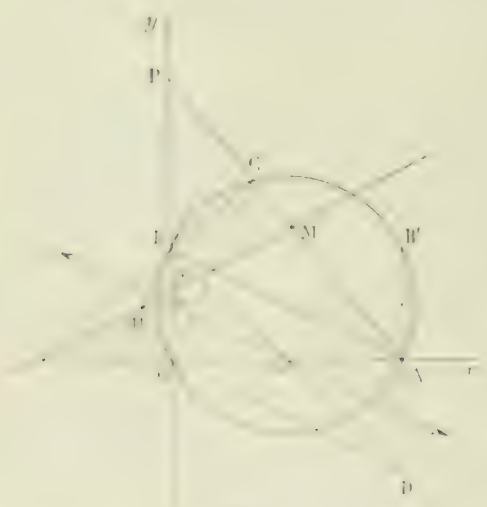


Fig. 1.

2. La droite variable MH dont il est question dans cette seconde partie est la polaire du point de rencontre de OB et de AC aussi bien par rapport au cercle que par rapport à l'une quelconque des coniques envisagées ; elle a donc pour équation $2a(y - b) - \lambda(ax + by) = 0$.

Nous aurons l'équation du lieu du point M en éliminant λ entre cette équation et celle de AC ; cette élimination est immédiate et conduit à

$$(2) \qquad ax^2 + bxy - 2ay^2 - 2ax + 4aby = 0.$$

C'est l'équation d'une conique qui passe aux trois points O, A et B.

Ce résultat peut encore s'obtenir géométriquement d'une manière aisée. En effet, la droite HM passe par un point fixe H, le pôle de OB ; d'autre part, le point P′ où elle rencontre OB est le conjugué harmonique de P par rapport aux points O et B. Les deux points P et P′ décrivent donc deux séries homographiques sur OB ; par suite, les deux faisceaux HM et AC sont homographiques, et le lieu du point M est une conique qui passe aux points A et H. Il est facile de voir qu'elle passe aussi aux points O et B et par le milieu de la corde AB′ parallèle à OB. C'est donc une conique dont on connaît cinq points, ce qui suffit à la déterminer. Il est facile d'avoir les directions asymptotiques de cette conique quand elle en a, car lorsque le point M est à l'infini, le point P′ est au milieu de AC et rien n'est plus simple que de trouver les positions particulières de AC pour lesquelles il en est ainsi.

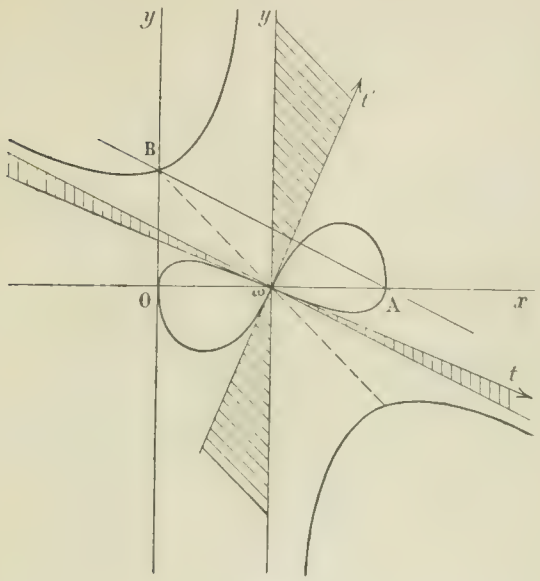


Fig. 2.

3. Portons les axes parallèlement à eux-mêmes au point ω; l'équation de la conique variable deviendra

$$a\lambda\left(x^2 + y^2 + \frac{2b}{a}xy - a^2\right) + 2b(x^2 - a^2) = 0.$$

Les axes ont alors pour équation $\frac{f'_x}{x} = \frac{f'_y}{y}$ qui, toutes réductions faites, s'écrit

$$\lambda(x^2 - y^2) = 2xy.$$

Le lieu des sommets s'obtient en tirant d'ici la valeur de λ et portant cette valeur dans l'équation de la conique; nous trouvons ainsi

$$(3) \qquad x(x^2 + y^2)(ay + bx) - a^2[b(x^2 - y^2) + axy] = 0,$$

équation d'une quartique circulaire ayant un point double à l'origine, admettant ce point pour centre et ayant pour asymptotes les parallèles à OB et à AB menées par le point ω. Les tangentes à l'origine sont rectangulaires; ce sont, comme il est facile de le vérifier et comme il est d'ailleurs évident géométriquement, les bissectrices des deux droites qui constituent la conique évanouissante du faisceau qui se réduit à deux droites passant par le point ω; elles sont donc aisées à construire. Il y a deux autres coniques du faisceau qui se réduisent à deux droites; ce sont les couples de droites parallèles formés par les côtés opposés du parallélogramme ODAB; chacune d'elles a deux sommets confondus à l'infini situés sur la droite équidistante de celles qui constituent le couple envisagé. Cette remarque fournit les points à l'infini et les asymptotes du lieu.

Enfin en se servant des deux tangentes à l'origine et des deux asymptotes, on arrive à une décomposition en régions qui équivaut à l'étude des intersections de la courbe avec les droites qui passent à l'origine et qui permet d'achever la construction de la courbe (*fig.* 2). Il sera bon en outre de remarquer que la courbe passe aux points O, A et B et qu'elle est tangente en O à l'axe des y.

J. MARCHAL.

Bonnes solutions : MM. G. Fauvernier ; Cans.
Assez bonnes solutions : MM. J.-D. Dufaut ; Souls, à Condom.

PHYSIQUE

1004. — *Un ballon sphérique en verre mince, vide et de rayon* R, *est placé entre deux glaces planes minces, parallèles et indéfinies dont il est séparé par des distances égales à son diamètre. L'intervalle est rempli d'eau dont l'indice n est* $\frac{4}{3}$.

1° *Où se formera l'image d'un objet placé en* A *pour un observateur placé en* O *sur l'axe* ABCD *du système, et quel sera le grossissement?*

2° *Si la glace* A *est couverte de papier noir et le ballon rempli d'un gaz colore, jaune par exemple, la salle où se fait l'expérience étant d'ailleurs éclairée par de la lumière blanche, quel sera l'aspect du ballon pour l'observateur supposé très éloigné?*

3° *Comment cet aspect varierait-il avec l'indice n?*

1. Pour l'étude des rayons centraux, appliquons successivement à chaque réfraction les formules

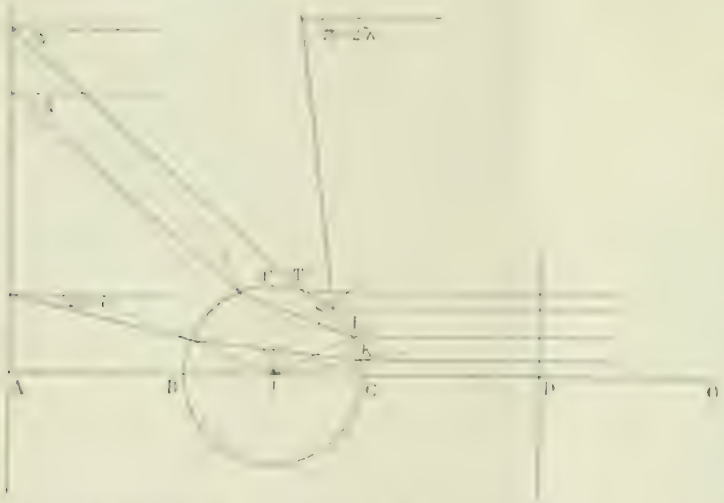
générales

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{r} \quad \text{et} \quad g = \frac{n_1}{n_2}\frac{p_2}{p_1}.$$

Première réfraction : $\dfrac{\frac{4}{3}}{2R} - \dfrac{1}{p_2} = \dfrac{\frac{4}{3} - 1}{-R}$, d'où $p_2 = R$, $g = \dfrac{4}{3}\dfrac{R}{2R} = \dfrac{2}{3}$.

Deuxième réfraction : $\dfrac{1}{3R} - \dfrac{\frac{4}{3}}{p_2} = \dfrac{1 - \frac{4}{3}}{R}$; $p_2 = 2R$, $g = \dfrac{3}{4}\dfrac{2R}{3R} = \dfrac{1}{2}$.

Troisième réfraction : $\dfrac{\frac{4}{3}}{4R} - \dfrac{1}{p_2} = 0$; $p_2 = 3R$, $g = \dfrac{4}{3}\dfrac{3R}{4R} = 1$.



Donc l'image se formera au centre I du système et le grossissement sera $gg'g'' = \dfrac{1}{3}$.

2. L'observateur étant très éloigné, nous considérerons les rayons émis parallèlement à l'axe du système par les divers points du ballon. Soit i l'angle que l'un d'eux forme avec la normale à la face sphérique et r l'angle que fait avec la même normale le rayon correspondant, s'il existe, à l'intérieur de la sphère.

Les rayons venus d'un point du ballon voisin de C auront d'abord traversé le ballon et proviendront d'un point de la glace A où ils feront avec la normale à cette glace un angle égal à $2(r - i)$; cet angle augmente à mesure qu'on s'éloigne de l'axe.

En un certain point S, l'angle r devient égal à l'angle limite λ ; le rayon a été réfléchi totalement sur la sphère et provient d'un point de A où il fait avec la normale l'angle maximum $\pi - 2\lambda$. Du point S au point P, il y a réflexion totale et l'angle avec la normale à la glace A varie de $\pi - 2\lambda$ à 0.

Supposons maintenant $\pi - 2\lambda > \lambda$ ou $\lambda < \frac{\pi}{3}$, ce qui est le cas de l'eau. Le rayon réfléchi totalement en S a été déjà réfléchi totalement sur A. Il en est de même au dessus du point S jusqu'au point T où l'on a $2r = \pi - \lambda$ ou $r = \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}$. La zone SI paraîtra blanche.

Du point T au point P. Les rayons réfléchis totalement par le ballon n'ont subi qu'une réflexion partielle sur A et viennent surtout du papier noir ; la zone TP paraîtra noire.

Entre S et C. Une partie de la lumière a traversé le ballon ; mais, jusqu'au point L pour lequel $2(r - i) = \lambda$, cette lumière a été réfléchie totalement sur A ; la zone LS paraîtra jaune.

Enfin, de L en C, la lumière vient surtout du papier noir : la zone LC paraîtra noire.

3. Si n augmente, r augmente, le point S se rapproche du point P et en même temps L et T se rapprochent de S. Pour $n = \frac{\pi}{3}$ ou $= 1.05$, les zones colorées ont disparu.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1901)

I. — Mathématiques élémentaires.

2343. — La somme $\alpha + \beta + \ldots + \lambda$ étant constante, la somme $\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \lambda^2$ a-t-elle un maximum ou un minimum?

2344. — Trouver le volume de la pyramide en la considérant comme la limite de la somme de prismes inscrits dans la pyramide.

2345. — Volume du prismatoïde.

2346. — On donne un cercle, une tangente et une sécante parallèle à la tangente: position de la sécante pour que la surface engendrée par cette sécante tournant autour de la tangente soit maximum.

2347. — On donne une sphère O tangente à un plan P, on la coupe par un plan P′ parallèle à P. Le petit cercle section est la base d'un cylindre de révolution limité au plan P. Déterminer la distance des plans P et P′ pour que le volume du cylindre soit maximum.

2348. — Calculer la longueur $x = \sqrt[4]{\dfrac{a^4 - 1}{a^6 + 1}}$.

II. — Algèbre.

2349. — Décomposer en un produit de facteurs linéaires le polynome

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc.$$

2350. — Calculer le coefficient de x^8 dans le développement de

$$(1 + 2x - 4x^2 + 8x^3)^7.$$

2351. — Calculer la somme

$$1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2)(n+3).$$

2352. — Étant donnés les trois nombres 546, 273, 169 multiples de 13, démontrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

est divisible par 13.

2353. — Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$$

2354. — Etudier la série

$$1,\ a,\ ab,\ a^2b,\ a^2b^2,\ a^3b^2,\ \ldots$$

2355. — Etudier les séries qui ont pour termes généraux

$$(n!)^n; \qquad \frac{2n}{(2n+1)!}; \qquad \frac{x^n}{(3n+2)!}; \qquad (-1)^n \operatorname{tg}\frac{x}{n}; \qquad (-1)^n \sin\frac{x}{n}.$$

2356. — Etudier la série dont le terme général u_n est égal à $a^{n-p}x^{\frac{p(p-1)}{2}}$, p étant le nombre des chiffres de n $(0 < a < 1,\ x > 1)$.

2357. — Calculer la somme $x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \ldots + nx$.

2358. — Trouver géométriquement les dérivées de $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$.

2359. — Dérivées des fonctions

$$\mathrm{L}(\cos x + i \sin x), \qquad \mathrm{L}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \qquad (\sin x)^{\sin x}, \qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{u+v}{1-uv}\ (u \text{ et } v \text{ étant des fonctions de } x),$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{1-ax}, \qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad \sin x^{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^n}.$$

2360. — La fonction y étant définie par l'équation $x^2 + y^2 = \sin\dfrac{x}{y}$, calculer y'.

2361. — Même question pour l'équation $x \sin\dfrac{y}{x} - ye^{\frac{x^2}{x^2+1}} = 0$.

2362. — Etudier les variations des fonctions

$$\frac{\sin x}{x}, \qquad e^{\frac{x^2}{x^2+1}}, \qquad \cos\sqrt{x}\ (x \text{ positif et négatif}), \qquad x\,e^{\frac{1}{x^2+1}}, \qquad x^3 + x^2 - 2x - 1, \qquad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

$$xe^{\frac{1-x}{1+x}}, \qquad \left(x + \frac{1}{x}\right)^x, \qquad (1+x)^{\frac{1}{x}}, \qquad e^{\frac{x-b}{x-a}}, \qquad \mathrm{L}\frac{3x+p}{x+\frac{p}{px+q}}, \qquad x - \log x, \qquad x\,\mathrm{L}(1+x).$$

2363. — Limites de $\dfrac{\operatorname{tg} \pi x - \pi x}{x \operatorname{tg} \pi x}$ pour $x = 0$, de $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{m}} + b^{\frac{1}{m}}}{2}\right)^m$ pour m infini.

2364. — Développer en série : $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, x^{-x}, $\operatorname{Ltl} - x$, $e^x \sin x$.

2365. — Appliquer la formule de Mac Laurin au développement de $\cos n \operatorname{arc\,cos} x$. En déduire la valeur de $\cos nx$ en fonction de $\cos x$ (n entier).

2366. — Dériver n des fonctions $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, e^{-x^2}, $e^{\frac{x}{a}}$, $(x - a)^n (x - b)^n$.

Déduire de cette dernière la somme des carrés des coefficients du binome.

2367. — Discuter les équations

$$x^4 - 2x + 3 = 0, \qquad x^5 - 2x^2 - 1 = 0, \qquad x^5 - x - 1 = 0, \qquad x^3 + p + \frac{q}{x} = 0,$$

$$x^4 - 2x^2 + px^2 - 1 = 0, \qquad x^5 + px^2 + qx + r = 0, \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

$$x^4 + 3x^2 + 2 = 0, \qquad x^{2n} + px^n + qx + r = 0, \qquad x^{2n} + px^n + q = 0, \qquad x^{12} - 3x^6 + 6 = 0.$$

2368. — Résoudre et discuter les équations

$$x^x + \operatorname{L} x = 0, \qquad 2 \sin x - x = 0, \qquad x - \operatorname{tg} x = 0, \qquad e^x + e^{-x} + 2x - 3 = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2x + a \sin x + b = 0, \qquad x = \sin x + \cos x, \qquad \sin 2x - 2 \cos x + 1 = 0, \qquad x = \sec x - \operatorname{tg} x,$$

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x - x\sqrt{2} = 2, \qquad ax + b - \operatorname{L}(px + q) = 0, \qquad x + \cos x = a, \qquad x \operatorname{L} x + x^2 - x - 7 = 0,$$

$$x \operatorname{L} x - x^2 + x + 2 = 0, \qquad ax - \sin x = 0, \qquad x \operatorname{arc\,tg} x + 2 \operatorname{arc\,tg} x - 3x + 1 = 0.$$

2369. — Résoudre le système

$$x + y = 1, \qquad 2(x^3 + y^3) + xy = 3(x^2 + y^2).$$

2370. — Résoudre le système

$$x^2 + 2yz = y^2 + 2zx = z^2 + 2xy = 1.$$

2371. — Étant donnés un cercle et un point A à l'intérieur, mener par le point A une sécante BAC, telle que le segment BC soit divisé par A en moyenne et extrême raison.

2372. — Tracer une corde divisant l'aire d'un cercle en moyenne et extrême raison.

2373. — Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sachant que les racines sont en progression arithmétique.

2374. — Appliquer la méthode de Newton et celle des parties proportionnelles pour calculer une valeur approchée de la racine réelle de l'équation $x^3 - 3 = 0$.

2375. — Démontrer que la dérivée d'ordre n de $(x - 1)^n$ est un polynome de degré n qui a toutes ses racines réelles.

2376. — La dérivée d'ordre n de e^{-x^2} est de la forme $e^{-x^2} P_n$, P_n étant un polynome de degré n qui a toutes ses racines réelles.

2377. — Trouver un polynome $f(x)$ tel que l'on ait $f(0) = 3$, $f'(0) = 4$, $f''(0) = 5$, $f'''(0) = 0$.

2378. — On donne l'équation

$$\frac{x - a}{2} \left[f(x) + f(a) \right] - f(x) + f(a) = 0,$$

où $f(x)$ désigne un polynome. Étudier l'ordre de multiplicité de la racine a.

2379. — Étant donnée l'équation $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, qui a pour racines a, b, c, résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = -\dfrac{C}{D}, \\ ax + by + cz = 3, \\ a^2x + b^2y + c^2z = -\dfrac{B}{A}. \end{cases}$$

2380. — Déterminer un polynome $f(x)$ du troisième degré tel que l'on ait $f(\alpha) = 3\beta$, $f(\beta) = 3\alpha$, α et β étant les racines de $f'(x) = 0$.

2381. — Si $a, b, c, \ldots, l$ sont les racines d'une équation $f(x) = 0$, calculer la fonction symétrique $\Sigma \dfrac{1}{(x - a)^2}$; en déduire que si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et distinctes, l'équation $f(x) f''(x) - f'^2(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires.

2382. — Calculer $\dfrac{1}{1 + x^2} + \dfrac{1}{1 + y^2} + \dfrac{1}{1 + z^2}$, x, y, z étant les racines de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$.

2383. — Calculer l'équation aux carrés des racines de l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ en se servant des relations entre les coefficients et les racines.

2384. — Étant donnée l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, calculer le produit des carrés des différences des racines.

2385. — Conditions pour qu'une équation du cinquième degré ait une racine double et une racine triple. Nombre de conditions.

2386. — Étant donnée une équation algébrique $f(x) = 0$ dont les racines sont $a, b, c, \ldots, l$, et un polynome $\varphi(x)$, démontrer que le coefficient de $\dfrac{1}{x}$ dans le quotient $\dfrac{\varphi(x) f'(x)}{f(x)}$ est égal à $\Sigma \varphi(a)$.

2387. — Étant donnée l'équation $x^4 - 3x^3 + mx^2 - 8x + 6 = 0$ et sachant que la somme de deux racines est égale à la somme des deux autres, déterminer m et résoudre l'équation.

2388. — Si la somme de n nombres est nulle, la somme des cubes est égale à trois fois la somme des produits trois à trois.

2389. — Conditions pour que l'équation $x^4 + 6px^2 + 4qx + r = 0$ n'ait que deux racines distinctes.

2390. — Condition pour que l'équation $x^5 + 10px^3 + 10qx^2 + 5rx + s = 0$ n'ait que trois racines distinctes.

2391. — Décomposer en facteurs réels du premier et du deuxième degré les polynomes $x^3 + 1$, $x^6 + 1$, $x^3 + 1$, $x^{12} - 1$.

2392. — Résoudre l'équation $x^6 - i = 0$.

2393. — Déterminer un polynome de degré au plus égal à 6 prenant les mêmes valeurs que $\sin x$ pour les valeurs de x égales à 0, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$, $\pm\frac{3\pi}{2}$.

2394. — Déterminer un polynome de degré au plus égal à 4 prenant les mêmes valeurs que $\cos x$ pour les valeurs de x égales à 0, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$.

2395. — Etant donnée une fonction $f(x)$, calculer $\Delta^n f(x)$ et trouver la limite de $\frac{\Delta^n f(x)}{h^n}$ quand h tend vers zéro.

2396. — Démontrer la formule

$$n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n - \ldots = n!$$

III. — Trigonométrie.

2397. — Calculer $\cos 6x$ et $\sin 6x$ en fonction de $\operatorname{tg} x$.

2398. — Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ connaissant $\cos 3a$; $\sin\frac{a}{4}$ connaissant $\operatorname{tg} 3a$.

2399. — Calculer $\sin 3a$ connaissant $\cos\frac{1}{2}a$.

2400. — Combien trouve-t-on de valeurs pour $\sin 7a$ quand on donne $\operatorname{tg} a$?

2401. — Calculer les fonctions circulaires de l'angle de 12°.

2402. — Calculer l'arc x défini par $x = 4 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$.

2403. — Calculer $(1+i)^m + (1-i)^m$, m étant un nombre entier positif.

2404. — Calculer la racine m^e de $1+i$, de $-i$.

2405. — Eliminer x et y entre les équations $\sin x = \sin\alpha\sin\gamma$, $\sin y = \sin\beta\sin\gamma$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

2406. — Résoudre les équations

$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x$, $\quad 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$, $\quad \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \operatorname{séc} x + \operatorname{cosec} x = 1$.

2407. — Résoudre les systèmes $\begin{cases} x + y = a, \\ \sin x + \cos y = b; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + y = a, \\ \cos x + \cos y = b. \end{cases}$

2408. — Calculer $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx$.

2409 — Rendre calculable par logarithmes $\sin A + \sin B - \sin C$ sachant que $A + B + C = \pi$.

2410. — Résoudre un triangle connaissant : 1° les trois hauteurs ; 2° a, A, S.

2411. — Si l'on a entre les angles d'un triangle la relation $\sin C - \cos A = \cos B$, le triangle est rectangle.

2412. — On donne deux triangles ABC, A'B'C' dans lesquels les angles A et A' sont supplémentaires et B et B' sont égaux. Démontrer la relation $aa' = bb' + cc'$.

IV. — Géométrie analytique à deux dimensions.

2413. — Construire les courbes qui ont pour équations en coordonnées rectilignes :

$y^2 = x^2 - x^3$, $\quad y^2 = \frac{x^2(x-a)(x^2+a^2)}{x^4+a^4}$, $\quad y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, $\quad x^4 - y^3x^2 + y^2 = 0$, $\quad y^2 = \frac{x^2(x-a)}{x+a}$,

$y^4 = y^2 - x^2$, $\quad x^3y^2 - xy + 1 = 0$, $\quad y^2 = \frac{x}{x+1}$, $\quad y^2 = \frac{x+1}{x}$, $\quad x^2y^4 + xy^2 - 1 = 0$,

$x^3y^6 - x^2 - y = 0$, $\quad 5x^2y^2 + y^4 - 2x = 0$, $\quad y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$, $\quad x^4y + x^2 + y^2 = 0$, $\quad y^4 = x^2 - y^2$,

$4x^4y^4 - x^6 + 8y^2 = 0$, $\quad (x^2 - y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$, $\quad x^2y^3 + xy - 1 = 0$, $\quad x^3y^2 + x^2 - y^4 = 0$, $\quad x^4 - y^4 + 2x^2y = 0$,

$(2x+y)^4(x-y) + x^2(2x+y) + 2y = 0$, $\quad (x^2+y^2)^2 = x^2(ax+by)$, $\quad x^4y + x^4 + y^2 = 0$, $\quad x^4 + y^4 - y^2 + 2x - 1 = 0$, $\quad y = 2x + \sqrt{\frac{(x+1)^3}{x-2}}$,

$x^2y^3 - 3x^2y^2 + 4 = 0$, $\quad x^2y^3 - y^4 + y^2 + x^2 = 0$, $\quad 3x^4y^2 + 2x + y = 0$, $\quad x^4 + y^4 - 3xy^2 + 2x - 1 = 0$, $\quad x^7 + x^5y^4 - 6y = 0$,

$(x^4 - 5x^2 + 4)y^2 - 4xy + x^2 = 0$, $\quad 4x^3y^2 - 3xy^3 + 1 = 0$, $\quad (x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$, $\quad (2x - y^2)(x+y) + x - y = 0$,

$\sin x = 2\sin y$, $\quad y = e^{ax^2+px+q}$, $\quad y = e^{\frac{x^2}{2x+1}}$, $\quad y = Lax^2 + px + q$, $\quad y = e^{\sqrt{x^2+1}}$,

$y = e^{ax^2+px+q}$, $\quad y = (\sin x)^{\cos x}$, $\quad y = \operatorname{tg} x^{\operatorname{tg} x}$, $\quad y = x - \operatorname{tg} x$,

[illegible]

$$\begin{cases} x = [\text{illegible}] \\ y = [\text{illegible}] \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{[\text{illegible}]}{1 + t - [\text{illegible}]} \\ y = \dfrac{[\text{illegible}]}{1 + t - [\text{illegible}]} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1 - t}{1 + t} \\ y = \dfrac{1 + t}{1 - t^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1 - 2t^2}{1 - t} \\ y = \dfrac{[\text{illegible}]}{1 - t^2} \end{cases}$$

2414. — Construire les courbes qui ont pour équations en coordonnées polaires

[illegible]

$\rho = \dfrac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} 2\omega}$. $\rho = \dfrac{2 \sin \omega}{1 + \cos 2\omega}$. $\rho = \operatorname{tg} 2\omega$. $\rho \cos \omega + 3\rho \sin \omega + 1 = 0$. $\rho = \dfrac{\operatorname{tg} \omega}{1 + \operatorname{tg} \omega}$. $\rho = \operatorname{tg} \dfrac{\omega}{3}$. $\rho = \operatorname{tg} \dfrac{2\omega}{3}$ points doubles. $\rho = \dfrac{\sin \omega}{\omega}$. $\rho = \dfrac{\operatorname{tg} 3\omega}{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}$. $\rho \cos 2\omega - 2\rho \sin \omega + 1 = 0$. $\rho = \dfrac{\sin \omega}{\omega - 1}$. $\rho = \dfrac{\sin \omega}{\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right)}$.

[illegible]

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{1 - 2t^2}{1 + t} \\ \operatorname{tg} \omega = [\text{illegible}] \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{1 - t}{1 - 2t^2} \\ \omega = \dfrac{1 + t^2}{1 - t} \end{cases}$$

2415. — Construire les courbes déterminées par les équations

[illegible] (direction et longueurs des axes), $y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 4x + 3}$,

$y = x - 1 \pm \dfrac{[\text{illegible}]}{x - 2}$ (sommets et foyers), $y = \dfrac{x - 1}{2x - 1}$, $y^2 = x^2 - 3x + 2$ (foyer).

2416. — On donne un triangle équilatéral ABC ; par un point M du côté BC on mène MB′ parallèle à AB et MC′ [illegible] à AC ; le point B′ étant sur AC et le point C′ sur AB. On demande le lieu du point de rencontre de la perpendiculaire [illegible] par B′ au côté BC avec le cercle circonscrit au triangle AB′C′.

2417. — On donne deux points fixes B et C, [illegible] par M le milieu de BC. Lieu du point A tel [illegible] AM [illegible] AB. AC.

2418. — [illegible] d'un cercle coupant deux cercles donnés en des points diamétralement opposés.

2419. — On donne une tangente fixe et une tangente variable à un cercle. On demande le lieu du point M symétrique du point d'intersection des deux tangentes par rapport au point de contact de la tangente mobile.

2420. — [illegible] des hauteurs d'un triangle ABC dont deux sommets B et C sont fixes et dont le sommet A décrit une circonférence.

2421. — [illegible] deux cercles passant par un même point fixe, tangents à une même droite fixe [illegible].

2422. — [illegible] les coordonnées des points de rencontre des tangentes communes aux deux cercles [illegible]

2423. — On donne deux droites se coupant et un point A dans leur plan. Par le point A on mène une sécante rencontrant les deux droites en B et C [illegible] BMC semblable à un triangle donné. Lieu du point M.

2424. — On donne un cercle fixe O et un point A sur ce cercle. On considère un cercle variable O′ tangent en A au cercle O. On mène aux deux cercles une tangente commune ; lieu du point de contact de cette tangente et du cercle O′.

2425. — On donne deux axes [illegible] formant avec les axes un triangle de [illegible].

2426. — [illegible] dans le même plan ?

2427. — [illegible] $\sqrt{\dfrac{[\text{illegible}]}{x + 1}}$

2428. — Même question pour les courbes $y^2 = \frac{x^2(a-x)(a^2+x^2)}{a^4+x^4}$, $y^2 = \frac{x^2(x-a)(x^2+a^2)}{x^4+a^4}$.

2429 — On considère la courbe $x^4 - ay^2 = 0$, et une droite qui se déplace parallèlement à elle-même. Lieu du centre des moyennes distances des points de rencontre de cette droite avec la courbe.

2430. — Former l'équation d'une courbe de quatrième degré ayant une asymptote d'inflexion.

2431. — Par un point d'inflexion O d'une courbe du troisième degré on mène une sécante rencontrant la courbe en deux points A et B. Lieu du conjugué harmonique du point O par rapport aux points A et B.

2432. — Mener à la courbe $x^2y^3 = a^5$ des tangentes par le point (α, β). Discuter.

2433. — Enveloppe de la courbe $x\cos\varphi + (x^2 - y^2)\sin\varphi = y + 1$.

2434. — On donne la courbe $\rho = f(\omega)$ et le point M (r, α) situé sur cette courbe. On demande l'équation du cercle passant par le pôle, par le point M et tangent (ou orthogonal) à la courbe au point M.

2435 — Intersection de la courbe $x^2 - ay^2 = 0$ et de la droite $ax + by + c = 0$. Discuter.

2436. — Mener par le point (r, α) des tangentes à la courbe $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega}$. Discuter.

2437. — Points d'inflexion de la courbe $x^4 + y^4 = a^4$. Démontrer que les 45 points d'inflexion se réduisent à 15 comptant chacun pour 3.

2438. — Normales menées par le point (a, b) à la conique $y^2 = 2px + qx^2$.

2439. — Lieu des centres des cercles tangents à une hyperbole équilatère et à une de ses asymptotes.

2440. — On donne une courbe quelconque $f(x, y) = 0$ et deux points A et B. On prend un point quelconque C sur la courbe, et on demande le lieu du centre de gravité et de l'orthocentre du triangle ABC.

2441. — Etudier la courbe $\rho\omega^2 = a$. Chercher la tangente en l'un des points où la courbe coupe l'axe des y.

2442. — Etant donnés deux segments AB et CD, trouver le lieu des points M d'où l'on voit les deux segments sous le même angle.

2443. — Enveloppe de la droite $x\cos\varphi + y\sin\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2$.

2444. — Construire une conique connaissant trois points et leurs polaires.

2445. — Construire une conique connaissant le centre, un point et sa polaire et un point de la courbe.

2446. — Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à une ellipse de grandeur constante dont le centre est fixe.

2447. — Lieu des foyers des paraboles dont l'axe a une direction fixe et qui sont tangentes à un cercle et à une droite.

2448. — Lieu des points de concours des tangentes communes à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et au cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$ quand R varie.

2449. — Lieu des milieux des cordes d'une conique qui passent par un point fixe. N'est-ce pas un cas particulier d'un problème plus général ?

2450. — Enveloppe des cordes d'une hyperbole équilatère vues d'un point donné sous un angle droit.

2451 — Etant donnée une hyperbole équilatère de foyers F, F′ et de centre O, on prend un point M sur la courbe et on demande de calculer le rapport $\frac{MF \cdot MF'}{\overline{MO}^2}$.

2452. — Soit AB une corde de longueur donnée dans une ellipse. On prend le pôle de cette corde et on le projette sur AB. Lieu de cette projection.

2453. — On donne une ellipse ; par un foyer on mène trois rayons vecteurs faisant entre eux des angles de $\frac{2\pi}{3}$. Démontrer que la somme des inverses de ces trois rayons vecteurs est constante. Généraliser.

2454. — On donne un cercle et un rayon horizontal OD. On prend sur le cercle les points A et B tels que $\widehat{DOA} = \theta$, $\widehat{AOB} = \theta$. Par le point B on mène une verticale, par le point A une horizontale. Lieu du point M intersection de ces deux droites, quand θ varie. Ce lieu est une parabole. La construire. Déterminer son foyer.

2455. — On considère une parabole et une tangente à cette courbe ; on prend la courbe symétrique de cette parabole par rapport à la tangente. Lieu du point d'intersection de l'axe de la parabole symétrique avec sa directrice lorsque la tangente varie.

2456. — Lieu des centres des sécantes communes à une ellipse et à un cercle de rayon constant dont le centre se déplace sur l'ellipse.

2457. — Lieu des foyers des paraboles de grandeur constante dont l'axe a une direction fixe et qui passent par un point.

2458. — On donne le foyer F d'une parabole et un point A de cette courbe. Enveloppes de la directrice et de la tangente au sommet.

2459. — Lieu du centre d'une ellipse dont deux sommets du grand axe décrivent des droites fixes, et dont les deux directrices passent par des points fixes.

2460. — Lieu des points de rencontre des normales à une ellipse aux extrémités de deux diamètres conjugués.

2461. — Equation générale des hyperboles équilatères passant par trois points.

2462. — Lieu des sommets des paraboles ayant un foyer donné et passant par un point fixe.

2463. — On considère les points obtenus en portant sur le petit axe d'une ellipse, des deux côtés du centre, une longueur égale à la demi-distance focale. Démontrer que la somme des carrés des distances de ces points à une tangente quelconque est constante.

2464. — Equation générale des coniques passant par trois points. Equations des tangentes en ces trois points.

2465. — Construire une ellipse connaissant le triangle formé par la normale en un point de l'ellipse, le grand axe et la perpendiculaire abaissée du même point sur le grand axe, et sachant que le demi grand axe est égal à a.

2466. — On donne deux droites et un point O dans un même plan. Par le point O, on mène une sécante rencontrant les droites en A et B. Enveloppe de la perpendiculaire élevée au milieu de AB.

2467. — Equation générale des coniques telles que les axes Ox et Oy soient respectivement les polaires de deux points A et B sur Oy et Ox. Prévoir le nombre des paramètres.

2468. — On donne une ellipse rapportée à ses axes; en un point on mène la normale, et on demande de trouver le rapport des aires des segments déterminés dans l'ellipse par cette normale.

2469. — Enveloppe des courbes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, a et b étant liés par la relation $ab = k^2$.

2470. — Les sommets d'une ellipse décrivent quatre cercles concentriques. Trouver les lieux des centres, des foyers, des extrémités des diamètres conjugués égaux.

2471. — Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites.

2472. — Foyers de la conique $y^2 = 2px + qx^2$.

2473. — Lieu des sommets des paraboles normales en un point donné à une droite donnée et dont l'axe a une direction fixe.

2474. — Etant donnée une ellipse rapportée à ses axes, on demande l'équation générale des paraboles tangentes en un point de l'ellipse et dont l'axe est parallèle à Oy. Lieu des sommets et lieu des foyers en supposant le point de contact variable et le paramètre constant.

2475. — Lieu des centres des ellipses de grandeur constante qui sont tangentes à deux droites.

2476. — On donne deux coniques; déterminer les points de concours des tangentes communes. Appliquer à une conique et à un cercle tangents.

2477. — Déterminer la directrice de la courbe

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 2y = 0.$$

2478. — On considère les droites joignant le centre d'une ellipse aux pieds des normales menées d'un point à l'ellipse. Discuter la réalité de ces droites.

2479. — On donne une parabole de foyer F. Sur la tangente au point M, on prend un point P tel que $MP = MF$. On demande le lieu du point P.

2480. — Lieu des points de concours des tangentes communes à une ellipse et à un cercle de centre fixe et de rayon variable.

2481. — On considère un cercle de rayon constant tangent à une ellipse. Lieu du point de rencontre de la tangente avec la sécante commune.

2482. — Lieu des sommets des hyperboles admettant Oy pour asymptote et tangentes à Ox en un point A (les axes de coordonnées sont rectangulaires).

2483. — On donne une conique rapportée à des axes quelconques et un point A sur la conique; par ce point, on mène une parallèle à Ox qui coupe la conique en un second point B. Trouver la distance des points A et B.

2484. — Lieu des foyers des coniques circonscrites à un quadrilatère.

2485. — On donne une ellipse et un point P. Par le point P on mène un sécante variable rencontrant l'ellipse aux points A et B. On prend sur la sécante un point M tel que $PM^2 = PA.PB$. Lieu du point M.

2486. — Lieu des centres des hyperboles équilatères tangentes à une ellipse, passant par le centre de l'ellipse, et dont les directions asymptotiques sont parallèles aux axes de l'ellipse donnée.

2487. — On donne une ellipse de centre O. Une tangente variable rencontre les axes de l'ellipse en A et B; on considère le [illegible] sommet I du rectangle OAB. Enveloppe de la polaire du point I par rapport à l'ellipse.

2488. — Construire une conique connaissant quatre tangentes et un point d'où l'on voit la conique sous un angle droit.

2489. — On donne une parabole; en un point M de la courbe on mène la normale et on prend la symétrique de cette droite par rapport à la perpendiculaire à l'axe menée par le point M. Enveloppe de la droite ainsi obtenue.

2490. — Aire d'un segment de parabole limité par une corde.

2491. — Par un point d'une ellipse on mène les trois normales, et on demande le lieu du centre du cercle passant par les pieds de ces normales.

2492. — [illegible] des sommets et enveloppe des directrices des paraboles de grandeur constante tangentes à [illegible]

2493. — [illegible] conique et un point P. Par ce point on mène une perpendiculaire sur un diamètre Δ de la conique et on prend l'intersection de cette perpendiculaire avec le diamètre Δ' conjugué de Δ. Lieu du point d'intersection. [illegible] géométriquement que ce lieu est l'hyperbole d'Apollonius.

2494. — On donne une conique rapportée à deux axes quelconques, et on demande le lieu des sommets des angles [illegible] du cercle obtenu sont linéaires par rapport aux coefficients de l'équation tangentielle de la conique. [illegible] propriété des cercles orthoptiques des coniques d'un faisceau tangentiel.

2495. — On donne une ellipse à laquelle on mène deux tangentes parallèles ; on demande le lieu des centres des cercles tangents à l'ellipse et aux deux tangentes quand la direction de ces tangentes varie.

2496. — Une conique variable rencontre une conique fixe en deux points fixes A et B, et est tangente en ces points à deux droites données. Démontrer que la seconde corde commune passe par un point fixe.

2497. — On considère un triangle OAB, rectangle en O, et les coniques circonscrites au triangle et qui touchent le cercle circonscrit au point O. Lieu du point de concours des normales en A et B.

2498. — Etant donnée l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, déterminer ses directrices sans calculer les coordonnées de ses foyers.

2499. — Les deux courbes $y^2-2x=0$, $2xy+4y^2+6x-2y+1=0$ ont trois points communs à distance finie. Trouver l'équation du cercle passant par ces points.

2500. — Lieu des points d'où l'on peut mener deux normales rectangulaires à une parabole.

2501. — Lieu du centre d'une ellipse de grandeur constante passant par un point fixe et tangente à une droite fixe.

2502. — Lieu des centres des cercles tangents à une ellipse et à deux diamètres conjugués variables de l'ellipse.

2503. — Lieu des sommets des paraboles tangentes à un cercle et à une droite et ayant leurs axes parallèles à une direction donnée.

2504. — Lieu des foyers des hyperboles équilatères passant par trois points.

2505. — Lieu du point de rencontre des normales à une hyperbole aux extrémités d'une corde qui se déplace parallèlement à elle-même.

2506. — Lieu des points d'où l'on peut mener à une conique deux normales rectangulaires.

2507. — Écrire que la droite $ax+ry+r=0$ est l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse définie par l'équation générale $f(x,y)=0$.

2508. — Etant données deux coniques, par l'un des points communs A on mène une sécante rencontrant les coniques en B et C. Lieu du milieu de BC.

2509. — On donne la parabole $y^2-2px=0$ rapportée à son axe et à sa tangente au sommet. Une deuxième parabole est tangente à Ox à l'origine, sa directrice touche la première parabole. On mène par le foyer de la deuxième parabole une parallèle à sa directrice. Lieu de la projection de l'origine sur cette droite.

2510. — Lieu des centres des ellipses d'aire constante tangentes à trois droites.

2511. — Lieu des centres des cercles touchant une ellipse et son grand axe.

2512. — Une parabole de grandeur constante tourne autour de son foyer ; on lui mène une tangente parallèle à une direction fixe. Lieu du point de contact. (Traiter la question en coordonnées polaires.)

2513. — Lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux cercles bitangents à une parabole.

2514. — On donne deux tangentes à une conique et un foyer ; propriétés des cercles de Monge de toutes les coniques ainsi obtenues. On donne en outre un point d'où l'on voit la conique sous un angle droit ; construire la conique. Déterminer en particulier le second foyer. Nombre de solutions.

2515. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les tangentes à une parabole. Construire le lieu.

2516. — On considère deux coniques passant par l'origine; trouver l'équation du cercle passant par les trois autres points d'intersection des coniques.

2517 — Lieu des foyers des coniques

$$y^2-(ax+b)^2+\lambda x^2=0,$$

où λ est un paramètre variable.

2518. — Trouver l'équation générale des coniques passant par un point P (α, β) et par les pieds des normales issues du point P à la parabole $y^2-2px=0$.

2519. — Construire deux diamètres conjugués d'une ellipse faisant un angle donné.

2520. — Soient OA et OB les deux diamètres conjugués égaux d'une ellipse. D'un point M de la courbe, on abaisse MP et MQ perpendiculaires sur OA et OB, et on achève le parallélogramme construit sur MP et MQ. Démontrer que la diagonale passant par le point M est normale à l'ellipse en ce point.

V. — Géométrie analytique à trois dimensions.

2521. — Lieu du milieu M d'un segment AB qui se déplace parallèlement à un plan fixe en s'appuyant sur deux droites fixes de l'espace.

2522. — On donne trois demi-droites passant par l'origine et définies par leurs cosinus directeurs. Calculer les faces et les dièdres du trièdre ainsi obtenu. En déduire la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

2523. — Etant donnés deux systèmes d'axes rectangulaires ayant même origine, existe-t-il des points ayant mêmes coordonnées par rapport aux deux systèmes ?

2524. — On donne n points $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Lieu du point M tel que $\Sigma \overline{MC_i}^2 = k$.

2255. — Perpendiculaire commune et plus courte distance des deux droites $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ et $z=0$, $ax+by+c=0$.

2526 — On donne deux cercles dans des plans parallèles, on leur mène des tangentes perpendiculaires ; lieu de la perpendiculaire commune à ces tangentes.

2527. — Lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes rencontrent une parabole.

2528. — On donne trois axes rectangulaires. Dans le plan zOx est un cercle dont le centre est sur Ox, on projette ce cercle sur un plan P passant par Oz. Lieu de la projection quand le plan P tourne autour de Oz. Section de la surface par le plan $z = \ldots$.

2529. — On considère la courbe $x = \frac{1}{t-a}$, $y = \frac{1}{t-b}$, $z = \frac{1}{t-c}$. Équation de la tangente en un point quelconque.

2530. — Étant donnée la surface $xyz = 1$, trouver la surface diamétrale conjuguée d'une direction donnée.

2531. — Démontrer que la surface $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz + y + z = 1$ est de révolution. Trouver sa méridienne.

2532. — Même question pour la surface $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$.

2533. — Mener une normale commune à deux cercles situés dans des plans différents.

2534. — On donne une ellipse dans le plan des zx, son grand axe étant sur Ox. On la fait tourner autour de Oz. Trouver l'équation de la surface engendrée. Par le point O on mène une tangente OT à cette ellipse; trouver l'équation de la section de la surface par le plan Toy.

2535. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires et un cercle passant par l'origine dans le plan xOy. Lieu d'une droite s'appuyant sur ce cercle et rencontrant l'axe des z sous un angle constant.

2536. — Étant donnée une hélice tracée sur un cylindre de révolution d'axe Oz, on fait tourner cette courbe autour d'une génératrice de ce cylindre. Surface engendrée. Courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à une direction donnée. Projection de cette courbe sur les plans de coordonnées.

2537. — On donne deux droites dans l'espace. Un mobile part du point A sur la première droite avec une vitesse uniforme v, et un autre mobile part du point A' sur la deuxième droite avec une vitesse v'. Lieu des droites joignant ces deux points à un instant quelconque.

2538. — Équation de la surface de révolution circonscrite à une surface donnée $F(x, y, z) = 0$ et ayant pour axe une droite donnée. Cas où la surface donnée est un ellipsoïde.

2539. — On donne n points dans l'espace : $O_1, O_2, \ldots, O_n$; on désigne par $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les distances d'un point M à ces n points. On suppose que le point M décrit la surface ayant pour équation $f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$. Trouver la normale à la surface au point M.

2540. — On projette la courbe $f(x, z) = 0$, $y = 0$ sur les plans passant par Oz. Lieu des projections.

2541. — Lieu engendré par un cercle variable dont le plan est parallèle à un plan fixe et qui rencontre trois droites fixes.

2542. — Trouver les sommets et les diamètres conjugués égaux de l'ellipse définie par les équations $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $ax + by + cz = 0$.

2543. — Dans le plan des xy et dans le plan des xz se trouvent deux cercles parcourus chacun par un mobile pesant de façon que les cercles soient parcourus dans le même temps d'une façon uniforme. Lieu du centre de gravité du système formé par les deux points.

2544. — Étudier les quadriques représentées par les équations

$$yz + zx + xy - 1 = 0, \qquad 4x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4zx + 4xy + 4x - 2y - 2z = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - yz + zx + xy - 1 = 0 \text{ (axes de la section droite)}, \qquad x^2 + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 - x^2 + 2x - 4y = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - 1 = 0, \qquad 2x^2 + y^2 - 2z^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 2x - 4 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - 1 = 0 \text{ (plans principaux et longueurs d'axes)},$$

$$(x + y + z)^2 + (x + y + z - c)^2 - (ax + mz + n)^2 = p^2, \qquad yz + zx + xy + x + y + z = 0,$$

$$P = Q = RS = 0 \text{ (P, Q, R, S sections linéaires)}, \qquad PQ - RS = 0, \qquad x^2 - z^2 - 2mxy - 1 = 0 \text{ (sections circulaires)},$$

$$P = Q - RS = 0, \qquad 2x^2 - y^2 - z^2 - 4xy + 2x - y = 0.$$

$$(az - bxuz - dy)^2 - z^2 = 0 \text{ (condition pour qu'elle soit de révolution)}.$$

2545. — On donne un point d'un paraboloïde et deux génératrices de même système. La surface est-elle déterminée ? Quel est le lieu des axes ? On donne un deuxième point : construire l'axe et le sommet.

2546. — Équation générale des quadriques contenant Ox et Oy et admettant comme plans asymptotes les plans xOz et yOz. Quadriques centrales. Équation générale du troisième degré.

2547. — Une quadrique est-elle déterminée quand on donne trois plans tangents et leurs points de contact ? Condition pour que le problème soit possible.

2548. — Équation d'un paraboloïde à une nappe rapporté à trois plans diamétraux conjugués dont l'un de plan xOy soit plan cyclique. On considère un point A de ce cercle, et on demande les équations des génératrices de la surface passant par le point A, en fonction de l'angle que fait Ox avec OA.

2549. — Nature et axes de la parabole donnée par les équations $y^2 - 2px = 0$, $ax + by + az = 0$.

2550. — On donne dans une quadrique un axe, un sommet situé sur cet axe et un autre sommet. Combien cela fait-il de conditions ? Équation générale de ces surfaces.

2551. — Construire une quadrique dont on donne une conique, deux génératrices de systèmes différents et un point.

2552. — Lieu des centres des hyperboloïdes de révolution passant par deux droites.

2553. — On assujettit un ellipsoïde à avoir pour l'un de ses diamètres conjugués égaux, en grandeur et en position, un segment de droite donné. A combien de conditions assujettit-on la surface ? Parmi les diamètres conjugués égaux d'un ellipsoïde quelconque, y a-t-il toujours deux perpendiculaires ?

2554. — Étudier la surface $x^2 - 2myz = 0$. Quelle doit être la valeur de m pour que la surface soit de révolution ? Trouver son axe dans ce cas. On coupe par le plan $y + z = 1$. Quel est le lieu du parallélogramme ?

2555. — On donne dans une quadrique un axe en grandeur et en position et la longueur des deux autres axes. Combien cela fait-il de conditions?

2556. — Condition pour que la droite $\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$ soit tangente à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$.

2557. — Lieu des sommets des paraboloïdes de révolution circonscrits à un ellipsoïde.

2558. — On assujettit une quadrique à avoir à un cône de directions asymptotiques donné et une conique dont les directions asymptotiques sont parallèles à deux génératrices du cône. On achève de déterminer la quadrique par un plan tangent. Construire le point de contact.

2559. — Déterminer une quadrique connaissant le cône des directions asymptotiques et quatre points.

2560. — Déterminer une quadrique connaissant une conique de la surface, le centre et un plan tangent. Trouver en particulier le point de contact du plan tangent.

2561. — On donne trois axes de coordonnées obliques et on demande l'équation générale des paraboloïdes admettant Ox pour génératrice et Oz comme diamètre. *A priori*, combien l'équation renfermera-t-elle de paramètres ?

2562. — Lieu des projections d'un point sur les plans tangents à un paraboloïde hyperbolique. Montrer que la surface obtenue contient des cercles. Section par le plan d'un cercle.

2563. — Comment se coupent deux paraboloïdes ayant un plan directeur commun et une génératrice commune ?

2564. — On donne dans une quadrique une section plane et un axe ; la quadrique est-elle déterminée ?

2565. — Déterminer une quadrique de révolution connaissant un foyer et quatre points.

2566. — Lieu des centres des quadriques passant par un cercle et par une droite qui rencontre le cercle.

2567. — Deux cercles d'une même quadrique sont-ils toujours situés sur une même sphère ?

2568. — Montrer que toute génératrice d'une quadrique est tangente à un cône circonscrit.

2569. — Peut-on inscrire une quadrique à deux cônes ? Condition de possibilité. Quand elle est remplie, combien y a-t-il de quadriques ?

2570. — On donne dans un paraboloïde, un plan directeur et une section plane. La surface est-elle déterminée ? On achève de la déterminer par deux points. Construire l'axe.

2571. — On donne trois cônes bitangents deux à deux. Par un point de l'espace on leur mène des plans tangents. Démontrer que les six plans ainsi obtenus sont tangents à un même cône du deuxième degré.

2572. — Lieu d'une droite mobile s'appuyant sur deux droites fixes et faisant avec elles des angles égaux.

2573. — On donne un plan et quatre points. Construire un cylindre hyperbolique équilatère passant par ces trois points et admettant pour plan asymptote le plan donné.

2574. — Paraboloïdes passant par un quadrilatère gauche.

2575. — On coupe la quadrique $x^2+2y^2-4x=0$ par le plan $y-z=1$; démontrer que la section est un cercle et trouver son rayon.

2576. — Equation générale des quadriques admettant pour ombilic l'origine des coordonnées.

2577. — Equation générale des quadriques passant par deux droites.

2578. — Une quadrique est assujettie à avoir pour axe un segment donné. Combien cela fait-il de conditions ? On donne trois points de la quadrique ; trouver son équation et discuter.

2579. — Construire un paraboloïde de révolution connaissant une ellipse de la surface et un point.

2580. — Construire l'axe d'une surface de révolution du second degré définie par une section plane et deux points.

2581. — Dans un paraboloïde on donne trois points, le sommet et l'axe. La surface est-elle déterminée ? Former son équation. Représente-t-elle toujours un paraboloïde ?

2582. — Lieu des droites s'appuyant sur les trois droites $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$, $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$, $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$.

2583. — Démontrer que le parallélépipède construit sur trois génératrices de même système d'un hyperboloïde à une nappe a un volume constant.

2584. — Equation générale des quadriques ayant pour axe la droite $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$.

2585. — On donne une parabole et un cercle ayant deux points communs. Etudier les quadriques passant par ces deux courbes.

2586. — On donne l'hyperboloïde $\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}-\frac{z}{c^2}-1=0$. Trouver l'angle des génératrices de section par le plan tangent au point x_0, y_0, z_0.

2587. — Lieu des points de contact des plans tangents parallèles à un plan donné menés à un ellipsoïde de grandeur constante tournant autour de son centre.

2588. — Un ellipsoïde de grandeur constante tourne autour d'un de ses axes ; d'un point extérieur on lui mène des normales. Trouver le lieu des pieds de ces normales.

2589. — Lieu des sommets des cônes équilatères circonscrits à un ellipsoïde.

2590. — Ecrire que deux quadriques sont égales.

2591. — Équation de l'ensemble des plans principaux d'une quadrique.

2592. — Équation générale des quadriques admettant pour axe un segment de Oz, le centre étant l'origine. Dire à [illegible] combien l'équation renferme de paramètres.

2593. — Lieu du centre des quadriques

$$x^2 + 2myz + pz^2 - 4mx + 2py - 1 = 0$$

Trouver les points du lieu qui correspondent aux hyperboloïdes.

2594. — On donne un plan principal et deux génératrices d'une quadrique ; celle-ci est-elle déterminée ? Discuter.

2595. — Quelle courbe représentent les équations

$$x = \frac{1}{a+t}, \quad y = \frac{1}{b+t}, \quad z = \frac{1}{c+t}.$$

Peut-on trouver des quadriques passant par cette cubique ? On coupe la cubique par des plans parallèles. Lieu du centre de gravité du triangle obtenu.

2596. — Lieu des pôles d'un plan fixe par rapport à des surfaces homofocales. Même question en supposant que le plan passe par une droite fixe.

2597. — Comment se coupent deux quadriques qui ont une génératrice commune et qui ont un point de contact en dehors ?

2598. — Lieu des sommets des paraboloïdes équilatères passant par deux droites.

2599. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les plans principaux de la quadrique

$$2ayz + 2bzx + 2cxy = 1,$$

a, b, c vérifiant la relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

2600. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires et les points A sur Ox, B sur Oy et C sur Oz. On demande l'équation de l'ellipsoïde ayant pour diamètres conjugés en grandeur et en position AO, AB et AC.

2601. — Étudier les quadriques passant par deux paraboles situées dans des plans différents, et ayant deux points communs.

2602. — De combien de paramètres dépend un système de trois diamètres conjugués d'une quadrique ? Peut-on assujettir une quadrique à avoir deux trièdres conjugués donnés ?

2603. — Lieu des sommets des ellipses sections d'un ellipsoïde par des plans passant par une droite fixe.

2604. — Lieu des sommets des hyperboloïdes équilatères passant par deux droites.

2605. — Étudier les quadriques passant par deux cercles qui ont deux points communs.

2606. — On définit une quadrique par un plan principal, une conique et un point. Construire le plan tangent au point donné. Remplacer le point par un plan tangent et construire le point de contact.

2607. — Une quadrique est-elle déterminée quand on donne le cône asymptote et un point ? Combien y a-t-il de solutions ? Plan tangent au point donné.

2608. — Équation générale des hyperboloïdes contenant deux droites et leur perpendiculaire commune. Parmi ces surfaces y en a-t-il de révolution ?

2609. — Équation d'un paraboloïde hyperbolique dont on donne l'axe, le plan de Monge et une génératrice. Construire géométriquement le sommet.

2610. — On donne l'axe, une génératrice et un point d'un paraboloïde hyperbolique ; équation de la surface. Construire le sommet.

2611. — Lorsque deux quadriques sont inscrites dans un même cône elles sont inscrites dans un autre.

2612. — On considère les hyperboloïdes passant par deux droites et tels qu'un plan P les coupe suivant une conique bitangente à une conique fixe ; de quel genre sera le lieu du pôle du plan P ?

2613. — On considère l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$; trouver le lieu des points de cette surface pour lesquels la normale rencontre un cercle tracé dans le plan de l'ellipse de gorge.

2614. — On donne un paraboloïde elliptique et une sphère. On demande l'enveloppe des sphères orthogonales à la sphère donnée et dont le centre décrit le paraboloïde.

2615. — Étudier les normales issues d'un point au paraboloïde hyperbolique $xy = az$.

2616. — On donne un sommet, l'axe et un point d'une quadrique de révolution. Est-elle déterminée ? Former son équation.

2617. — On donne une quadrique, un point A sur cette quadrique et un plan P. On mène un plan variable Q coupant la quadrique suivant une conique et on considère le cône ayant pour sommet le point A et pour base cette conique. On [illegible] le plan P suivant une conique. Étudier les propriétés de ces coniques. De combien de paramètres dépendent-elles ? [illegible] Montrer que ces coniques passent par deux points fixes.

Peut-on s'arranger de manière que toutes ces coniques soient des cercles ? Examiner le cas où le point A n'est pas sur la quadrique. Montrer que dans cette hypothèse les coniques considérées sont bitangentes à une conique fixe.

2618. — Étant donnée la quadrique $f(x, y, z) = 0$, écrire que la droite

$$[illegible] \qquad \left(\text{ou } \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}\right)$$

est 1° axe, 2° diamètre, 3° diamètre conjugué de plans de sections circulaires, 4° axe de révolution.

2619. — Étant donnée la quadrique $f(x, y, z) = 0$, écrire que le point a, b, c est 1° sommet, 2° ombilic.

2620. — Etant donnée la quadrique $f(x, y, z) = 0$, écrire que le plan $ux + vy + wz + r = 0$ est : 1° plan principal ; 2° plan de l'équateur de la surface supposée de révolution ; 3° plan cyclique.

2621. — Ecrire que l'équation générale du deuxième degré $f(x, y, z) = 0$ représente : 1° un système de deux plans rectangulaires ; 2° un cylindre de révolution.

VI. — Géométrie descriptive.

2622. — On donne un tétraèdre défini par les longueurs de ses arêtes. Trouver la plus courte distance et la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées.

2623. — Etant données les projections d'un tétraèdre, mener les plans bissecteurs d'un des dièdres.

2624. — Représenter un cube dont une diagonale est inclinée à 45° sur l'horizon.

2625. — On donne un tétraèdre reposant sur le plan horizontal. Construire la somme de tous les dièdres intérieurs de ce tétraèdre.

2626. — Distance d'un point à une droite de profil.

2627. — Construire une horizontale rencontrant deux droites fixes et faisant avec elles des angles égaux.

2628. — On donne une droite D et un point M. Par la droite D on mène un plan parallèle à la ligne de terre, et on demande l'angle de ce plan et du plan passant par la droite D et le point M.

2629. — On donne un plan défini par deux droites qui se coupent. A et B. Mener par la droite A un plan faisant un angle donné avec le plan donné.

2630. — On donne par leurs projections une droite D et deux points A et B ; trouver les plans bissecteurs du dièdre formé par les deux plans (A, D) et (B, D).

2631. — On donne par leurs projections une droite D et un point F, directrice et foyer d'une parabole. Construire les projections de cette parabole.

2632. — Plus courte distance d'une droite et d'un cylindre dont la directrice est un cercle horizontal.

2633. — Etant donné un plan défini par deux droites et la projection horizontale d'une conique située dans ce plan, trouver les contours apparents d'un cône qui a pour base cette conique. Intersection de ce cône avec le bissecteur du deuxième dièdre.

2634. — On donne la base d'un cylindre absolument quelconque, combien faut-il de points pour déterminer le cylindre ? Faire les constructions en supposant que la base est une parabole. Combien, dans ce cas, y a-t-il de solutions ? Et si la base était une courbe plane de degré m ?

2635. — On donne une conique, combien faut-il donner de points pour déterminer un cône passant par cette conique ? Le nombre nécessaire de points étant donné, construire le sommet.

2636. — On donne un cône défini par sa directrice qui est un cercle horizontal et son sommet. Trouver les contours apparents du cône supplémentaire. On donne l'une des projections d'un point de ce cône, trouver l'autre et le plan tangent au point. Intersection d'une droite et du cône supplémentaire.

2637. — On donne un cône défini par son sommet et une conique horizontale. On prend l'intersection d'une droite D et de ce cône, et on demande de mener par cette droite un plan coupant le cône suivant une conique admettant pour sommets les points de rencontre de la droite et du cône.

2638. — On donne un plan par ses traces et dans ce plan une circonférence donnée en rabattement ; section par un plan vertical d'un cône ayant pour base la circonférence.

2639. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical et d'un plan défini par la ligne de terre et un point.

2640. — On donne trois points A, B, C et on considère le cercle passant par ces trois points. On demande l'ombre au flambeau de ce cercle sur un plan horizontal.

2641. — Montrer géométriquement que dans un cône à base circulaire, la direction antiparallèle est la seule qui donne des cercles.

2642. — On donne quatre points A, B, C, S dans l'espace et on considère le cône ayant pour sommet le point S et pour base le cercle passant par les points A, B, C. Intersection de ce cône avec un plan quelconque. Déterminer la seconde direction de plans cycliques.

2643. — On donne dans un plan horizontal un cercle et une droite. Le cercle est la directrice d'un cône dont le sommet est donné. Mener par la droite un plan coupant le cône suivant une parabole. Déterminer l'axe et le sommet de cette parabole.

2644. — On donne deux droites qui se coupent ; une conique située dans leur plan est définie par sa projection verticale. On considère un cylindre ayant pour base cette conique et dont la direction des génératrices est donnée. Intersection de ce cylindre avec le plan bissecteur du deuxième dièdre.

2645. — On donne un plan par deux droites qui se coupent, et une ellipse située dans ce plan et dont la projection horizontale est un cercle donné. Trouver le grand axe de cette ellipse.

2646. — On donne dans un plan défini par deux droites qui se coupent une conique dont la projection horizontale est un cercle. Cette conique est la base d'un cône dont on donne le sommet. Trouver les directions des autres sections planes qui se projettent suivant des cercles.

2647. — Intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont respectivement dans le plan vertical et dans le plan horizontal.

2648. — Intersection d'un cône de révolution dont l'axe est vertical et d'un cône de révolution dont l'axe est horizontal.

2649. — Intersection d'un cône de révolution dont l'axe est dans le plan vertical et d'un cylindre de révolution dont l'axe est dans le plan horizontal.

2650. — Un cône a pour directrice un cercle dans un plan quelconque et un sommet donné. Le cercle est défini par son rabattement sur le plan horizontal. Ce rabattement est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont de front. Intersection des deux surfaces.

2651. — On donne la base d'un cône dans le plan horizontal, le sommet (s, s') et une génératrice ; on prend un point (a, a') sur la génératrice. Couper par un second cône tel que l'intersection ait un point double en (a, a'). Peut-on avoir un point de rebroussement en (a, a') ?

2652. — On donne un cylindre hyperbolique ayant sa base dans un plan horizontal. Trouver un cône tel que l'intersection présente deux asymptotes parallèles.

2653. — On donne dans le plan horizontal une parabole ; c'est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont de front. Un cercle bitangent à cette parabole est la directrice d'un cône dont le sommet est dans le deuxième bissecteur. Intersection des deux surfaces.

2654. — On donne un parallélogramme ABCD situé dans le plan horizontal. On demande l'intersection des cônes engendrés l'un par AD tournant autour de AC, l'autre par AC tournant autour de BC.

2655. — Intersection des deux cônes de révolution obtenus en faisant tourner un triangle rectangle horizontal successivement autour des côtés de l'angle droit.

2656. — Comment se coupent deux cônes du deuxième degré qui se raccordent le long d'une génératrice ?

2657. — Intersection de deux cônes qui ont pour directrice commune une conique dans le plan bissecteur du second dièdre.

2658. — Construire une sphère passant par un point donné et par un cercle situé dans un plan vertical.

2659. — Etant donnés deux points A et B, construire une sphère passant par ces deux points et tangente au plan horizontal du point B.

2660. — On donne un prisme vertical dont la base est un carré dans le plan horizontal. Ce prisme est limité à un autre plan horizontal. Sur cette autre base du prisme se trouve une demi-sphère dont le centre est le centre du carré supérieur. Ombres du système.

2661. — On donne une sphère, un point A sur cette sphère ; par le point A on mène une droite, et on demande de trouver le deuxième point de rencontre de cette sphère et de la droite.

2662. — On donne les projections d'une sphère et la projection verticale d'une droite. Déterminer la projection horizontale de la droite de manière que la droite soit tangente à la sphère.

2663. — Construire une sphère tangente aux plans de projection, à un plan de profil donné et passant par un point donné.

2664. — Ombre propre et ombre portée sur le plan horizontal d'un cylindre de révolution dont l'axe est horizontal.

2665. — On coupe un cylindre de révolution à axe vertical par un plan parallèle à la ligne de terre et faisant avec le plan horizontal un angle de 45°. Ombre du tronc obtenu sur le plan horizontal.

2666. — Intersection d'une droite et d'un cylindre de révolution défini par son axe et un point.

2667. — On donne dans le plan du tableau deux droites concourantes : ce sont les génératrices de contour apparent d'un cône de révolution dont l'axe est dans le plan du tableau. Mener par un point p de ce plan des plans tangents au cône.

2668. — On donne un cylindre dont la directrice est un cercle situé dans le plan horizontal, et une droite Δ rencontrant le plan horizontal au point S. Construire un cône de révolution ayant pour sommet S, pour axe Δ et tangent au cylindre.

2669. — Construire une horizontale s'appuyant sur deux droites données et faisant avec l'une d'elles un angle donné.

2670. — Plans tangents parallèles à deux cônes de révolution.

2671. — On donne deux droites, l'une horizontale, l'autre de front. Mener par l'horizontale un plan qui fasse avec la frontale un angle donné.

2672. — Section plane d'un cône de révolution défini par son sommet et une sphère inscrite. Nature de la section ; [illegible]

2673. — Construire un plan tangent commun à deux sphères faisant avec le plan horizontal un angle donné.

2674. — Mener une droite rencontrant deux droites données et faisant avec chacune d'elles un angle donné.

2675. — Construire un hyperboloïde de révolution à une nappe connaissant une section plane elliptique, un point de l'axe et une direction de génératrices.

2676. — Construire un hyperboloïde de révolution à une nappe connaissant une section plane elliptique et une géné[illegible]

2677. — Déterminer la trace sur le plan du cercle de gorge d'un cône de sommet donné circonscrit à un hyperboloïde [illegible]

2678. — On considère la surface gauche de révolution engendrée par une droite Δ tournant autour d'une droite A. On donne un point P, et on considère le plan passant par P et Δ ; c'est un plan tangent ; trouver son point de contact.

2679. — [illegible] surface gauche de révolution définie par son axe vertical et une génératrice de front.

2680. — Construire un cylindre parabolique connaissant quatre points dans un plan et deux points en dehors.

2681. — [illegible] construire le cône circonscrit de sommet O, et trouver [illegible] S, le point O [illegible] en restant sur la même verticale.

2682. — Etant donnés un ellipsoïde de révolution à axe vertical et une direction D, D', construire le plan diamétral conjugué de cette direction.

2683. — On donne un paraboloïde à plan directeur horizontal et deux génératrices du système non horizontal. On fait tourner d'autre part une génératrice définissant ce paraboloïde autour d'un axe vertical qui ne la rencontre pas. Intersection de la surface engendrée et du paraboloïde.

2684. — On donne deux plans de bout P' et Q' ayant même trace horizontale et deux circonférences dans le plan horizontal. L'une est la projection d'une courbe C_1 du plan P', l'autre est le rabattement d'une courbe C_2 du plan Q'. Les deux courbes C_1 et C_2 déterminent-elles une quadrique ?

2685. — Intersection d'un cylindre de révolution dont l'axe est dans le plan horizontal et d'une sphère ayant son centre dans le plan horizontal.

2686. — Une ellipse située dans le plan horizontal a pour centre le point *o* et pour grand axe *ab*. Cette ellipse en tournant autour de son grand axe engendre un ellipsoïde. On demande l'intersection de cet ellipsoïde avec un cône de révolution dont le sommet *s* est dans le plan horizontal, dont l'axe passe par le point *o* et dont l'une des génératrices passe par le point *a*.

2687. — Un cône de révolution a pour base une ellipse dans le plan horizontal. On donne un point de l'axe du cône. Le cône est-il déterminé ? On fait tourner l'ellipse autour de son grand axe, elle engendre un ellipsoïde dont on demande l'intersection avec le cône de révolution.

2688. — Intersection des surfaces engendrées par une droite C tournant successivement autour de deux droites A et B situées dans un même plan de front.

2689. — On donne une verticale et deux droites A et B. On considère l'hyperboloïde défini par les trois droites et la surface gauche de révolution engendrée par A tournant autour de la verticale. Intersection des deux surfaces. Tangente en un point. L'intersection a-t-elle des points doubles ?

2690. — On donne un cône ayant pour base un cercle horizontal. Trouver la plus courte distance d'un point à ce cône.

2691. — Ombre propre et ombre portée d'un paraboloïde de révolution à axe vertical.

2692. — On donne un cylindre de révolution à axe vertical reposant par sa base sur le plan horizontal et limité supérieurement par un plan horizontal. Une demi-sphère dont le centre est sur l'axe du cylindre repose sur la base supérieure du cylindre. Ombres du système.

2693. — On donne dans le plan horizontal un parallélogramme dont les couples de côtés opposés sont les génératrices de contour apparent horizontal de deux cylindres de révolution dont les axes sont dans le plan horizontal. Intersection.

2694. — Ombre d'un hémisphère creux, tangent au plan horizontal, le plan de base étant horizontal. Les projections des rayons lumineux font 45° avec la ligne de terre.

2695. — On donne les projections de quatre points A, B, C, D. Construire les sommets des cônes passant à la fois par les deux cercles ABC et ABD.

2696. — On donne un segment horizontal OA, puis un segment OB perpendiculaire à OA, et enfin un segment OC perpendiculaire au plan OAB, et on considère l'ellipsoïde ayant pour demi-axes OA, OB, OC. Trouver les plans de sections circulaires de cet ellipsoïde.

2697. — On donne un paraboloïde à plan directeur horizontal par deux génératrices A et B non horizontales. La droite A tourne autour d'un axe vertical la rencontrant. Intersection du cône et du paraboloïde. Points doubles de l'intersection.

2698. — Déterminer un paraboloïde de révolution connaissant une section plane et un point.

2699. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical ; on demande son intersection avec un cylindre de révolution ayant une génératrice commune avec l'hyperboloïde. Les axes des deux surfaces se rencontrent.

2700. — Intersection de deux paraboloïdes hyperboliques ayant pour plan directeur commun le plan bissecteur du second dièdre et définis chacun par deux droites non parallèles au plan directeur.

2701. — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices non horizontales ; on demande de lui mener un plan tangent parallèle au second bissecteur.

2702. — Etudier la surface de révolution engendrée par une conique située dans un plan de bout et tournant autour d'une verticale. Degré de la surface. Peut-il s'abaisser ? Points doubles de la méridienne. Y a-t-il des plans coupant cette surface suivant une quartique unicursale ?

2703. — On donne un cercle horizontal et deux droites, dont l'une verticale, rencontrant le cercle. Existe-t-il une quadrique contenant le cercle et les deux droites ? Section plane par un plan de bout. Centre de la surface.

2704. — On donne deux cercles dans un plan horizontal et une verticale passant par un de leurs points d'intersection. Deux hyperboloïdes passent chacun par l'un des cercles et admettent la verticale donnée pour génératrice commune. Sont-ils déterminés ? On achève de les déterminer en donnant dans chacun d'eux une génératrice de même système que la verticale. Trouver leur intersection.

2705. — On donne trois droites dont l'une est verticale qui définissent un hyperboloïde à une nappe. On considère une quatrième droite rencontrant l'une des droites non verticales ; on demande le deuxième point de rencontre avec l'hyperboloïde.

2706. — On donne dans le plan horizontal une ellipse de foyer F et un point S. L'ellipse tournant autour de son grand axe engendre un ellipsoïde ; on demande l'intersection de cet ellipsoïde avec le cône de révolution qui a pour axe SF et pour génératrice l'une des tangentes menées du point S à l'ellipse.

2707. — Ombres du système formé par un cône de révolution à axe vertical et une sphère passant par le sommet du cône de façon que le diamètre vertical de la sphère soit le prolongement de l'axe du cône.

2708. — Ombres de la mèche.

2709. — Étant donné un paraboloïde hyperbolique engendré par une horizontale assujettie à rencontrer deux droites fixes, trouver le lieu horizontal d'un cône circonscrit de sommet donné.

2710. — Une quadrique est définie par deux cercles horizontaux et un point. Section de cette quadrique par le plan horizontal passant.

2711. — On donne dans le plan horizontal un rectangle ABCD ; on fait tourner la diagonale BD autour de CD et AB autour de BD. Intersection des deux cônes obtenus.

2712. — On donne dans un plan horizontal une ellipse et une droite Δ passant par un foyer. On fait tourner l'ellipse autour de son grand axe et le grand axe autour de la droite Δ ; intersection des deux surfaces obtenues.

2713. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un cône parallèle au cône asymptote.

2714. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et de la surface engendrée par une droite s'appuyant sur deux génératrices de même système de l'hyperboloïde et sur son axe.

2715. — Intersection de deux cônes de révolution ayant même angle au sommet et leurs axes verticaux situés dans un même plan de front.

2716. — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par deux droites et admettant comme plan directeur le bissecteur du premier dièdre ; section par le deuxième bissecteur. Asymptotes.

2717. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical et deux génératrices A, B de même système. Soit D une droite quelconque, trouver l'intersection de l'hyperboloïde donné avec l'hyperboloïde défini par les trois droites A, B, D.

2718. — Un hyperboloïde est défini par un cercle horizontal et deux génératrices dont une est verticale. Déterminer le centre de la surface et l'intersection de la surface avec un plan de bout.

2719. — Déterminer le sommet d'un paraboloïde ayant comme plan directeur le plan bissecteur du deuxième dièdre et défini par deux génératrices.

2720. — On donne un paraboloïde hyperbolique, par deux génératrices et un plan directeur horizontal, et un cône ayant pour sommet un point de la génératrice de bout de ce paraboloïde, pour génératrice une génératrice de ce paraboloïde et pour base un cercle dans le plan horizontal. Intersection des deux surfaces.

2721. — On donne une parabole dans le plan horizontal et un point (s, s') sommet d'un cône ayant la parabole pour directrice. Ce cône est le cône asymptote d'une quadrique dont on donne en outre un point (a, a') sur la verticale du point (s, s'). Construire le plan tangent au point (a, a').

2722. — On donne un point A, un plan P coupant une sphère S suivant un cercle C. On demande la trace horizontale du cône ayant pour sommet A et pour directrice C.

2723. — On donne deux droites D et Δ. Intersection des deux surfaces engendrées, la première par D tournant autour de Δ, la deuxième par Δ tournant autour de D.

VII. — Statique.

2724. — On donne deux cercles de centre O et de rayon R dans les plans des zx et des xy, et on considère deux poids appliqués en α et β et décrivant ces deux cercles, de sorte que $AO\alpha = BO\beta = t$ (A sur Ox, B sur Oy). Trouver le lieu du centre de gravité des deux points α et β. Cas où les deux poids sont égaux.

2725. — Effectuer la réduction des forces représentées par les côtés d'un polygone gauche fermé.

2726. — La somme des moments des forces d'un couple par rapport à une droite est égale à la projection de l'axe du couple sur la droite.

2727. — Si l'on réduit un système à deux forces de deux manières différentes, les quatre droites sont génératrices d'un même hyperboloïde.

2728. — Combien faut-il de conditions pour écrire qu'un système de n points soit un système invariable ? En déduire le nombre des conditions d'équilibre d'un corps solide.

2729. — Condition d'équilibre d'un point matériel pesant placé sur un plan incliné et attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance.

2730. — Un point M est sollicité par des forces proportionnelles aux distances aux trois côtés d'un triangle et dirigées suivant des perpendiculaires à ces côtés. Équilibre de ce point.

2731. — Trois points sont placés sur un cercle et se repoussent deux à deux proportionnellement à la distance qui les sépare. Y a-t-il une position d'équilibre ?

2732. — Lieu des droites de longueur donnée tangentes à une sphère et ayant même moment par rapport à une droite.

2733. — Peut-on remplacer un système de forces appliquées à un corps solide par deux forces rectangulaires dont la plus courte distance ait une longueur donnée ?

2734. — On considère un câble non tendu, fixé à ses deux extrémités A et B. Un corps M y est suspendu au moyen d'une poulie. Position d'équilibre.

2735. — Lieu des droites de l'espace passant par un point fixe et du moment nul par rapport à un système de forces.

2736. — Centre de gravité d'un segment de parabole limité par une corde perpendiculaire à l'axe.

2737. — Étant donné un système de forces, montrer qu'il est possible de le réduire à deux forces égales entre elles perpendiculaires l'une à l'autre, et cela d'une infinité de manières.

2738. — Étant donné un système de forces appliquées à un solide, peut-on le réduire à deux dont l'une agisse suivant [illegible]

2739. — On donne un triangle ; au milieu de chaque côté, on applique dans le plan du triangle une force perpendiculaire à ce côté, proportionnelle à sa longueur et dirigée vers l'extérieur du triangle. Montrer que ces forces se font équilibre. Le théorème est-il vrai pour un polygone plan quelconque ?

2740. — On donne un cercle dans un plan vertical et deux points pesants assujettis à se déplacer sur le cercle. Ces deux points se repoussent proportionnellement à la distance. Trouver la position d'équilibre du système.

2741. — Lieu des segments de longueur 1 qui ont même moment par rapport à trois droites.

2742. — Un système invariable formé de deux points est attiré par deux centres fixes proportionnellement à la distance. Trouver la position d'équilibre.

2743. — Un corps pesant 150 kilogs repose sur un plan incliné faisant un angle de 30° avec le plan horizontal. On exerce sur ce corps une traction dont la direction fait un angle de 45° avec la ligne de plus grande pente du plan. Calculer l'intensité que doit avoir cette traction pour que le corps soit en équilibre. Calculer la réaction du plan.

2744. — Sur une poulie dont on néglige le poids passe une chaîne dont la longueur est 2 mètres et qui pèse 5 kil. par mètre. On suspend aux extrémités de cette chaîne d'un côté un poids de 5 kil., de l'autre un poids de 10 kil. ; trouver la position d'équilibre.

2745. — Une barre pesante OA est fixée en O ; au point A est attachée une corde passant par un point fixe B et sur laquelle on exerce une traction T. En supposant OB horizontal, trouver la position d'équilibre. Comment varie la force T quand l'angle AOB varie?

2746. — Une barre pesante OA, de poids p et de longueur l, a une extrémité fixe O. Au point B ($OB = d$) situé dans le plan horizontal du point O se trouve une poulie au fil de laquelle s'attachent d'un côté l'extrémité A, et de l'autre un poids P. Position d'équilibre de la barre.

2747. — Position d'équilibre d'une barre pesante dont les extrémités sont attirées par un point fixe O par des forces proportionnelles à la distance.

2748. — Un câble fixé en un point A passe sur une poulie B infiniment petite et supporte un poids P. Le long du câble, entre A et B, se déplace une poulie C portant un poids Q. Equilibre du système

2749. — Equilibre de deux sphères pesantes tangentes entre elles et tangentes chacune à un plan.

2750. — Une échelle AB de poids P est appuyée sur un mur vertical AC et sur le sol BC. Un homme de poids π repose en D sur l'échelle. Quelle force horizontale faut-il appliquer en B (point où l'échelle repose sur le sol) pour qu'il y ait équilibre?

QUESTIONS PROPOSÉES

1067. — On considère l'hyperboloïde à une nappe

$$x^2 + 2y^2 - 8z^2 - 1 = 0$$

et son cône asymptote.

1° Trouver l'équation générale des sphères (S) passant par l'origine et par l'une des sections circulaires de ce cône. Trouver ensuite le lieu des centres de ces sphères et le lieu des pôles des plans tangents au cône asymptote par rapport à l'une d'elles. Expliquer géométriquement les résultats obtenus.

2° Trouver l'équation générale des sphères (Σ) orthogonales à toutes les sphères (S). On considère le système de cercles déterminés sur le plan des xy par celles de ces sphères qui ont leurs centres sur l'hyperboloïde. Former l'équation générale de ces cercles en fonction rationnelle d'un paramètre et trouver le lieu des points de rencontre de deux des cercles de ce système qui se coupent à angle droit.

E. H.

1068. — Une droite Δ est rencontrée par une série d'hyperboles et par leurs asymptotes en quatre points fixes. Montrer que les points de contact des tangentes parallèles à Δ et les pôles de Δ sont sur des cercles fixes, et que les hyperboles sont tangentes à deux cercles fixes sur des droites passant par un point fixe.

VASSIER.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1000. — *Trouver toutes les équations du troisième degré telles que si l'on désigne par α et β les racines de la dérivée par rapport à x, la dérivée par rapport à la variable d'homogénéité prenne, pour $x = \alpha$ et $x = \beta$, les valeurs 3β et 3α.*

Trouver la relation qui existe entre les racines de l'une de ces équations et voir ce qu'elle devient quand l'équation envisagée a une racine double.

Représentons par

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

l'équation du troisième degré ; nous aurons

$$\frac{1}{3} f_x = ax^2 + 2bx + c, \qquad \frac{1}{3} f_y = bx^2 + 2cx + d.$$

Les nombres désignés par α et β sont les racines de l'équation $ax^2 + 2bx + c = 0$, et les relations imposées sont

$$b\alpha^2 + 2c\alpha + d = \beta,$$
$$b\beta^2 + 2c\beta + d = \alpha;$$

elles déterminent deux des coefficients, c et d par exemple, en fonction des deux autres. Pour les obtenir facilement nous formerons deux équations symétriques en α et β. La première s'obtient en retranchant les deux relations données et divisant la relation ainsi obtenue. Par $\alpha - \beta$; ce calcul nous donne $b(\alpha + \beta) + 2c + 1 = 0$, puis, $c = -\frac{1}{2} + \frac{b^2}{a}$. La seconde s'obtient en multipliant par β, α et retranchant, puis divisant le résultat par $\alpha - \beta$; ce calcul fournit la relation $b\alpha\beta - d + \alpha + \beta = 0$,

ensuite

$$d = \frac{bc}{a} - \frac{2b}{a},$$

ou

$$d = \frac{b^3}{a^2} - \frac{5b}{2a}.$$

Cela posé, divisons l'équation étudiée par a, remplaçons-y les coefficients $\frac{b}{a}$ et $\frac{1}{a}$ par λ et μ et $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$ par les valeurs calculées précédemment exprimées en fonction de λ et μ ; nous aurons l'équation générale cherchée

(1) $$x^3 + 3\lambda x^2 + 3\left(\lambda^2 - \frac{\mu}{2}\right)x + \lambda^3 - \frac{5}{2}\lambda\mu = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme très simple

$$2(x + \lambda)^3 + \mu(3x + 5\lambda) = 0.$$

Appelons α, β, γ les trois racines de cette équation et σ_1, σ_2, σ_3 la somme de ces nombres, celle de leurs produits deux à deux et le produit des trois, nous obtiendrons les trois relations

$$3\lambda = -\sigma_1, \qquad 3\lambda^2 - \frac{3\mu}{2} = \sigma_2, \qquad \lambda^3 - \frac{5\lambda\mu}{2} = -\sigma_3;$$

elles nous donnent successivement

$$\lambda = -\frac{\sigma_1}{3}, \qquad \mu = \frac{2\sigma_1^2}{9} - \frac{2\sigma_2}{3},$$

puis,

$$-\frac{\sigma_1^3}{27} + \frac{5\sigma_1}{3}\left(\frac{\sigma_1^2}{9} - \frac{\sigma_2}{3}\right) + \sigma_3 = 0,$$

ou

(2) $$4\sigma_1^3 - 15\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3 = 0.$$

Telle est la relation demandée.

Si nous supposons que deux de ces trois racines soient égales, $\alpha' = \beta' = u$ et $\gamma = v$, nous aurons $\sigma_1 = 2u + v$, $\sigma_2 = 2uv + u^2$, $\sigma_3 = u^2 v$; la relation (2) devient alors

$$4(2u + v)^3 - 15(2u + v)(2uv + u^2) + 27u^2 v = 0,$$

ou, toutes réductions faites,

(3) $$u^3 - 3uv^2 + 2v^3 = 0.$$

Elle se décompose en $(u - v)^2 = 0$ et $u + 2v = 0$; la première est à rejeter car nous ne supposons pas que l'équation proposée ait une racine triple ; la seconde est la relation demandée.

Dans ce cas particulier, la somme des racines est $-3v$, nous avons donc $v = \lambda$, puis $\mu = 2\lambda^2$;

il en découle que la dérivée admet une racine nulle, ce qui était d'ailleurs évident *a priori* d'après les relations imposées à α et β.

Bonnes solutions : MM. G. Fauvernier ; J. Marchal.
Solution satisfaisante : M. F. Pégorier.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1014. — *On considère l'ellipse et l'hyperbole ayant même centre et pour équations respectives*

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$
$$b^4x^2 - a^4y^2 + a^2b^2(a^2 - b^2) = 0.$$

Soit PQ *la corde polaire d'un point* M *de l'hyperbole dans l'ellipse.*

1° *Montrer que les bissectrices de l'angle* POQ *ont des directions fixes.*

2° *Trouver le lieu du pied de la symédiane issue de* O *dans le triangle* OPQ.

1. Soient x_0, y_0 les coordonnées du point M ; nous avons la relation

(1) $$b^4x_0^2 - a^4y_0^2 + a^2b^2(a^2 - b^2) = 0.$$

La droite PQ a pour équation $b^2xx_0 + a^2yy_0 - a^2b^2 = 0$, par suite l'équation de l'ensemble des droites OP, OQ est

$$a^2b^2(b^2x^2 + a^2y^2) - (b^2xx_0 + a^2yy_0)^2 = 0,$$

ou

$$b^4x^2(a^2 - x_0^2) - 2a^2b^2x_0y_0xy - a^4y^2(b^2 - y_0^2) = 0.$$

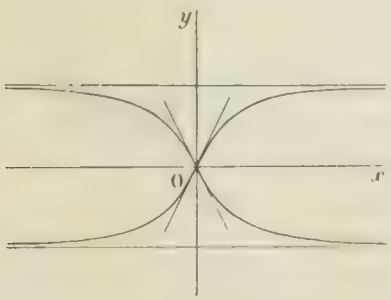
Les bissectrices de l'angle POQ ont alors pour équation

$$-a^2b^2x_0y_0(y^2 - x^2) + b^4(a^2 - x^2) - a^4(b^2 - y_0^2)xy = 0.$$

Or le coefficient de xy est nul, d'après la relation (1) ; l'équation de l'ensemble des bissectrices se réduit donc à $x^2 - y^2 = 0$. Ces bissectrices ont des directions fixes.

2. La droite OM passe par le milieu de PQ ; elle coïncide avec la médiane du triangle POQ. On voit ainsi que cette médiane a pour équation $\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0}$. Dès lors, comme les bissectrices de l'angle POQ sont les bissectrices des axes de coordonnées, la symédiane a pour équation $\frac{y}{x} = \frac{x_0}{y_0}$, et le pied de cette droite est défini par les équations

(2) $$xx_0 - yy_0 = 0, \qquad b^2xx_0 + a^2yy_0 - a^2b^2 = 0.$$



Nous aurons l'équation du lieu en éliminant x_0, y_0 entre ces deux équations et la relation (1).

Les équations (2) nous donnent

$$x_0 = \frac{a^2b^2}{(a^2 + b^2)x}, \qquad y_0 = \frac{a^2b^2}{(a^2 + b^2)y},$$

et en portant ces valeurs dans la relation (1) nous trouvons

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^2x^2y^2 + a^2b^2(b^4y^2 - a^4x^2) = 0.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré symétrique par rapport aux deux axes, admettant un point double à l'origine et deux asymptotes parallèles à Ox.

On la construira aisément en résolvant l'équation par rapport à y^2.

G. FAUVERNIER.

Bonnes solutions par MM. R. Bouvaist ; G. de France, à Versailles, et Soris, à Condom.

1015. — *On donne une circonférence et deux points A, B sur cette courbe. On considère toutes les hyperboles équilatères passant par A et B, et tangentes au cercle. Lieu des centres de ces hyperboles. Lieu des pôles de AB par rapport à ces hyperboles.*

Prenons pour axe des x la droite AB et pour axe des y une perpendiculaire à AB passant par son milieu O. Le cercle a son centre sur Oy, et son équation est de la forme $x^2 + (y - a)^2 - R^2 = 0$. Une tangente quelconque à ce cercle a pour équation $x \cos\varphi + (y - a) \sin\varphi - R = 0$; par suite l'équation générale des coniques passant par A et B et tangentes au cercle est

$$\lambda(x^2 + (y - a)^2 - R^2) + 2y(x\cos\varphi + (y - a)\sin\varphi - R) = 0.$$

Pour que cette équation représente une hyperbole équilatère, il faut qu'on ait $\lambda = -\sin\varphi$. Remplaçons λ par cette valeur, simplifions; l'équation devient

$$f(x, y) = -\sin\varphi(x^2 - y^2) + 2xy\cos\varphi - 2Ry - \sin\varphi(a^2 - R^2) = 0.$$

Le centre est déterminé par les deux équations

$$\frac{1}{2}f'_x = -x\sin\varphi + y\cos\varphi = 0, \qquad \frac{1}{2}f'_y = y\sin\varphi + x\cos\varphi - R = 0.$$

L'élimination de φ entre ces deux équations est fort simple : il suffit de les écrire $-x\sin\varphi + y\cos\varphi = 0$, $y\sin\varphi + x\cos\varphi = R$, de les élever au carré et de les ajouter membre à membre. On obtient pour équation du lieu $x^2 + y^2 = R^2$: cette équation représente un cercle égal au cercle donné et ayant pour centre le milieu de AB.

Le pôle de AB est défini par les deux équations

$$\frac{1}{2}f'_x = -x\sin\varphi + y\cos\varphi = 0, \qquad \frac{1}{2}f'_y = -Ry - \sin\varphi(a^2 - R^2) = 0.$$

De la première, on tire $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, et par suite $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Portons cette valeur dans la seconde, divisons par y, puis élevons au carré : nous trouvons comme équation du lieu $x^2 + y^2 = \frac{(a^2 - R^2)^2}{R^2}$: cette équation représente un cercle ayant encore pour centre le milieu de AB.

G. FAUVERNIER.

Solutions analogues par MM. E.-N. Barisien; G. de Fresne, à Versailles; Barbaroux et Poirayher, lycée d'Alger.

Solution géométrique. — Soit ω le centre du cercle : considérons une hyperbole passant par A et B et touchant le cercle au point C; ωO est perpendiculaire à AB et est perpendiculaire à la tangente commune GH. Désignons par I et I' les points de rencontre de AB et des asymptotes, et par H et G les points de rencontre de la tangente en C avec les mêmes droites. AB et GH font avec les axes de l'hyperbole les mêmes angles en sens contraire, donc $\widehat{CGI} = \widehat{OEI}$. Or d'après une propriété connue de l'hyperbole équilatère les triangles IOE et ICG sont isocèles; donc

$$\widehat{OIE} = \widehat{OEI} = \widehat{CIG} = \widehat{IGC}.$$

Prolongeons CI jusqu'en P; nous avons $\widehat{CIG} = \widehat{PIH}$; donc $\widehat{PIH} = \widehat{HIA}$, par suite PI est perpendiculaire à AB et parallèle à ωO. On voit de même que IO est parallèle à $C\omega$. Donc la figure $IO\omega C$ est un parallélogramme, et $IO = C\omega = R$, R désignant le rayon du cercle.

Le lieu du point I est donc un cercle égal au cercle donné et ayant pour centre le point O.

Le pôle M de AB est sur la droite IO et l'on a

$$IK^2 = IM.IO.$$

Or IK = IC, puisque les diamètres IO et IC font des angles égaux avec les axes, donc $\overline{IC}^2 = IM.IO$. Mais IC et IO ont des longueurs constantes, par suite IM est constant, il en est de même de OM, et on voit que le lieu du point M est un cercle ayant pour centre le point O.

P. TRIBIER.

Solution géométrique exacte mais incomplète par M. R. Bouvaist.

TRIGONOMÉTRIE

986. — *On considère un triangle* ABC *et un point* D *pris sur* BC.

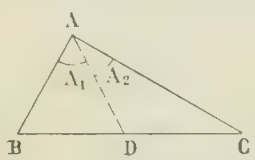
1° *Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que les rayons des cercles circonscrits aux triangles* ABD, ACD *soient respectivement proportionnels aux segments* BD et DC ;

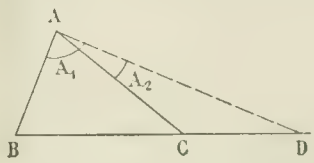
2° *Cette condition étant remplie, chercher celle qui doit être satisfaite pour que l'on puisse construire un triangle avec les données* $AD = \alpha$, $BC = a$ *et l'angle* A.

3° *Construire graphiquement le triangle* ABC, *sachant que* $a = 9^{cm}$, $\alpha = 6^{cm}$ et $A = 64°$.

(*École centrale, concours de 1900, 2e session.*)

1° La figure peut présenter deux cas suivant que le point D est situé sur la base BC du triangle ou sur son prolongement. L'énoncé semble indiquer que le point D est pris sur la base entre B et C. Rien n'empêche de généraliser la question.





Désignons par A_1 l'angle BAD, par A_2 l'angle DAC ; on a, dans tous les cas,

$$\frac{BD}{\sin A_1} = \frac{DA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin D} = 2R_1,$$

$$\frac{DC}{\sin A_2} = \frac{DA}{\sin C} = \frac{AC}{\sin D} = 2R_2,$$

d'où on déduit

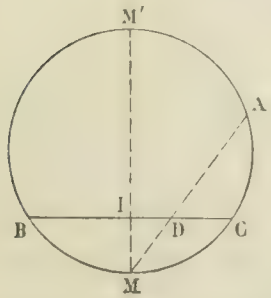
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{AB}{AC}.$$

Or, par hypothèse, on doit avoir $\frac{R_1}{R_2} = \frac{BD}{DC}$. Le point D doit donc être pris de façon que l'on ait

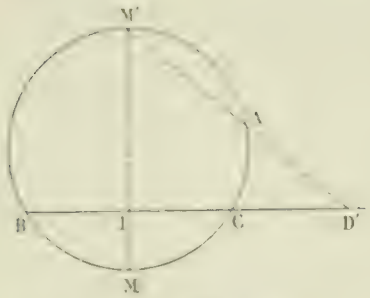
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC},$$

autrement dit le point D doit être le pied sur la base BC de l'une des deux bissectrices de l'angle A.

2° D étant le pied de la bissectrice intérieure, cherchons à construire un triangle connaissant $BC = a$, l'angle A et la longueur de la bissectrice $AD = \alpha$. Ayant décrit sur BC comme corde le segment capable de l'angle A, il reste à mener par le milieu M de l'arc BMC une sécante MDA, de façon que $DA = \alpha$. Le problème sera possible pourvu que α soit inférieure à $IM' = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$, et il admettra deux solutions symétriques par rapport au diamètre MM', ce qui donne deux triangles égaux, par suite une seule solution du problème.



Plaçons-nous maintenant dans le second cas de figure. D' étant le pied de la bissectrice extérieure, il faudra mener par le point M' une sécante M'AD' de façon que $AD' = \alpha'$. Le problème sera toujours possible car lorsque A décrit l'arc BM'C, α' prend toutes les valeurs de 0 à $+\infty$.



Nous allons retrouver ces résultats en nous proposant de résoudre (l'énoncé dit simplement *construire*) le triangle ABC dans les conditions indiquées.

Soient donnés $AD = x$, $BC = a$ et l'angle A. Dans les relations du début, nous ferons $A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$; d'où il vient

$$\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{x}{\sin B}, \qquad \frac{DC}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{x}{\sin C},$$

et en ajoutant $(BD + DC = a)$,

$$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}} = x\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right),$$

d'où l'équation

$$\frac{a}{x\sin\frac{A}{2}} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B \sin C};$$

or on connait la somme $B + C = 180^\circ - A$, d'où $\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$; tout revient à calculer $\frac{B-C}{2}$. On a

$$\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2},$$

$$2\sin B\sin C = \cos(B-C) - \cos(B+C) = 2\cos^2\frac{B-C}{2} - 2\cos^2\frac{B+C}{2},$$

d'où

$$\sin B\sin C = \cos^2\frac{B-C}{2} - \sin^2\frac{A}{2}.$$

Portant dans l'équation précédente et l'ordonnant, il vient

$$\cos^2\frac{B-C}{2} - 2\frac{x}{a}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - \sin^2\frac{A}{2} = 0.$$

Cette équation a toujours ses deux racines réelles et de signes contraires; la racine positive seule peut convenir; il faut pour cela qu'elle soit inférieure à 1 et que de plus elle fournisse pour B et C des valeurs comprises entre 0 et 180°. Or si l'on substitue 0 et 1 dans le premier membre, on obtient

$$f(0) = -\sin^2\frac{A}{2} < 0,$$

$$f(1) = \cos^2\frac{A}{2} - 2\frac{x}{a}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

$f(1)$ doit être positif ou nul, ce qui exige que l'on ait $x \leq \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$. Cette condition remplie, soit φ l'angle fourni par les tables; on en déduit en supposant $B < C$, $\frac{B-C}{2} = -\varphi$, et en combinant avec $\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$,

$$B = 90^\circ - \frac{A}{2} - \varphi, \qquad C = 90^\circ - \frac{A}{2} + \varphi.$$

Pour que ces valeurs soient positives et moindres que 180°, il suffira que l'on ait

$$\varphi < 90^\circ - \frac{A}{2},$$

ou $\cos\varphi > \cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$, ou encore $\cos\varphi > \sin\frac{A}{2}$;

autrement dit $f\left(\sin\frac{A}{2}\right)$ doit être négatif. C'est ce qui aura toujours lieu, comme on le vérifie facilement. La seule condition est donc $\alpha \leqslant \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$, condition trouvée plus haut.

Soient maintenant $AD' = \alpha$, $BC = a$ et l'angle A les données. En nous reportant aux formules du début et faisant $A_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$, $A_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$, il vient

$$\frac{BD'}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\alpha}{\sin B}, \qquad \frac{CD'}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\alpha}{\sin C},$$

et en remarquant que $a = BD' - CD'$ (dans l'hypothèse $B < C$),

$$\frac{a}{\cos\frac{A}{2}} = \alpha\left(\frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}\right);$$

d'où l'équation

$$\frac{a}{\alpha\cos\frac{A}{2}} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C} = \frac{\sin C - \sin B}{\sin B \sin C},$$

ou toutes réductions faites,

$$\sin^2\frac{C-B}{2} + 2\frac{\alpha}{a}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2} - \cos^2\frac{A}{2} = 0.$$

Cette équation a toujours ses deux racines réelles et de signes contraires ; la racine positive est plus petite que 1 $[f(1) > 0]$. Soit φ l'angle fourni par les tables ; on aura encore

$$\frac{B-C}{2} = -\varphi,$$

d'où $B = 90^\circ - \frac{A}{2} - \varphi$, $C = 90^\circ - \frac{A}{2} + \varphi$,

valeurs acceptables pourvu que l'on ait

$$\varphi < 90^\circ - \frac{A}{2},$$

c'est-à-dire $\sin\varphi < \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$,

qui peut s'écrire $\sin\varphi < \cos\frac{A}{2}$.

Cette condition est toujours remplie $\left[f\left(\cos\frac{A}{2}\right) > 0\right]$. Le problème proposé est possible quel que soit α'.

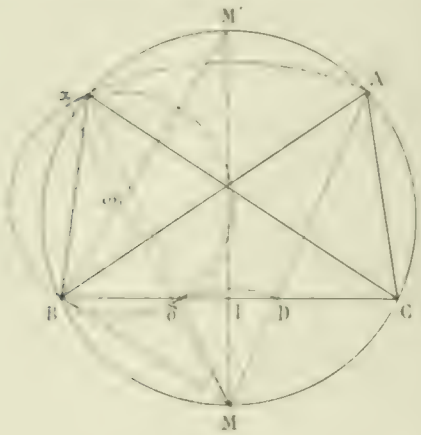
3° Pour construire graphiquement le triangle ABC, nous remarquerons que l'on a, dans le premier cas de figure,

$$MD.MA = MI.MM = \overline{MB}^2,$$

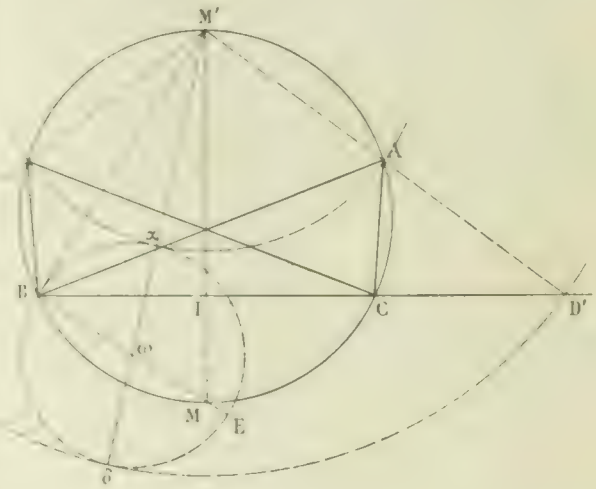
et

$$MA - MD = AD = \alpha;$$

on est ramené à construire deux longueurs connaissant leur différence et leur produit.



1er cas.



2e cas.

Dans le second cas, on a de même

$$M'D'.M'A = M'I.M'M = \overline{M'B}^2,$$

$$M'D - M'A = AD' = \alpha;$$

on est ramené au même problème.

Les figures ci-dessus donnent les constructions à effectuer dans les deux cas.

[illegible] M. P. Thomas.
[illegible] par M. T. Lemoine, à [illegible].

QUESTIONS PROPOSÉES

1069 — La tangente en un point M d'une parabole rencontre la directrice en T. Construire les deux courbes qu'on obtient en cherchant le lieu du symétrique de T par rapport à M et le lieu du symétrique de M par rapport à T.

E.-N. Barisien.

1070 — Étant donnés trois points E, F, I, de I comme centre avec un rayon variable on décrit un cercle; puis on trace une conique ayant E et F comme foyers et tangente à ce cercle.

Lieu du point de contact.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

[illegible]

12e Année. N° 2. Novembre 1901.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

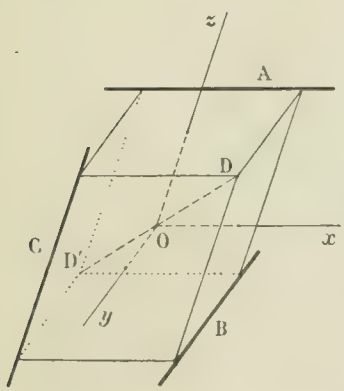
PREMIÈRE PARTIE

PROPRIÉTÉS DU PARALLÉLÉPIPÈDE CONSTRUIT SUR TROIS GÉNÉRATRICES DE MÊME SYSTÈME D'UN HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE

On sait que ce parallélépipède a un volume constant, mais il possède aussi deux autres propriétés qu'il est aisé d'obtenir par un procédé fort simple, souvent employé dans le cours de mathématiques spéciales, notamment dans la démonstration des théorèmes d'Apollonius relatifs aux quadriques.

Soit

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}-1=0 \tag{1}$$



l'équation d'un hyperboloïde à une nappe rapporté à ses axes. Considérons trois génératrices de même système de cette surface, A, B et C; construisons sur ces droites le parallélépipède de Binet qui, comme on le sait, a pour centre le centre O de l'hyperboloïde, et prenons comme nouveaux axes de coordonnées des droites passant par le point O et parallèles aux droites A, B, C. L'axe Ox est choisi parallèle à A, et son sens positif est tel que l'abscisse de B soit positive, l'axe Oy parallèle à B et son sens positif est tel que l'ordonnée de C soit positive; enfin l'axe Oz parallèle à C a un sens positif tel que la cote de A soit positive. Si on désigne alors par 2α, 2β, 2γ les longueurs des arêtes du parallélépipède, respectivement parallèles à A, B, C, les équations de ces trois droites sont

$$A\begin{cases} y+\beta=0,\\ z-\gamma=0,\end{cases}\qquad B\begin{cases} z+\gamma=0,\\ x-\alpha=0,\end{cases}\qquad C\begin{cases} x+\alpha=0,\\ y-\beta=0,\end{cases}$$

et l'équation de l'hyperboloïde est, par rapport aux nouveaux axes,

$$\frac{yz}{\beta\gamma}+\frac{zx}{\gamma\alpha}-\frac{xy}{\alpha\beta}+1=0. \tag{2}$$

Pour passer de l'équation (1) à l'équation (2), on doit faire une transformation de coordonnées sans changer d'origine; X, Y, Z sont alors des fonctions linéaires et *homogènes* de x, y, z, par suite, le terme constant de l'équation (1) ne change pas, et $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}$ se transforme en $-\frac{yz}{\beta\gamma}-\frac{zx}{\gamma\alpha}-\frac{xy}{\alpha\beta}$. Comme d'autre part $X^2+Y^2+Z^2$ se change en $x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu$ ($\lambda=\widehat{yOz}$, $\mu=\widehat{zOx}$, $\nu=\widehat{xOy}$), on en conclut que les deux formes quadratiques

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}-S(X^2+Y^2+Z^2),$$

$$-\frac{yz}{\beta\gamma}-\frac{zx}{\gamma\alpha}-\frac{xy}{\alpha\beta}-S(x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu)$$

se déduisent l'une de l'autre par une substitution linéaire et homogène, et cela quelle que soit la valeur de S.

Il en résulte que les équations obtenues en égalant à zéro les discriminants de ces formes sont des équations en S ayant mêmes racines.

Ces équations peuvent s'écrire

$$\left(\frac{1}{a^2} - S\right)\left(\frac{1}{b^2} - S\right)\left(-\frac{1}{c^2} - S\right) = 0,$$

$$-S - S\left(S\cos\nu + \frac{1}{2\gamma\beta}\right)^2 - S\left(S\cos\mu + \frac{1}{2\gamma\alpha}\right)^2 + S\left(S\cos\lambda + \frac{1}{2\alpha\beta}\right)^2$$
$$- 2\left(S\cos\lambda - \frac{1}{2\beta\gamma}\right)\left(S\cos\mu + \frac{1}{2\gamma\alpha}\right)\left(S\cos\nu + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs et en ordonnant,

$$a^2b^2c^2S - S^2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - S(a^2 + b^2 - c^2) - 1 = 0,$$

$$4\alpha^2\beta^2\gamma^2\Omega S^3 - 4\alpha^2\beta^2 S^2(\alpha\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu) + \beta(\cos\mu - \cos\nu\cos\lambda) + \gamma(\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu)$$
$$- S(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos\lambda - 2\gamma\alpha\cos\mu - 2\alpha\beta\cos\nu) - 1 = 0,$$

où Ω désigne comme d'habitude le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Écrivons que ces équations ont mêmes racines ; nous obtenons les relations

I $$4\alpha^2\beta^2\gamma^2\Omega = a^2b^2c^2,$$

II $$4\beta\gamma(\alpha\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu) + \beta(\cos\mu - \cos\nu\cos\lambda) + \gamma(\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu) = b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2,$$

III $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos\lambda - 2\gamma\alpha\cos\mu - 2\alpha\beta\cos\nu = a^2 + b^2 - c^2.$$

Considérons la première ; on peut la mettre sous la forme

$$8\alpha\beta\gamma\sqrt{\Omega} = 4abc.$$

Or le premier membre est égal au volume du parallélépipède construit sur les trois droites A, B, C. On voit donc que ce volume est constant et égal à la moitié du volume du parallélépipède construit sur les axes ou sur trois diamètres conjugués quelconques.

Interprétons maintenant la relation (II). Désignons par ξ, η, ζ les dièdres du trièdre $Oxyz$ qui ont respectivement pour arêtes Ox, Oy, Oz ; en vertu de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, on a

$$\cos\nu = \cos\mu\cos\lambda + \sin\mu\sin\lambda\cos\xi,$$
$$\cos\mu = \cos\nu\cos\lambda + \sin\nu\sin\lambda\cos\eta,$$
$$\cos\lambda = \cos\nu\cos\mu + \sin\nu\sin\mu\cos\zeta.$$

D'autre part, les angles ξ, η, ζ sont visiblement les suppléments des dièdres du parallélépipède dont les arêtes sont les droites A, B, C. En désignant ces dièdres par A, B, C, nous avons

$$\cos\xi = -\cos A, \qquad \cos\eta = -\cos B, \qquad \cos\zeta = -\cos C$$

et la relation (II) peut alors s'écrire

$$4\beta\gamma\sin\mu\sin\nu\cos A + \beta\sin\nu\sin\lambda\cos B + \gamma\sin\lambda\sin\mu\cos C = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Nous avons ainsi mis en évidence les aires des faces du parallélépipède, qui sont $4\beta\gamma\sin\mu$, $4\gamma\alpha\sin\nu$, $4\alpha\beta\sin\lambda$, désignées les par α_1, α_2, α_3 ; la relation devient

$$\alpha_1\alpha_2\cos A + \alpha_2\alpha_3\cos B + \alpha_3\alpha_1\cos C = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Si l'on remarque que les faces passant par la droite A ont précisément comme aires σ_2 et σ_3, ..., on peut énoncer la propriété suivante :

La somme des trois produits obtenus en multipliant les aires des faces passant par chaque génératrice par le cosinus de leur angle est constante et égale à $4(a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)$.

Considérons enfin la relation (III), que nous pouvons écrire

$$8(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos\lambda + 2\gamma\alpha\cos\mu - 2\alpha\beta\cos\nu) = 4(a^2 + b^2 - c^2).$$

Le parallélépipède a une diagonale DD′ qui ne rencontre pas les droites A, B, C ; les coordonnées du point D sont α, β, γ, celles du point D′, $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, par conséquent

$$\overline{DD'}^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos\lambda + 2\gamma\alpha\cos\mu + 2\alpha\beta\cos\nu).$$

D'autre part les longueurs des arêtes situées sur les droites A, B, C sont respectivement égales à 2α, 2β, 2γ. Désignons par S_2 la somme des carrés de ces longueurs. La relation précédente devient alors

$$2S_2 - \overline{DD'}^2 = 4(a^2 + b^2 - c^2) ;$$

d'où l'on conclut que *la différence entre deux fois la somme des carrés des longueurs des arêtes situées sur les génératrices et le carré de la diagonale qui ne rencontre pas ces génératrices est constante et égale à* $4(a^2 + b^2 - c^2)$.

G. P.

SUR LES TRIANGLES CONJUGUÉS A UNE CONIQUE

par M. **V. Jamet**, professeur au lycée de Marseille.

Voici une démonstration analytique très simple d'une proposition qu'on rencontre comme conséquence, dans la théorie des invariants simultanés de deux coniques.

Pour que, dans un cercle C, *on puisse inscrire un triangle conjugué à une conique* S, *il est nécessaire et suffisant que* C *coupe à angle droit le cercle orthoptique de* S.

Traitons d'abord le cas où le centre de S est à distance finie ; nous examinerons ensuite le cas où S est une parabole. Prenons pour axes de coordonnées deux diamètres conjugués de S, dont l'un, Ox, passe par le sommet A d'un triangle conjugué à cette conique, et soit $OA = \alpha$. L'équation d'un cercle passant par le point A est de la forme

$$(1) \qquad (x - \alpha)^2 + 2(x - \alpha)y\cos\theta + y^2 + 2\beta(x - \alpha) + 2\alpha y = 0 ;$$

mais si l'équation de S est

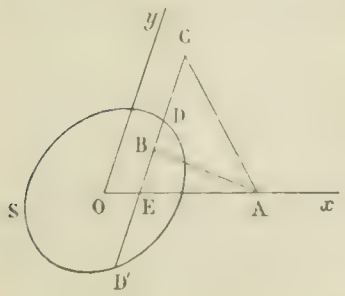
$$(S) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

et si le cercle (1) est circonscrit à un triangle conjugué à S, ayant son sommet en A, ce cercle coupe la droite représentée par l'équation

$$(2) \qquad \frac{\alpha x}{a^2} - 1 = 0$$

(polaire du point A), en deux points, B, C, dont les ordonnées ont pour moyenne proportionnelle l'ordonnée β du point D, intersection de BC, avec la conique S. Mais cette ordonnée vérifie l'équation $\frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0$, où l'on suppose $\alpha' = OE = \frac{a^2}{\alpha}$. On en conclut que

$$\beta^2 = \frac{b^2\alpha^2 - a^2}{\alpha^2}.$$



D'ailleurs, si, dans l'équation (1), on fait $x = \frac{a^2}{\alpha}$, on trouve une équation du second degré en y, dont les racines ont un produit égal à

$$\left(\frac{a^2}{\alpha} - \alpha\right)^2 = 2\lambda\left(\frac{a^2}{\alpha} - \alpha\right),$$

ou bien à

$$\frac{(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \alpha^2 + 2\lambda\alpha)}{\alpha^2}.$$

De là la condition

$$\frac{(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \alpha^2 - 2\lambda\alpha)}{\alpha^2} = \beta^2 = \frac{b^2(\alpha^2 - a^2)}{\alpha^2},$$

d'où l'on conclut

$$a^2 - \alpha^2 + 2\lambda\alpha = -b^2,$$

ou bien

$$\alpha^2 - 2\lambda\alpha = a^2 - b^2. \tag{3}$$

Mais le premier membre de cette équation est égal à la puissance du point O par rapport au cercle (1). Le second membre est égal, en vertu de l'un des théorèmes d'Apollonius, au carré du rayon du cercle de Monge : donc le cercle circonscrit au triangle ABC coupe le cercle de Monge à angle droit.

Réciproquement, si un cercle passant par le point $(\alpha, 0)$ coupe le cercle orthoptique de la conique S à angle droit, on peut le représenter par une équation de la forme (1), à condition qu'il y ait, entre α et λ, la relation (3). Mais, si cette dernière équation est vraie, ce cercle coupera la polaire du point A $(\alpha, 0)$, en deux points, B, C, conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de la corde D, D', interceptée par la conique sur la polaire du point A, et le triangle ABC sera conjugué à la conique S.

Il est bien entendu que le calcul précédent ne comporte aucune hypothèse spéciale sur la réalité ou la non réalité des points D, D', ni sur les signes des constantes a^2, b^2. Le théorème est donc établi pour toute conique à centre, et pour toutes les positions possibles du point A, dans le plan d'une telle conique.

Si la conique S est une parabole, on la rapportera au diamètre passant par le point A pris pour axe des x, et l'on prendra pour axe des y la tangente à la parabole au point où elle est coupée par l'ordonnée du point A. Désignant encore par α l'abscisse de ce point, on verra que tout cercle passant par A est réprésenté par une équation de la forme (1) ; et si l'équation de la parabole est

$$y^2 - 2px = 0,$$

on verra que la condition nécessaire et suffisante pour que ce cercle soit circonscrit à un triangle conjugué à la parabole et ayant un sommet en A, consiste en ce que la droite dont l'équation est

$$x + \alpha = 0,$$

(polaire du point A), coupe ce cercle en deux points dont les ordonnées aient pour produit $-2p\alpha$.

Mais ces ordonnées sont les racines de l'équation

$$y^2 - 2(2\alpha \cos\theta - p)y + 4\alpha^2 - 4\lambda\alpha = 0.$$

De là la condition

$$4\alpha^2 - 4\lambda\alpha = -2p\alpha,$$

équivalente à

$$2\lambda = 2\alpha + p.$$

L'équation (1) est alors de la forme

$$(x - \alpha)^2 + 2(x - \alpha)y\cos\theta + y^2 - (2\alpha + p)x - \alpha(\alpha + 2p)y = 0 ;$$

et les coordonnées ξ, η du centre du cercle représenté par cette dernière équation remplissent la condition

$$-2\xi + \eta\cos\theta = p.$$

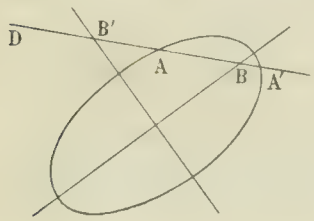
Or, si dans cette dernière équation, ξ, η désignent des coordonnées courantes, elle représente la directrice de la parabole, comme il est facile de s'en assurer, par exemple, en cherchant le lieu des sommets des angles droits circonscrits à cette courbe.

Donc, pour qu'un point inscrit dans un cercle donné un triangle conjugué à une parabole donnée, il faut et il suffit que le centre de ce cercle soit sur la directrice de la parabole.

GÉOMÉTRIE

999. — *Trouver le lieu des sommets des coniques d'un faisceau ponctuel.*

Ce problème n'est susceptible que d'une solution générale ; il ne faut pas compter aborder les détails, ni étudier avec quelque précision la forme du lieu.



Cherchons d'abord combien il y a de points du lieu sur une droite quelconque D ; pour cela appelons A, A' les points de rencontre de la droite D avec une conique du faisceau et B, B' ses points de rencontre avec les axes de cette même conique ; pour qu'un point du lieu soit situé sur D, il faut qu'un point A coïncide avec un point B. Voyons la correspondance qui existe entre eux : si nous nous donnons A, la conique est bien déterminée, il y a deux points B ; si nous nous donnons B, il y a trois coniques dont l'axe passe en B, car l'enveloppe des axes des coniques d'un faisceau ponctuel est une courbe de troisième classe ; il y a donc six points A qui correspondent au point B et la correspondance est (6, 2). Le lieu cherché est du huitième ordre.

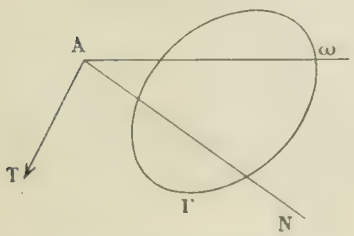
Plus généralement, si on considère un faisceau de coniques assujetties à quatre conditions quelconques et si l'on désigne par α le nombre des coniques qui passent en un point, par β la classe de l'enveloppe des axes, le degré du lieu des sommets est $2(\alpha + \beta)$. En particulier le lieu des sommets des coniques d'un faisceau tangentiel linéaire est du 10e degré.

Cela posé, considérons le quadrangle ABCD formé par les points de base du faisceau, et le triangle diagonal EFG. Puisque trois axes passent en chacun des points A, B, C, D, ces points sont des points triples du lieu.

D'autre part la conique qui passe en E, par exemple, est une conique impropre, et les quatre sommets de cette conique sont confondus en E sur les bissectrices de l'angle formé par les deux droites qui constituent cette conique impropre ; chacun des trois points E, F, G est donc un point double à tangentes rectangulaires.

Les points à l'infini sont faciles à apercevoir : il y a d'abord les sommets à l'infini des deux paraboles du faisceau ; pour chacune d'elles la droite de l'infini est un axe et il y a trois sommets confondus avec le point où elle touche la parabole ; cela fait déjà six points de rencontre avec la droite de l'infini ; il y a en outre les points cycliques, car si on considère une conique passant en un de ces points, ses deux axes sont confondus avec la tangente à la conique en ce point.

On peut démontrer directement que chacun des points A, B, C, D est triple et reprendre autrement les raisonnements généraux du début. Considérons, à cet effet, la conique des neuf points, lieu des centres des coniques du faisceau, la conique Γ_1 et menons la tangente en A, AT, la normale AN et le diamètre Aω relatifs à une conique du faisceau ; la droite Aω sera un axe si elle coïncide avec AN ; tout revient donc à étudier la correspondance qui existe entre AN et Aω. Or si on se donne AN, on se donne AT et, par suite, la conique du faisceau ; donc Aω est bien déterminé. Si, au contraire, on se donne Aω, on obtient deux centres ω et ω', par suite deux coniques et deux rayons AN. La correspondance est donc (2, 1) et il y a trois rayons doubles, c'est-à-dire trois axes passant en A. Le point A est donc un point triple du lieu et les tangentes en ce point sont les perpendiculaires aux axes qui y passent.



Il en résulte alors que chaque conique du faisceau rencontre le lieu en seize points, douze qui sont

confondus avec les points de base et quatre qui sont aux sommets de la conique : par conséquent le lieu est du huitième degré.

Il y a des cas de décomposition évidents.

Supposons d'abord que dans ce faisceau il y ait un couple de droites parallèles : tous les points de ces deux droites sont des sommets et le vrai lieu s'abaisse au sixième degré. Si les coniques sont circonscrites à un parallélogramme, le lieu s'abaisse au quatrième degré : il a pour centre le centre du parallélogramme, et ce point est au surplus un point double avec tangentes rectangulaires.

Dans le cas où le faisceau contient un cercle, tous les points du cercle sont des sommets, le vrai lieu s'abaisse au sixième degré. Mais il y a mieux : dans ce cas les axes ont des directions fixes, ce sont donc les polaires de deux points fixes à l'infini, et le lieu se décompose encore en deux cubiques qui correspondent à ces deux points.

Il nous reste à montrer comment l'équation du lieu peut se trouver dans le cas le plus général. A cet effet, nous désignerons par $f + \lambda g = 0$ l'équation générale de la conique du faisceau, par u_1, u_2, u_3 les dérivées partielles de f et par v_1, v_2, v_3 celles de g. L'équation quadratique des axes étant en général

$$B'(\overline{f'}^2 - \overline{f_2}^2) + (A - A')f'f_2 = 0,$$

sera dans le cas actuel

$$(B' + \lambda B)(u_1 + \lambda v_1)^2 - (u_2 + \lambda v_2)^2 + (A - A' + \lambda(A - A_1))(u_1 + \lambda v_1)(u_2 + \lambda v_2) = 0;$$

il n'y a plus qu'à remplacer λ par $-\dfrac{f}{g}$ pour avoir l'équation du lieu.

Nous trouvons ainsi

$$(B'g + B)f(u_1 g - v_1 f)^2 - (u_2 g + v_2 f)^2 + (A - A'g - (A' - A_1)f)(u_1 g - v_1 f)(u_2 g - v_2 f) = 0;$$

sous cette forme il est visible que le lieu est du huitième degré et que les points de rencontre de f et g sont des points triples.

On peut simplifier un peu les calculs en prenant pour axes les asymptotes de l'hyperbole équilatère du faisceau et pour coniques f et g cette hyperbole et l'ellipse dont les axes sont parallèles aux asymptotes de cette ligne.

Dans les cas particuliers que nous avons signalés, on réduira aussi les calculs en choisissant convenablement les axes et les coniques de base du faisceau.

H. MICHEL, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

991 — *Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un tétraèdre (T) circonscrit à une quadrique (Q) soit tel que les perpendiculaires abaissées des sommets de ce tétraèdre sur leurs plans polaires par rapport à (Q) soient concourantes en un point H est que les normales à (Q) aux points de contact des faces de (T) soient concourantes en un point H'. Il existe un seul tétraèdre (T) relatif à un point H', ce tétraèdre est inscrit dans une quadrique (Q') ayant les mêmes plans principaux que (Q). Quelle relation existe-t-il entre les longueurs des axes ou les paramètres des sections principales des quadriques (Q) et (Q')?*

Dans tout ce qui va suivre, on supposera que la quadrique (Q) est un paraboloïde donné.

1° *Il existe cinq tétraèdres (T) relatifs à un point H' donné. Les cinq droites joignant les points H de ces tétraèdres respectivement aux pieds des cinq normales menées de H' à (Q) sont une surface du second ordre. Quel lieu doit décrire le point H' pour cette surface soit une paraboloïde, un cône? Dans ce dernier cas, les cinq droites sont concourantes ; trouver leur point de concours.*

2° *Lorsque le point* H *est dans un certain plan* (P), *les paraboloïdes* (Q) *et* (Q_1) *sont égaux.*

Montrer que dans ce cas les normales à (Q_1) *aux sommets de* (T) *sont concourantes. Le tétraèdre* (T_1) *formé par les plans tangents à* (Q) *aux sommets de* (T) *jouit par rapport à* (Q_1) *de la même propriété que* (T) *par rapport à* (Q). *Trouver le lieu du point* H_1 *analogue à* H. *Montrer qu'on a alors une série de tétraèdres* (T), (T_1), ... (T_n) *se déduisant les uns des autres de la même façon, et jouissant de la même propriété.*

3° *Les quatre droites qui joignent les sommets du tétraèdre* (T) *aux points de contact des faces opposées sont comme on sait sur une surface du second degré. Dans quel cas cette surface est-elle un cône ? Montrer que le point de concours* I *des quatre droites est sur la cubique aux pieds des normales menées de* H *au paraboloïde* (Q), *et trouver le lieu du point* H *ainsi que celui du point* I.

Supposons d'abord que la quadrique soit à centre, et prenons le cas de l'ellipsoïde ; il suffira de changer dans les résultats trouvés un ou deux des signes placés devant a^2, b^2, c^2 pour passer aux cas des hyperboloïdes. Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

l'équation de (Q) et α, β, γ les coordonnées du point H.

On sait que la cubique (Γ) aux pieds des normales abaissées de H est le lieu des points tels que les perpendiculaires abaissées de ces points sur leurs plans polaires par rapport à (Q) passent par H. Les quatre sommets du tétraèdre sont donc sur (Γ).

Soient alors

$$x = \frac{a^2\alpha}{\lambda - a^2}, \qquad y = \frac{b^2\beta}{\lambda + b^2}, \qquad z = \frac{c^2\gamma}{\lambda + c^2}$$

les coordonnées d'un quelconque des sommets, λ étant une des racines de l'équation

$$f(\lambda) = \frac{A}{\lambda - a^2} + \frac{B}{\lambda + b^2} + \frac{C}{\lambda + c^2} + \lambda - D = 0,$$

dont nous allons chercher les coefficients.

Si l'on désigne par λ_1 la racine correspondant à un des sommets, et par $ux + vy + wz + r = 0$, l'équation du plan des trois autres sommets, on devra avoir

$$rf(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\left(\frac{a^2\alpha u}{\lambda + a^2} + \frac{b^2\beta v}{\lambda + b^2} + \frac{c^2\gamma w}{\lambda + c^2} + r\right),$$

d'où, en multipliant de part et d'autre par $\lambda + a^2$, puis faisant $\lambda = -a^2$, etc.,

$$rA = -(\lambda_1 + a^2)a^2\alpha u,$$

et deux équations analogues. On a d'ailleurs $a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 = 0$.

En portant dans cette équation les valeurs proportionnelles à u, v, w, r, on a

$$F(\lambda_1) = \frac{A^2}{a^2\alpha^2(\lambda_1 + a^2)^2} + \frac{B^2}{b^2\beta^2(\lambda_1 + b^2)^2} + \frac{C^2}{c^2\gamma^2(\lambda_1 + c^2)^2} - 1 = 0,$$

équation du sixième degré qui doit être satisfaite quand on remplace λ_1 par une quelconque des autres racines de $f(\lambda) = 0$; il en résulte que l'on a nécessairement

$$F(\lambda) = f(\lambda)\left(\frac{A}{a^2\alpha^2(\lambda + a^2)} + \frac{B}{b^2\beta^2(\lambda + b^2)} + \frac{C}{c^2\gamma^2(\lambda + c^2)}\right).$$

On a déjà trois équations d'identification faites (termes en $\frac{1}{(\lambda + a^2)^2}$, etc.) ; il en faut encore quatre. Nous les obtiendrons facilement en décomposant le second membre en éléments simples, et en égalant les fractions semblables deux à deux dans les deux membres. On trouve ainsi

$$\frac{A}{a^2\alpha^2} + \frac{B}{b^2\beta^2} + \frac{C}{c^2\gamma^2} = 1.$$

$$\frac{B}{\lambda_1 - a^2}\left(\frac{1}{a^2\alpha^2} - \frac{1}{b^2\beta^2}\right) + \frac{C}{c^2 - a^2}\left(\frac{1}{a^2\alpha^2} + \frac{1}{c^2\gamma^2}\right) + \frac{D - a^2}{a^2\alpha^2} = 0,$$

et deux autres équations qu'on obtient par permutations circulaires.

Ces équations linéaires en A, B, C, D se résolvent facilement en posant

$$\frac{b^2\beta^2 - a^2\alpha^2}{b^2 - a^2} - b^2 + a^2 = l, \qquad \frac{c^2\gamma^2 - a^2\alpha^2}{c^2 - a^2} - c^2 + a^2 = m, \qquad \frac{a^2\alpha^2 - b^2\beta^2}{a^2 - b^2} - a^2 + b^2 = n;$$

on trouve ainsi

$$A = \frac{-a^2\alpha^2 l}{l + m + n}, \qquad B = \quad , \qquad C = \quad , \qquad D = -\frac{a^2 l + b^2 m + c^2 n}{l + m + n}.$$

Il n'y a donc bien qu'un tétraèdre (T) relatif à un point $H(\alpha, \beta, \gamma)$.

Nous allons montrer que les normales à l'ellipsoïde (Q) aux points de contact des faces du tétraèdre sont concourantes en un point H'.

Les coordonnées du point de contact de la face opposée au sommet λ_1 sont

$$x = -\frac{a^2 u}{r} = \frac{A}{\alpha(\lambda_1 + a^2)}, \qquad y = \quad , \qquad z = \quad ,$$

ou

$$x = \frac{a^2\alpha'}{\lambda_1 + a^2}, \qquad y = \frac{b^2\beta'}{\lambda_1 + b^2}, \qquad z = \frac{c^2\gamma'}{\lambda_1 + c^2},$$

en posant

$$\frac{A}{a^2\alpha} = \alpha', \qquad \frac{B}{b^2\beta} = \beta', \qquad \frac{C}{c^2\gamma} = \gamma'.$$

Mais dans ces conditions, l'équation $F(\lambda) = 0$ s'écrit

$$(1) \qquad \frac{a^2\alpha'^2}{\lambda + a^2} + \frac{b^2\beta'^2}{\lambda + b^2} + \frac{c^2\gamma'^2}{\lambda + c^2} - 1 = 0,$$

équation aux λ des pieds des normales menées de H à (Q). La condition est donc nécessaire.

Réciproquement, si les normales aux points de contact des faces sont concourantes en H', on aura pour coordonnées de ces points $x = \frac{a^2\alpha'}{\lambda + a^2}$, ..., λ étant racine de (1), et en posant $\alpha' = \frac{A}{a^2\alpha}$, on retombera sur l'équation $F(\lambda) = 0$.

Le tétraèdre (T) est inscrit dans une quadrique (Q') ayant mêmes plans principaux que (Q). En effet, $F(\lambda) = 0$ exprime que les sommets de (T) sont sur la quadrique

$$\frac{A^2}{a^2\alpha^2}x^2 + \frac{B^2}{b^2\beta^2}y^2 + \frac{C^2}{c^2\gamma^2}z^2 - 1 = 0,$$

ou

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} - 1 = 0,$$

avec $a' = \frac{a^2\alpha}{A}$, etc.

On voit que l'on a, d'après une équation trouvée plus haut,

$$\left|\frac{a}{a'}\right| + \left|\frac{b}{b'}\right| + \left|\frac{c}{c'}\right| = 1.$$

C'est la relation cherchée.

Supposons maintenant que la quadrique (Q) soit un paraboloïde, et soit

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0,$$

son équation.

Les coordonnées des sommets de (T) pourront être représentées par les formules

$$x = \lambda + \alpha, \qquad y = \frac{p\beta}{\lambda + p}, \qquad z = \frac{q\gamma}{\lambda + q},$$

λ étant racine de l'équation

$$f(\lambda) = \frac{B}{\lambda + p} + \frac{C}{\lambda + q} + \lambda^2 + D\lambda + E = 0.$$

Conservant les mêmes notations que précédemment, et suivant identiquement la même méthode, on trouve

$$B = -\frac{p\beta v(\lambda_1 + p)}{u}, \qquad C = -\frac{q\gamma w(\lambda_1 + q)}{r}, \qquad D = \alpha - \lambda_1 + \frac{r}{u},$$

et comme l'on a $pv^2 + qw^2 - 2ur = 0$, on en déduit

$$F(\lambda_1) = \frac{B^2}{p\beta^2(\lambda_1 + p)^2} + \frac{C^2}{q\gamma^2(\lambda_1 + q)^2} + 2(\alpha - \lambda_1 - D) = 0.$$

$F(\lambda)$ devant être divisible par $f(\lambda)$, il s'ensuit que

$$F(\lambda) \equiv f(\lambda)\left(\frac{B}{p\beta^2(\lambda + p)} + \frac{C}{q\gamma^2(\lambda + q)}\right).$$

Nous décomposons encore le second membre en éléments simples, ce qui nous conduit aux équations

$$(2) \quad \frac{B}{q - p}\left(\frac{1}{p\beta^2} + \frac{1}{q\gamma^2}\right) = \frac{q^2 - qD + E}{q\gamma^2}, \qquad (3) \quad \frac{C}{p - q}\left(\frac{1}{p\beta^2} + \frac{1}{q\gamma^2}\right) = \frac{p^2 - pD + E}{p\beta^2},$$

$$(4) \quad \frac{B}{p\beta^2} + \frac{C}{q\gamma^2} = -2, \qquad (5) \quad \frac{B(D - p)}{p\beta^2} + \frac{C(D - q)}{q\gamma^2} = 2(\alpha - D),$$

pour déterminer B, C, D, E.

Multiplions les premiers membres de (2) et (3) respectivement par $-\frac{1}{p\beta^2}$, $\frac{1}{q\gamma^2}$, et ajoutons. En tenant compte de (4), il vient

$$D = p + q + 2\,\frac{p\beta^2 + q\gamma^2}{(p - q)}.$$

L'équation (5) se simplifie, et peut être remplacée par

$$(5') \qquad \frac{B}{\beta^2} + \frac{C}{\gamma^2} = -2\alpha,$$

et l'on peut alors tirer de (4) et de (5')

$$B = -\frac{2p\beta^2(\alpha - q)}{p - q}, \qquad C = \frac{-2q\gamma^2(\alpha - p)}{q - p}.$$

Multiplions (2) par $\frac{1}{\beta^2}$, (3) par $-\frac{1}{\gamma^2}$, et ajoutons pour éliminer D ; nous trouvons

$$E = pq + \frac{2\alpha(p\beta^2 + q\gamma^2)}{(p - q)^2}.$$

Nous avons ainsi déterminé les coefficients de tous les termes de l'équation $f(\lambda) = 0$.

$F(\lambda) = 0$ exprime que les sommets de (T) sont sur le paraboloïde

$$\frac{y^2}{p'} + \frac{z^2}{q'} - 2(x - x') = 0,$$

où l'on a posé

$$\frac{p\beta^2}{B^2} = p', \qquad \frac{q\gamma^2}{C^2} = q', \qquad 2\alpha - D = x',$$

et p', q' satisfont à la condition

$$\sqrt{\frac{p}{p'}} + \sqrt{\frac{q}{q'}} = 2.$$

C'est la relation demandée.

En posant $D = \alpha + \lambda$, $\frac{B}{p\beta} = \xi$, $\frac{C}{q\gamma} = \eta$, on voit facilement que les coordonnées des points de contact des faces sont données par les formules

$$x = \xi + \lambda, \qquad y = \frac{p\xi}{\eta + p}, \qquad z = \frac{q\eta}{\xi + q}.$$

λ étant racine de l'équation $F(\lambda) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{p\xi^2}{\eta + p^2} + \frac{q\eta^2}{\xi + q^2} - 2(\xi + \eta) = 0,$$

équation aux ξ des normales menées de $H(\alpha, \beta, \gamma)$.

4. Réciproquement, si l'on se donne α', β', γ', on a pour déterminer α, β, γ les trois équations

$$2\alpha - p\beta + (p - q)\gamma + \theta = 0, \qquad 2\alpha + (q - p)\beta - q\gamma = 0,$$
$$2p\beta^2 + q\gamma^2 + (p - q^2)\beta\gamma + (q - p)\gamma(\alpha - \alpha') = 0.$$

Il est aisé de voir qu'elles ont cinq solutions en α, β, γ.

En posant $\alpha = p + q + \theta$, on a en effet

$$\alpha = p - q + \theta, \qquad \beta = \frac{(p - q)\beta}{2(\theta + p)}, \qquad \gamma = \frac{(q - p)\gamma}{2(\theta + q)},$$

θ étant une des racines de l'équation du cinquième degré

$$\frac{p\beta^2}{\theta + p^2} + \frac{q\gamma^2}{\theta + q^2} - 2(\theta + \alpha') = 0,$$

qui est l'équation aux normales menées de H'.

On aperçoit immédiatement la correspondance qui existe entre le point H d'un tétraèdre T et le pied (x, y, z) de la cinquième normale menée de H au paraboloïde

$$x = \alpha + \theta, \qquad y = \frac{p\beta}{\theta + p}, \qquad z = \frac{q\gamma}{\theta + q}.$$

On a

$$x - \alpha = p + q - \alpha, \qquad \frac{\beta}{y} = -\frac{p - q}{2p}, \qquad \frac{\gamma}{z} = -\frac{q - p}{2q}.$$

L'équation de la droite joignant les deux points (x, y, z), (α, β, γ) est donc

$$\frac{\alpha - x - \theta}{p - q - \alpha} = \frac{p(y - \beta - \theta y)}{\frac{1}{2}(q - 3p)\beta} = \frac{q(z - \gamma - \theta z)}{\frac{1}{2}(p - 3q)\gamma}.$$

L'élimination de θ entre ces deux équations linéaires donne

$$(p - q - \alpha - 3\alpha)(\alpha - q - 3p)\beta\gamma - p\beta(p - 3\alpha - \beta)(\alpha - q^2 - q - 3p)\gamma$$
$$2p(\alpha - q - \alpha - q)\gamma(\alpha - \gamma) - p\alpha(y - \beta) = 0,$$

surface du deuxième ordre qui contient les cinq droites, et la cubique aux pieds des normales menées de H'. Cette surface est un paraboloïde si l'on a

$$(p - q)(p - 3q)(q - 3p)(p + q - \alpha) = 0.$$

En écartant les cas particuliers, on voit qu'il n'y a des points H' est le plan $\alpha - p - q = 0$.

La surface est un cône si le discriminant du premier membre est nul, c'est-à-dire si l'on a (en supposant toujours $\beta'\gamma' \neq 0$)

$$2p + q(\alpha - (p - q)) - p - 3q - q - 3p = 0.$$

Le sommet H est en ce cas en plus.

Le point de rencontre des cinq droites est alors le centre du cône, et les équations du centre

deviennent

$$\gamma'[(p+q)(x-\alpha'+p)-q(q-3p)]+(q-p)(q-3p)z=0,$$

$$\beta'[(p-q)(x-\alpha'+q)-p(p-3q)]+(p-q)(p-3q)y=0,$$

$$\gamma'(p-3q)y-\beta'(q-3p)z=0.$$

Leur résolution facile conduit aux résultats suivants :

$$x=\alpha'-\frac{4pq}{p+q}=\frac{6pq-p^2-q^2}{2(p+q)}, \qquad y=\frac{(p+q)\beta'}{p-3q}, \qquad z=\frac{(p+q)\gamma'}{q-3p}.$$

2. Si (Q) et (Q_1) sont homothétiques, ils sont nécessairement égaux ; en effet de la relation $\sqrt{\frac{p}{p'}}+\sqrt{\frac{q}{q'}}=2$, on conclut que si $\frac{p}{p'}=\frac{q}{q'}$, ce rapport est égal à 1.

On a alors $B^2=p^2\beta'^2$, $C^2=q^2\gamma'^2$, équations qui donnent

$$2\alpha=p+q.$$

C'est le plan (P).

Les valeurs de B et C sont, en tenant compte de cette relation, $B=p\beta'^2$, $C=-q\gamma'^2$.

Cherchons les coordonnées des sommets du tétraèdre (T_1), en particulier celles du sommet opposé à la face formée par le plan tangent à (Q_1) au point λ_1.

Le plan tangent à (Q_1) au point λ a pour équation

$$x+\lambda+\alpha-2x'-\frac{\beta y}{\lambda+p}-\frac{\gamma z}{\lambda+q}=0.$$

x, y, z étant les coordonnées du sommet de (T_1) cherché, l'équation précédente doit être satisfaite lorsqu'on y remplace λ successivement par les trois racines autres que λ_1 de $f(\lambda)=0$. Son premier membre doit donc être identique au premier membre de

$$\alpha+\lambda+\frac{p\beta v}{u(\lambda-p)}+\frac{q\gamma w}{u(\lambda-q)}-\frac{r}{u}=0,$$

où u, v, w, r sont les coordonnées tangentielles de la face de (T) opposée au point λ_1, quantités que l'on a déterminées au début.

On a donc $$x-2x'=\frac{r}{u}, \qquad y=-\frac{pv}{u}, \qquad z=-\frac{qw}{u},$$

ou, en remplaçant $\frac{v}{u}$, $\frac{w}{u}$, $\frac{r}{u}$ par leurs valeurs et tenant compte de la relation $2\alpha=p+q$,

$$x-x'=\alpha+\lambda_1, \qquad y=\frac{-p\beta}{\lambda_1+p}, \qquad z=\frac{-q\gamma}{\lambda_1+q}.$$

Or les coordonnées du sommet λ_1 de (T) étant

$$x=\alpha+\lambda_1, \qquad y=\frac{p\beta}{\lambda_1+p}, \qquad z=\frac{q\gamma}{\lambda_1+q},$$

on voit que le point $H_1(\alpha-x', -\beta, -\gamma)$ joue exactement le même rôle par rapport au paraboloïde (Q_1) que le point $H(\alpha, \beta, \gamma)$ par rapport au paraboloïde (Q). De plus on a, en désignant par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les coordonnées de H_1,

$$\alpha_1-x'=\alpha-\frac{p+q}{2},$$

ce qui montre que les sommets de (T_1) sont sur un paraboloïde (Q_1) égal à (Q_1) et par suite à (Q), et que l'on a une suite indéfinie de tétraèdres (T_2), ... (T_n), ... jouissant de la même propriété.

En remplaçant x' par sa valeur en fonction de α, β, γ et α, β, γ respectivement par $-\beta_1$, $-\gamma_1$ dans l'équation $\alpha_1-x'=\frac{p+q}{2}$, on a le lieu de H_1 quand H se déplace dans le plan (P)

$$4p\beta^2-q\gamma^2+(p-q)^2(2\alpha-(p+q))=0$$

c'est un paraboloïde.

Il est à remarquer que si l'on part d'un point $H(\alpha, \beta, \gamma)$, les points H_n sont situés sur l'une des deux droites $(y = \beta, z = \gamma)$ ou $(y = -\beta, z = -\gamma)$, suivant que n est pair ou impair.

De même les sommets du tétraèdre (T_n) sont situés sur les parallèles à l'axe du paraboloïde menées par les sommets de (T), ou sur les symétriques de ces droites par rapport à l'axe, suivant que n est pair ou impair. Enfin les abscisses de tous ces points vont en croissant en progression arithmétique : $x_n = x_{n-1} + \lambda$.

Il est facile maintenant de voir sans calcul que les normales à (Q_1) aux points de contact des faces de (T_1) concourent en H ; en général, les normales à (Q_n) aux points de contact des faces de (T_n) concourent en H_{n-1}. En effet les coordonnées de H' étant dans l'hypothèse

$$2\alpha = p - q, \qquad x' = D - 2\alpha = \alpha - x, \qquad y' = \frac{B}{p\beta} = -\beta, \qquad z' = \frac{C}{q\gamma} = -\gamma,$$

on voit que H' coïncide avec le point H_{-1}, et par suite H'_1 avec H.

On pouvait d'ailleurs le prouver directement. Les coordonnées d'un sommet de (T) sont

$$x = \alpha + \lambda, \qquad y = \frac{p\beta}{\lambda - p}, \qquad z = \frac{q\gamma}{\lambda + q}.$$

Les normales au paraboloïde $f(x, y, z) \equiv \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2(x - x') = 0$ aux sommets de (T) sont bien concourantes au point (α, β, γ), puisque l'on a

$$\frac{x - \alpha}{f'_x} = \frac{y - \beta}{f'_y} = \frac{z - \gamma}{f'_z} = -\lambda.$$

3. Le point de contact de la face opposée au sommet λ_1 ayant pour coordonnées

$$x = \frac{\lambda}{u}(D - 2\alpha + \lambda_1), \qquad y = -\frac{p\lambda}{u} \cdot \frac{B}{\beta(\lambda_1 + p)}, \qquad z = -\frac{q\lambda}{u} \cdot \frac{C}{\gamma(\lambda_1 - q)},$$

la droite joignant ce point au sommet λ_1 a pour équations

$$(1) \qquad \frac{x - \alpha - \lambda_1}{D - 2\alpha} = \frac{p\beta y - \beta + \beta p\lambda_1}{B - p\beta^2} = \frac{q\gamma z - \gamma + \gamma q\lambda_1}{C - q\gamma^2}.$$

Il suffit d'éliminer λ_1 entre ces équations pour avoir la surface du deuxième ordre qui contient les quatre droites ; on obtient

$$(C - q\gamma^2)(B - p\beta^2)(z - \gamma + \beta\gamma(D - 2\alpha - p\beta q - \beta - qy)(z - \gamma) + (C - q\gamma^2)p\beta^2(y - \beta)$$
$$- (B - p\beta^2)q\gamma^2(z - \gamma) = 0,$$

hyperboloïde qui contient la cubique (Γ) aux pieds des normales menées de H.

Au lieu d'exprimer que cette surface est un cône, nous écrivons que les quatre droites sont concourantes.

Si x, y, z désignent les coordonnées du point de concours, les équations (1) doivent être satisfaites lorsqu'on remplace λ_1 par une des quatre racines de $f(\lambda) = 0$. Les équations linéaires en λ_1 qu'on obtient en égalant les rapports deux à deux sont donc des identités, ce qui conduit aux relations

$$\begin{cases} \dfrac{x - \alpha}{-1} = \dfrac{p\beta y - \beta}{y} = \dfrac{q\gamma z - \gamma}{z}, \\[2ex] \dfrac{-1}{D - 2\alpha} = \dfrac{\beta y}{B - p\beta^2} = \dfrac{\gamma z}{C - q\gamma^2}. \end{cases}$$

Les premières équations montrent d'abord que le point de concours doit être sur la cubique (Γ). Si l'on égale les premiers rapports à θ, qu'on porte les valeurs de y et de z dans les seconds, et qu'enfin on élimine θ, on trouve la condition

$$(p + q)(B - p\beta^2)(C - q\gamma^2) + (D - 2\alpha)(Cp\beta^2 - Bq\gamma^2) = 0.$$

qui s'écrit, en posant $\alpha - \frac{p+q}{2} = \xi, \quad \beta = \eta, \quad \gamma = \zeta,$

$$3\xi^2 - (p-q)^2 = \frac{2\xi(p\eta^2 + q\zeta^2)}{(p+q)^2}.$$

Le lieu du point H est donc une surface du troisième ordre.

On trouve d'ailleurs $\theta = -\frac{2\alpha + p + q}{4}$, et le point de concours I des quatre droites est

$$x = \alpha + \theta = \frac{\xi}{2}, \qquad y = \frac{p\beta}{\theta + p} = \frac{2p\eta}{-\xi + p - q}, \qquad z = \frac{q\gamma}{\theta + q} = \frac{2q\zeta}{-\xi + q - p}.$$

En éliminant ξ, ζ, η entre ces équations et l'équation du lieu H, on obtient le lieu du point I :

$$12x^2 - (p-q)^2 = x\,\frac{(2x+q-p)^2 qy^2 + (2x+p-q)^2 pz^2}{pq(p-q)^2},$$

surface du cinquième ordre.

VASNIER.

---

998. — *Etant donnés une ellipse et trois groupes de quatre points concycliques situés sur elle,*

$$A_1, A_2, A_3, A_4 ; \qquad B_1, B_2, B_3, B_4 ; \qquad C_1, C_2, C_3, C_4 ;$$

les cercles circonscrits aux triangles $A_iB_jC_k$, *qui ont pour sommets un point de chaque groupe, coupent la conique en des points* D_l. *On considère les groupes formés par quatre points* D_l, *qui proviennent de triangles* $A_iB_jC_k$ *n'ayant pas de sommet commun deux à deux, et on demande de montrer que ces groupes sont concycliques.*

L'ellipse donnée ayant pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, les coordonnées d'un point quelconque de cette ellipse peuvent être représentées par

$$x = a\,\frac{t^2+1}{2t}, \qquad y = b\,\frac{t^2-1}{2ti},$$

et l'équation aux t des points de rencontre de l'ellipse et du cercle

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + h = 0$$

est

$$t^4 - 4\frac{ap - ibq}{a^2 - b^2}t^3 + 2\frac{a^2 + b^2 + 2h}{a^2 - b^2}t^2 - 4\frac{ap + ibq}{a^2 - b^2}t + 1 = 0;$$

le produit de ses racines est égal à 1.

Inversement, toute équation du quatrième degré en t dont les coefficients extrêmes sont égaux pourra être identifiée avec la précédente, et les trois équations d'identification détermineront p, q et h.

Autrement dit, la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de l'ellipse d'arguments t_1, t_2, t_3, t_4 soient concycliques est

$$t_1t_2t_3t_4 = 1.$$

Ceci posé soient (t_1, t_2, t_3, t_4), (t'_1, t'_2, t'_3, t'_4) et $(t''_1, t''_2, t''_3, t''_4)$ les arguments des points (A_1, A_2, A_3, A_4), (B_1, B_2, B_3, B_4), (C_1, C_2, C_3, C_4); nous avons

$$(1) \qquad t_1t_2t_3t_4 = t'_1t'_2t'_3t'_4 = t''_1t''_2t''_3t''_4 = 1.$$

Considérons par exemple les cercles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, et désignons par D_1, D_2, D_3, D_4 les points où ces cercles rencontrent de nouveau l'ellipse, et par $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ les arguments de ces points.

Nous avons $\quad t_1t'_1t''_1\theta_1 = 1, \quad t_2t'_2t''_2\theta_2 = 1, \quad t_3t'_3t''_3\theta_3 = 1, \quad t_4t'_4t''_4\theta_4 = 1;$

en multipliant membre à membre et en tenant compte des relations (1), il vient

$$\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 = 1,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

L. BICKART.

Autre solution. — On peut aussi résoudre la question en exprimant les coordonnées d'un point de

l'ellipse en fonction de l'anomalie excentrique par les formules $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$. Cette anomalie est liée à la variable t par la relation $\cos\varphi + i\sin\varphi = t$ ou $\cos\varphi - i\sin\varphi = \frac{1}{t}$. Dès lors, la condition $t_1 t_2 t_3 = 1$ peut s'écrire

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = 1,$$

ou

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2k\pi,$$

k désignant un nombre entier positif ou négatif quelconque.

La démonstration s'achève ensuite facilement. **VASNIER.**

MM. J. D. Dupont, [illegible] et R. Bouvart ont résolu la question par [illegible]

CONCOURS DE 1901 (*Suite*)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (Cours spéciaux).

Mécanique.

Une échelle double AOA à branches OA et OA' égales est placée sur un sol horizontal AA'; ses deux branches sont reliées par une tringle BB' destinée à en empêcher au besoin le glissement sur le sol.

L'échelle a un poids total p; chaque branche a un poids ϖ supposé appliqué au tiers de sa longueur à partir de la base et la tringle a un poids ϖ, de sorte que $2\varpi + \varpi = p$.

Sur l'une OA des deux branches est appliqué en M un poids P.

Désignant par a la longueur OA, par b la distance OB, par c la distance OM, par α le demi-angle au sommet de l'échelle, et par f le coefficient de frottement de l'échelle sur le sol (on néglige le frottement dans l'articulation O).

1° Quelle est la condition pour que la tringle BB' ne subisse aucune tension ;

2° Lorsque cette tension existe, calculer sa valeur ainsi que celle de la pression exercée sur l'axe qui relie en O les deux branches ;

3° Quelle est la valeur de cette tension par millimètre carré de section de la tringle pour la position la plus défavorable du poids P et avec les données numériques suivantes :

$p = [illegible]$, $\varpi = 15^{\circ}$, $P = 100^{\circ}$, $\alpha = [illegible]$, $b = \frac{[illegible]}{[illegible]}$, $f = 0,10$, $\operatorname{tg}\alpha = 0,40$.

Section de la tringle : 1°.

(*Durée : 4 heures.*)

Analyse et Trigonométrie.

I. — Trouver les fonctions déterminées par les conditions suivantes :

1° Le produit de la fonction par sa dérivée [illegible] égal à la dérivée seconde.

2° Le produit de la fonction par sa dérivée [illegible] est égal au produit de la variable par la dérivée seconde.

II. — Entre un alignement droit AF et un arc de cercle CDE de centre O et de rayon R, dont la distance CF à l'alignement droit peut être modifié à volonté, on veut insérer un arc de lemniscate de Bernouilli BD tangent en B à l'alignement droit et en D à l'arc de cercle dont le rayon de courbure en D soit [illegible] et le rayon de courbure en D soit égal à R.

L'équation de la lemniscate en coordonnées polaires entre le rayon vecteur BD [illegible] et l'angle polaire BD [illegible] est

$$[illegible] = k \sin [illegible].$$

Le rayon de courbure [illegible] de la lemniscate a pour expression

$$[illegible] = \frac{k}{[illegible]}.$$

Enfin, toute normale telle que OD à la lemniscate fait avec la perpendiculaire OE à l'alignement droit un angle α qui est le triple de [illegible].

Cela posé, on demande de calculer, en prenant $K = 36\,000$ et $R = 300$ mètres :
1° le vecteur $BD = r$, 2° l'angle $DBE = \omega$, 3° la distance BF, 4° la distance OF.

(*Durée : 1 heures.*)

Épure de Géométrie descriptive.

Une surface d'égale pente a pour directrice une ellipse horizontale dont les demi-axes sont $a = 60^{mm}$ et $b = 35^{mm}$.

Le cône directeur a son axe vertical et ses génératrices font avec le plan horizontal un angle α, dont la cotangente est égale à 3/4.

L'ellipse est située à une hauteur $h = 120^{mm}$ au-dessus du plan horizontal.

On demande de représenter les deux nappes de la surface comprises entre l'ellipse et le plan horizontal, à l'aide de quelques génératrices sur chacune d'elles.

On donnera :

1° Un plan complet ;

2° Une demi-élévation sur un plan vertical parallèle au grand axe de l'ellipse et une demi-coupe faite par un plan vertical passant par ce grand axe ;

3° Une demi-élévation sur un plan vertical parallèle au petit axe de l'ellipse et une demi-coupe verticale passant par ce petit axe.

Ces demi-coupes feront connaître les lignes doubles de la surface.

Des hachures fines et largement espacées seront mises sur les parties coupées.

Titre extérieur : SURFACES DÉVELOPPABLES.

Titre intérieur : SURFACE D'ÉGALE PENTE.

(*Durée : 4 heures.*)

Croquis et dessin de machines.

Première partie : CROQUIS (feuille 1/8 grand-aigle, quadrillée).

1° Sur une première feuille, faire au crayon, à main levée, le relevé géométral (plan, élévation et coupe) de l'un des objets placés dans la salle d'examen.

2° Relever ses dimensions (en millimètres) et les inscrire sur le croquis.

(On accordera 1 h 1/2 pour cette première partie du travail, après quoi le modèle ou relief sera retiré de la salle.)

Deuxième partie : MISE AU NET (feuille 1/4 grand-aigle).

Sur une seconde feuille, mettre au net, à l'encre de Chine, à une échelle déterminée, le croquis précédent.

NOTA. — L'échelle est laissée à l'arbitraire de MM. les candidats, elle devra être choisie assez grande pour que la feuille soit bien remplie.

L'échelle doit être dessinée dans une partie libre de cette feuille.

(*Durée : 4 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1071. — Par un point M du plan d'un triangle rectangle isocèle, il passe deux paraboles circonscrites à ce triangle. Trouver et construire le lieu des points M pour lesquels ces paraboles sont égales.

VASNIER.

1072. — On considère un cercle et un point fixes, (C) et P.

1° Une droite quelconque (D) coupe le cercle en deux points A et B; les droites PA et PB rencontrent à nouveau le cercle en deux points A′ et B′. Trouver l'équation de la droite (D′) qui joint les points A′ et B′ en fonction de celle de la droite (D) et le lieu du point de rencontre des deux droites (D) et (D′).

2° Quand la droite (D′) tourne autour d'un point fixe M′, la droite (D) tourne aussi autour d'un point fixe M. Trouver les coordonnées de M en fonction de celles de M′ et réciproquement. Ces formules définissent une transformation homographique. Trouver la ligne qui correspond au cercle (C), celle qui correspond à la polaire de P par rapport du cercle (C), (D_1), et la droite (Δ) de la première figure qui correspond à la droite de l'infini dans la seconde.

3° On considère dans la première figure un cercle variable (Γ) tangent à (D_1) et à (Δ). Trouver la conique variable de la seconde figure qui correspond au cercle (Γ). Lieu des foyers de cette conique. Construire ce lieu.

E. H.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1001. — *On donne une hyperbole équilatère rapportée à ses axes et on demande de trouver en fonction d'un seul paramètre l'équation générale des paraboles tangentes en O à Ox et dont les directrices enveloppent l'hyperbole. Trouver :*

1° Le lieu des foyers de ces paraboles ;

2° Les lieux des projections sur la tangente au sommet, sur la corde focale principale, sur la directrice et sur l'axe de l'origine des coordonnées.

Désignons par α, β les coordonnées du foyer de la parabole variable et par $x\cos\theta + y\sin\theta + p = 0$ l'équation de la directrice. L'équation de la courbe est alors

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta + p)^2.$$

Pour que cette parabole soit tangente à l'origine à l'axe des x, il faut que le coefficient de x et que le terme indépendant soient nuls, ce qui nous donne

$$\alpha - p\cos\theta = 0, \qquad \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0.$$

On en déduit $\beta = \pm p\sin\theta$. Mais si l'on prend $\beta = -p\sin\theta$, le coefficient de y est nul, et l'équation représente une droite double ; il faut donc prendre $\beta = p\sin\theta$.

L'équation de la parabole devient

$$(x+p\cos\theta)^2 + (y-p\sin\theta)^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta + p)^2$$

ou

$$(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 - 4py\sin\theta = 0.$$

Il nous reste à exprimer que la directrice est tangente à l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 - a^2 = 0$. Or on sait que la condition pour qu'une droite $ux + vy + w = 0$ soit tangente à cette courbe est $a^2(u^2 - v^2) - w^2 = 0$; nous aurons donc dans le cas actuel $a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - p^2 = 0$, d'où $p = \pm a\sqrt{\cos 2\theta}$; finalement on voit que l'équation générale des paraboles considérées est

$$(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 + 4ay\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta} = 0.$$

1. *Lieu des foyers.* — Le lieu des foyers s'obtiendra en éliminant θ et p entre les équations

$$x = -p\cos\theta, \qquad y = p\sin\theta, \qquad p^2 = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

Les deux premières nous donnent

$$p^2 = x^2 + y^2, \qquad \cos\theta = \frac{-x}{\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

et en portant ces valeurs dans la troisième, nous avons l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

qui représente une lemniscate.

2. *Lieu de la projection de l'origine sur la tangente au sommet.* — La tangente au sommet est parallèle à la directrice et passe par la projection du foyer sur la tangente Ox ; cette projection a pour coordonnées $x = -p\cos\theta$, $y = 0$; par suite l'équation de la tangente au sommet est

(1) $$(x + p\cos\theta)\cos\theta + y\sin\theta = 0.$$

D'autre part la perpendiculaire menée de l'origine à cette droite a pour équation

(2) $$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta},$$

et il nous faut éliminer θ et p entre les équations (1), (2) et

(3) $$p^2 = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

De l'équation (2), on tire $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$, $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$, en posant, pour simplifier l'écriture, $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$. Portons ces valeurs dans l'équation (1), nous en tirons $p = -\frac{\rho^3}{x^2}$, et l'équation (3) nous donne alors

$$(x^2 + y^2)^3 - a^2x^4(x^2 - y^2) = 0.$$

Cette équation représente une courbe du huitième degré symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées et dont la forme est analogue à celle de la lemniscate. On s'en assure aisément en posant $y = tx$.

Lieu de la projection de l'origine sur la corde focale principale. — Cette corde passe par le foyer et est perpendiculaire à l'axe ou parallèle à la directrice ; son équation est donc

$$(x - p\cos\theta)\cos\theta + (y - p\sin\theta)\sin\theta = 0.$$

Nous aurons l'équation du lieu en éliminant θ et p entre cette équation et les équations (2) et (3). Le calcul se fait comme précédemment et conduit à l'équation

$$(x^2 + y^2)^3 - a^2(x^2 - y^2)^3 = 0,$$

qui représente une courbe du huitième degré ayant encore une forme analogue à celle de la lemniscate.

Lieu de la projection de l'origine sur la directrice. — Un calcul tout semblable montre que le lieu est la lemniscate lieu des foyers.

Lieu de la projection de l'origine sur l'axe. — L'axe passe par le foyer et est perpendiculaire à la directrice; son équation est donc

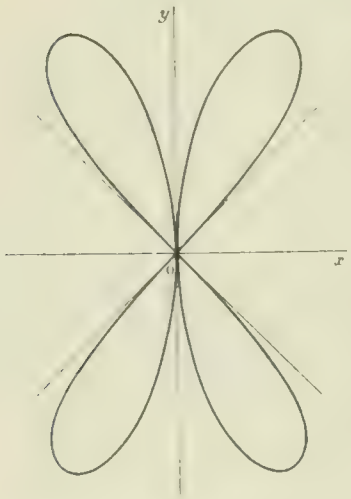
(4) $$(x - p\cos\theta)\sin\theta - (y + p\sin\theta)\cos\theta = 0.$$

La perpendiculaire menée par l'origine a pour équation

(5) $$\frac{x}{\sin\theta} = \frac{y}{-\cos\theta};$$

nous éliminerons donc θ et p entre les équations (4), (5) et (3).

La relation (5) nous donne $\sin\theta = \frac{x}{\rho}$, $\cos\theta = -\frac{y}{\rho}$, ρ désignant toujours $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.



Portons ces valeurs dans la relation (4), nous en tirons $p = -\frac{\rho^3}{2xy}$.

Il ne nous reste plus qu'à remplacer $\sin\theta$, $\cos\theta$ et p par ces valeurs dans l'équation (3) pour obtenir l'équation du lieu. Nous trouvons ainsi

$$(x^2 + y^2)^4 + 4a^2x^2y^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Pour construire cette courbe, nous poserons $y = tx$.

Nous avons alors $x^2 = \frac{4a^2t^2(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^4}$, et comme la courbe est symétrique par rapport aux deux axes, il suffit de donner à t des valeurs positives et de considérer seulement les valeurs positives de x.

Pour que x soit réel, il faut que t soit plus grand que 1, et quand t croît de 1 à $+\infty$, x varie d'une manière continue de zéro à zéro, et comme pour t infini y est également nul, puisque

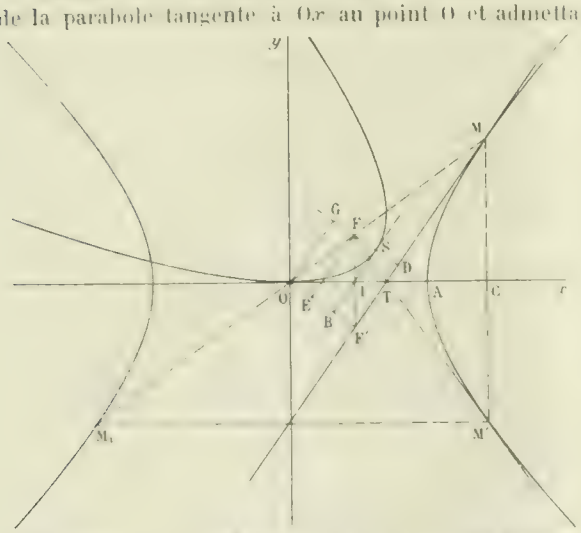
$$y^2 = t^2x^2 = \frac{4a^2t^4(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^4},$$

on en conclut aisément la forme de la courbe, et il n'y a plus qu'à achever par symétrie.

E.-N. BARISIEN.

Solutions analogues par MM. Fauvernier, Marchal et Solls.

Remarques géométriques. — Soit MT une tangente quelconque à l'hyperbole équilatère donnée ; le foyer F de la parabole tangente à Ox au point O et admettant MT comme directrice est le symétrique par rapport à Ox de la projection F′ du point O sur MT. Par suite OF est perpendiculaire à la droite FT qui touche l'hyperbole au point M′, symétrique de M par rapport à Ox. Par conséquent le lieu du foyer est la podaire du point O par rapport à l'hyperbole. De plus, designons par M_1 le point symétrique de M par rapport à l'origine ; le triangle $MM'M_1$ est un triangle rectangle inscrit dans l'hyperbole équilatère, et l'on sait que la tangente au point M′, sommet de l'angle droit, est perpendiculaire à l'hypoténuse MM_1. Donc le point F est sur la droite OM, et l'on a $OF.OM = OT.OC$, et comme MM′ est la polaire du point T par rapport à l'hyperbole, $OT.OC = \overline{OA}^2 = a^2$. Par conséquent $OF.OM = a^2$, et le lieu du point F est la courbe inverse de l'hyperbole, la puissance d'inversion étant égale à a^2. On sait que le lieu est une lemniscate.



D'ailleurs l'équation de l'hyperbole en coordonnées polaires est $\rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\omega}}$, celle de la courbe inverse est alors $\rho = a\sqrt{\cos 2\omega}$.

On peut obtenir de même très simplement les équations en coordonnées polaires des autres lieux. Designons par ω l'angle xOF ou xOF'. Nous avons $OF = OF' = a\sqrt{\cos 2\omega}$.

Considerons le point B projection de l'origine sur la tangente au sommet de la parabole ; nous avons $OB = OF\cos\omega = OF'\cos\omega$, et par suite le lieu du point B a pour equation $\rho = a\cos\omega\sqrt{\cos 2\omega}$.

Dans le triangle rectangle OEF, on a $OE = OF\cos 2\omega = a\cos 2\omega\sqrt{\cos 2\omega}$, donc le lieu du point E projection de l'origine sur la corde focale principale a pour équation $\rho = a\cos 2\omega\sqrt{\cos 2\omega}$.

Le lieu du point F′ projection de l'origine sur la directrice coïncide avec la lemniscate lieu du foyer.

Enfin cherchons le lieu du point G, projection de l'origine sur l'axe. Posons $xOG = \omega$, et $xOF = \alpha$. Nous avons $OG = OF\cos(\omega - \alpha) = a\sqrt{\cos 2\alpha}\cos(\omega - \alpha)$.

Mais comme OF′ est perpendiculaire à OG, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \omega$, et par suite $OG = a\sin 2\omega\sqrt{-\cos 2\omega}$.

On en conclut que le lieu du point G a pour équation en coordonnées polaires $\rho = a\sin 2\omega\sqrt{-\cos 2\omega}$.

CANS.

1009.— *Trouver les lieux des centres, des sommets et des foyers des hyperboles équilatères qui ont leurs directions asymptotiques données et qui coupent un cercle donné en des points dont trois soient les sommets d'un triangle équilatéral.*

Les directions asymptotiques des hyperboles étant fixes, il en est de même des directions de leurs axes ; nous prendrons comme axes de coordonnées des parallèles aux axes des hyperboles menées par le centre O du cercle donné (C), et nous désignerons par R le rayon de ce cercle.

Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans le cercle (C) ; les côtés de ce triangle sont tangents au cercle (C') concentrique au cercle (C) et ayant pour rayon $\frac{R}{2}$. De plus, comme C est le point de concours des hauteurs du triangle ABO, toute hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABO passe par le point C.

Cela posé, pour obtenir l'équation générale des hyperboles considérées, nous nous donnerons une corde AB du cercle (C) tangente au cercle (C'), et nous prendrons l'équation générale des hyperboles équilatères ayant leurs axes parallèles aux axes de coordonnées et passant par les points A, B, O.

Soit $x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{R}{2} = 0$ l'équation de la corde AB. Toute conique dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées et qui passe par les points A et B rencontre le cercle (C) en deux autres points C et D, tels que les droites AB et CD sont également inclinées sur Ox; l'équation de CD est donc de la forme $x\cos\varphi - y\sin\varphi + \mu = 0$. Il en résulte que l'équation de la conique peut s'écrire

$$\lambda(x^2 + y^2 - R^2) + \left(x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{R}{2}\right)(x\cos\varphi - y\sin\varphi + \mu) = 0.$$

Ecrivons que cette conique est une hyperbole équilatère passant par le point O ; nous avons

$$2\lambda + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0, \qquad -\lambda R^2 - \frac{\mu R}{2} = 0 :$$

d'où

$$\lambda = -\frac{\cos 2\varphi}{2}, \qquad \mu = R\cos 2\varphi.$$

et l'équation de l'hyperbole devient

$$-\cos 2\varphi(x^2 + y^2 - R^2) + (2x\cos\varphi + 2y\sin\varphi - R)(x\cos\varphi - y\sin\varphi + R\cos 2\varphi) = 0.$$

On voit facilement que le coefficient de x^2 est égal à 1, celui de y^2 à -1 ; quant au coefficient de x, c'est $R\cos\varphi(2\cos 2\varphi - 1)$ ou $R\cos\varphi(\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi)$, c'est-à-dire $R\cos 3\varphi$. Le coefficient de y est égal à $R\sin\varphi(2\cos 2\varphi + 1)$ ou $R\sin\varphi(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, ou encore à $R\sin 3\varphi$.

L'équation générale des hyperboles considérées est donc

$$x^2 - y^2 + Rx\cos 3\varphi + Ry\sin 3\varphi = 0,$$

ou, en posant $3\varphi = \theta$,

$$x^2 - y^2 + Rx\cos\theta + Ry\sin\theta = 0.$$

1. *Lieu des centres.* — Pour avoir ce lieu il suffit d'éliminer θ entre les deux équations

$$2x + R\cos\theta = 0, \qquad -2y + R\sin\theta = 0.$$

L'élimination est immédiate et conduit à l'équation

$$x^2 + y^2 - \frac{R^2}{4} = 0$$

qui représente le cercle (C').

Ce résultat pouvait se prévoir. On sait en effet que le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle des neuf points de ce triangle. Or le cercle (C') est le cercle des neuf points de *tous* les triangles équilatéraux inscrits dans le cercle (C). Par conséquent, toute hyperbole équilatère circonscrite à l'un de ces triangles a son centre sur le cercle (C').

2. *Lieu des sommets.* — Les axes de la courbe ont pour équations $2x + R\cos\theta = 0$ et $-2y + R\sin\theta = 0$.

Considérons d'abord le lieu des sommets situés sur l'axe $2x + R\cos\theta = 0$. Pour cela, nous

éliminons θ entre cette équation et l'équation de l'hyperbole. Nous tirons de ces deux équations $\cos\theta = -\frac{2x}{R}$, $\sin\theta = \frac{x^2+y^2}{Ry}$, et en écrivant que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, nous obtenons l'équation du lieu

$$(x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2 - R^2y^2 = 0.$$

Le lieu des sommets situés sur l'axe $-2y + R\sin\theta = 0$ a pour équation

$$(x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2 - R^2x^2 = 0.$$

ce qui montre que ce deuxième lieu est symétrique du premier par rapport aux bissectrices des axes de coordonnées. Il nous suffira de construire l'un d'eux, par exemple celui qui est défini par l'équation

$$(x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2 - R^2y^2 = 0.$$

Passons en coordonnées polaires, nous obtenons l'équation

$$\rho^2 = \frac{R^2\sin^2\omega}{1+\sin^2 2\omega}, \qquad \text{ou} \qquad \rho = \frac{R\sin\omega}{\pm\sqrt{1+\sin^2 2\omega}}.$$

A toute valeur de ω correspondent deux valeurs de ρ égales et de signes contraires, et par suite deux points de la courbe symétriques par rapport au pôle. Il suffit donc de considérer un seul signe devant le radical, $+$ par exemple, de discuter la courbe

$$\rho = \frac{R\sin\omega}{+\sqrt{1+\sin^2 2\omega}}.$$

et de construire la symétrique par rapport au pôle de la courbe obtenue.

Nous devons faire varier ω de 0 à 2π, mais en changeant ω en $\pi+\omega$, ρ change de signe ; donc il suffit de faire varier ω dans un intervalle dont l'étendue soit égale à π. D'autre part, en changeant ω en $-\omega$, ρ change de signe ; la courbe est symétrique par rapport à Oy, et il suffit de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

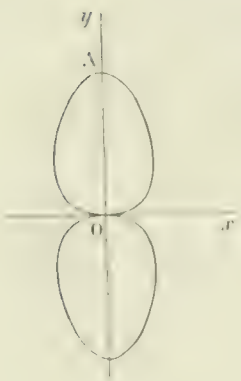
En résumé, nous ferons varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et nous prendrons la symétrique de la courbe obtenue par rapport aux deux axes.

La dérivée de ρ par rapport à ω est

$$\rho' = \frac{R\cos\omega(1+4\sin^4\omega)}{(1+\sin^2 2\omega)^{\frac{3}{2}}};$$

on voit ainsi que lorsque ω croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ρ croît de 0 à R.

La tangente au point A $\left(\omega = \frac{\pi}{2},\ \rho = R\right)$ est perpendiculaire à Oy.



On achève alors par symétrie et on obtient la courbe ci-contre.

Pour avoir le lieu complet, il faut encore, d'après ce qui a été vu plus haut, prendre la symétrique de cette courbe par rapport aux bissectrices des axes.

3. *Lieu des foyers.* — Les directrices des hyperboles considérées sont parallèles soit à Ox, soit à Oy.

Considérons d'abord les hyperboles dont les directrices sont parallèles à Oy ; comme leur excentricité est égale à $\sqrt{2}$, leur équation générale est

$$(x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2 - 2(x-\lambda)^2 = 0,$$

α, β désignant les coordonnées d'un foyer, et λ l'abscisse de la directrice correspondante.

Identifions cette équation et l'équation générale trouvée plus haut,

$$x^2 - y^2 + Rx\cos\theta + Ry\sin\theta = 0;$$

nous obtenons $\quad R\cos\theta = 2\alpha - 4\lambda, \qquad R\sin\theta = 2\beta, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 2\lambda^2,$
et il nous suffit d'éliminer λ et θ entre ces trois équations.

On élimine aisément θ entre les deux premières en faisant la somme des carrés, on a

$$R^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2) - 16\alpha\lambda + 16\lambda^2,$$

et, en remplaçant λ par $\pm\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}}$, on trouve

$$R^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2) \pm 16\alpha\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} + 8(\alpha^2 + \beta^2),$$

ou

$$R^2 = 12(\alpha^2 + \beta^2) \pm 16\alpha\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}.$$

La forme de cette équation nous engage à passer en coordonnées polaires : nous obtenons

$$R^2 = 12\rho^2 \pm 8\rho^2\cos\omega\sqrt{2},$$

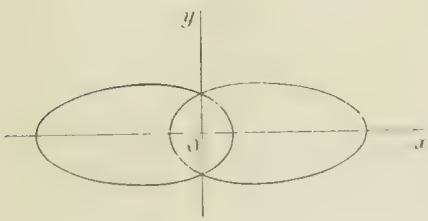
ou

$$\rho^2 = \frac{R^2}{4(3 \pm 2\cos\omega\sqrt{2})}.$$

Or les deux équations $\rho^2 = \dfrac{R^2}{4(3+2\cos\omega\sqrt{2})}$ et $\rho^2 = \dfrac{R^2}{4(3-2\cos\omega\sqrt{2})}$ représentent la même courbe, car l'une se déduit de l'autre en changeant ω en $\pi+\omega$ et ρ en $-\rho$. Il suffit donc de construire la courbe

$$\rho^2 = \frac{R^2}{4(3+2\sqrt{2}\cos\omega)}, \qquad \text{ou} \qquad \rho = \frac{R}{\pm 2\sqrt{3+2\sqrt{2}\cos\omega}}.$$

On voit aisément que cette courbe est symétrique par rapport aux deux axes ; il suffit de faire varier ω de 0 à π, et de considérer la valeur positive de ρ qui croît de $\dfrac{R}{2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ à $\dfrac{R}{2\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$. On achève ensuite par symétrie.



On verra facilement que le lieu des foyers des hyperboles dont les directrices sont parallèles à Ox est symétrique du lieu qu'on vient de trouver par rapport aux bissectrices des axes.

CANS.

Autres solutions par MM. E.-N. Barisien ; G. Fauvernier ; J. Marchal ; Souls, à Condom.

CONCOURS DE 1901 (*Suite*)

ÉCOLE CENTRALE (Deuxième session).

Géométrie analytique.

1073. — On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy. Sur l'axe des x on considère deux points A et B dont les distances à l'origine sont les racines de l'équation $d^2 - 2pd + q^2 = 0$. On projette les points A et B en a et b respectivement sur la droite $y = mx$. Ceci posé :

1° Former l'équation générale des coniques Δ circonscrites au quadrilatère $AabB$ et distinguer les points du plan par où passe une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

2° Trouver le lieu γ des centres des coniques Δ et séparer sur ce lieu les points qui sont des centres d'ellipses de ceux qui sont des centres d'hyperboles.

Démontrer géométriquement que si l'on fait varier m le lieu du centre de γ est un cercle.

3° Indiquer, pour une valeur déterminée de m, une construction de l'hyperbole équilatère qui fait partie des coniques Δ ; puis déterminer et construire l'hyperbole équilatère dont les tangentes en a et b sont rectangulaires.

4° Former l'équation des coefficients angulaires des normales menées de l'origine à l'hyperbole équilatère qui répond à $m = 1$, $q = 0$, et démontrer que deux seulement des coefficients angulaires sont réels.

(20 septembre, de 7 h. à 11 h.)

Physique et Chimie.

I. — Établir les formules du prisme.

Montrer, par le calcul, l'existence d'un minimum de déviation.

II. — **1074**. — D'un point A on laisse tomber un corps sans vitesse initiale, et d'un point B situé plus bas, sur la même verticale, à la distance a, on lance un corps verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale v_0; on demande :

1° D'écrire les formules du mouvement des deux mobiles;

2° Où et à quelle époque se fera la rencontre, et quelles seront alors les vitesses respectives des deux mobiles? Quelle doit être la vitesse initiale pour que la rencontre ait lieu au milieu de AB?

3° Quelle doit être la vitesse initiale pour que la rencontre ait lieu à l'instant où les mobiles sont animés de vitesses égales et de signes contraires (époque et lieu de la rencontre dans cette hypothèse)?

III. — **1075**. — Soit un réservoir vide de gaz ayant 60 mètres cubes de capacité. On se propose de le remplir d'air formé de 76,9 d'azote et de 23,1 d'oxygène, en poids, à la pression 750^{mm}, à la température de 15° et d'état hygrométrique $e = 3/4$.

Pour cela on décomposera de l'azotate d'ammonium pur et sec. La vapeur d'eau résultant de cette décomposition sera entièrement condensée et envoyée ensuite dans le réservoir. Le gaz provenant de la décomposition de l'azotate sera chauffé au rouge très vif.

1° Quel poids d'azotate d'ammonium faudra-t-il décomposer?

2° Quel poids de phosphore blanc faudra-t-il brûler pour enlever l'excès d'oxygène?

3° Quel poids de chaux anhydre faudra-t-il pour absorber l'excès de vapeur d'eau?

Coefficient de dilatation de l'air : $\alpha = 0,00367$.

Densité de la vapeur d'eau, 0,625. Masse du litre d'air, $1^{gr},293$.

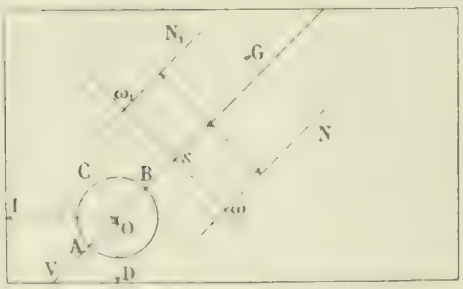
Tension de la vapeur d'eau saturée à 15°, $0^{m},0127$.

Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

(20 septembre, de 2 h. à 5 h.)

Géométrie descriptive.

1076. — On demande de déterminer la projection horizontale de l'intersection d'un cylindre oblique avec un cylindre de révolution, les deux surfaces étant définies de la manière suivante :



1° Le cylindre oblique a pour base une circonférence C du plan horizontal (centre O, rayon $R = 40^{mm}$); les génératrices inclinées à 45° sur le plan horizontal sont parallèles au plan vertical donné VG; le cylindre est limité par un plan horizontal supérieur de cote $h = 100^{mm}$.

2° Le cylindre de révolution est tangent au plan horizontal de projection. Son rayon est de 40^{mm} et son axe est projeté horizontalement en $\omega s \omega_1$. Cette droite passe par le point s défini sur la figure et elle est perpendiculaire à la direction VG. Ce cylindre est limité à deux sections droites N et N_1 de positions données.

Cette première partie de l'épure s'exécutera complètement à l'encre. On admettra que les deux surfaces cylindriques sont opaques et qu'elles forment un seul solide. Les lignes cachées se représenteront par des traits pointillés. Cela fait, on supposera les solides éclairés par un point lumineux S donné par sa projection horizontale et sa cote $h' = 150^{mm}$ et on déterminera en projection horizontale les courbes d'ombres propres et celles d'ombres portées soit par les surfaces entre elles soit par les surfaces sur le plan horizontal.

Ces courbes se traceront au crayon d'un trait noir continu pour les parties vues et d'un trait noir pointillé pour les parties cachées.

Enfin on devra recouvrir de hachures tracées à l'encre bleue les parties dans l'ombre qui sont vues.

Cadre de 27 sur 45^{cm}. Titre extérieur : Géométrie descriptive. — Titre intérieur : Cylindres.

Données numériques : $OI = 110^{mm}$; $OD = 65^{mm}$; $OB = Bs = 40^{mm}$; $s\omega = s\omega_1 = 70^{mm}$.

Trigonométrie.

CALCUL

1. **1077.** — Calculer les arcs compris entre 90° et 180° qui vérifient la formule

$$\operatorname{tg}^2(3x+\alpha) = \frac{\cos^3\beta \operatorname{tg}\gamma}{\sqrt[3]{a^3}}.$$

$a = 0{,}542853, \qquad \alpha = 72^\circ 50' 35'',4, \qquad \beta = 210^\circ 38' 24'',5, \qquad \gamma = 124^\circ 17' 41'',8.$

PROBLÈME

1078. — 1° Calculer les côtés b, c d'un triangle ABC connaissant l'angle A, la hauteur h relative au côté BC et le rayon r' du cercle exinscrit situé dans l'angle A.

2° Condition entre les données A, h, r' pour que le problème soit possible.

3° Résolution graphique du triangle ABC ; discussion de la construction.

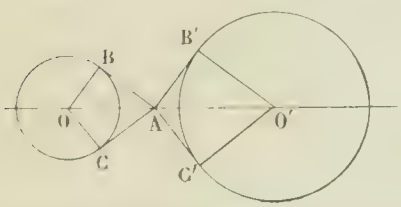
3° Calculer en fonction des données la distance des centres des deux autres cercles exinscrits au triangle ABC.

(*21 septembre, de 2 h. à 5 h.*)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (**Cours préparatoires**).

Algèbre.

1079. — On donne deux cercles, l'un de centre O et de rayon R, l'autre de centre O′ et de rayon $R' = R\sqrt{7}$.



La distance d des centres O et O′ est égale à 4R.

D'un point A pris sur la ligne des centres, on mène à ces deux cercles les tangentes AB, AC, AB′ et AC′ qui les touchent en B, C, B′, C′.

Déterminer la distance $OA = x$ de manière que la somme des aires des quadrilatères OBAC et O′B′AC′ soit égale au double de l'aire du carré circonscrit au cercle du centre O.

Examiner si les valeurs de x, mises en évidence par l'application du théorème de Rolle, conviennent à la question.

(*Durée : 3 heures 1/2.*)

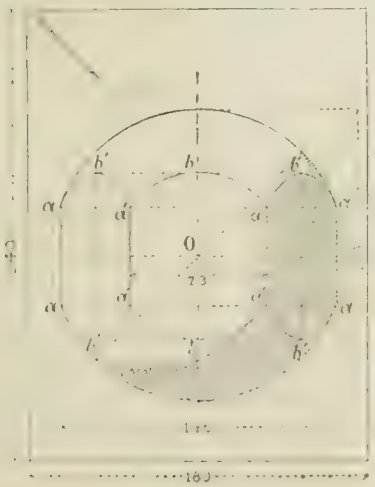
Géométrie analytique.

Lieu des centres des hyperboles équilatères qui passent par trois points donnés.

(*Durée : 3 heures 1/2.*)

Lavis (feuille 1/8 grand-aigle).

PRISME ET SPHÈRE (Surfaces dépolies).



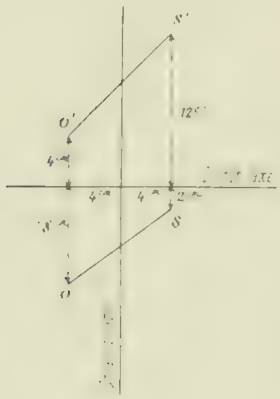
Intersection des surfaces. — La face du prisme qui est de front coupe la sphère suivant des arcs de cercle $a'ba'$, de centre O ; les points a' et a' sont au niveau des points a et a situés sur le contour apparent.

Les faces latérales du prisme déterminent des arcs de cercle égaux aux précédents, mais projetés suivant des arcs d'ellipse $ab'a' - a'b'a\ldots$ Le point b' est à plomb du milieu de aa' et au niveau de b. En a, l'ellipse est tangente au contour apparent de la sphère.

Ces conditions suffisent pour tracer facilement ces arcs d'ellipse.

Exécuter le lavis à l'encre de Chine, sans couleurs, à teintes plates ou à teintes fondues, à volonté.

(*Durée : 3 heures 1/2.*)



Épure de Géométrie descriptive.

(Feuille 1/4 grand-aigle.)

On donne les points (o, o') et (s, s') disposés par rapport aux axes de la feuile, comme l'indique le croquis ci-contre.

On considère le cône de sommet (s, s') circonscrit à la sphère de centre (o, o') et de rayon égal à $4^{cm},5$, ce cône étant limité à son cercle de contact avec la sphère.

Par le milieu du rayon de front de ce cercle de contact, supérieur à son centre, on mène un plan de bout P parallèle à l'axe du cône.

On demande de représenter ce cône après en avoir enlevé la partie située au-dessus du plan P.

On déterminera les tangentes à la section faite par le plan P aux points où elle rencontre la base du cône ainsi que les asymptotes de cette section.

Nota. — Le corps représenté sera dessiné en noir, les arêtes cachées étant indiquées en pointillé, les lignes de construction, y compris la sphère donnée et la partie enlevée du cône, en rouge ; les tangentes et asymptotes, en bleu.

(*Durée : 3 heures 1/2.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1080. — On considère un triangle ABC dans lequel la base BC est fixe et dans lequel on a

$$m \operatorname{tg} B + n \operatorname{tg} C = k,$$

m, n et k étant des nombres donnés, positifs ou négatifs.

1° m étant différent de n, prouver que le lieu géométrique du sommet A est une hyperbole passant par les points B et C.

Montrer que cette hyperbole ne dépend que des rapports $\frac{k}{m+n}$ et $\frac{k}{m+n}$.

Indiquer les parties de la courbe qui appartiennent au lieu et déterminer les asymptotes.

Les quantités m, n et k variant, en sorte que le rapport $\frac{m+n}{m-n}$ reste constant, l'une des asymptotes reste fixe, tandis que l'autre pivote autour d'un point fixe.

Dans ces conditions, que devient l'hyperbole pour $k = 0$?

Si $m = n$, le lieu du sommet A est une parabole. Déterminer sa tangente au sommet, et indiquer, suivant le signe de $\frac{k}{m}$, la partie de la courbe qui appartient au lieu.

2° Prouver que le lieu géométrique du point de concours des hauteurs du triangle ABC est une droite perpendiculaire à l'une des asymptotes de l'hyperbole précédente.

Montrer que cette droite pivote autour d'un point fixe lorsque le rapport $\frac{m+n}{m-n}$ reste constant.

Quelle est sa position pour $k = 0$ $(m - n \neq 0)$?

Quelle est sa position pour $m = n$ $(k \neq 0)$?

1081. — On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy et deux points fixes A et B sur Oy. On considère alors les paraboles passant en A et B et tangentes à Ox, et l'on demande :

1° Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe P de Oy;

2° Le lieu des foyers de ces paraboles.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC, IMP. COMTE-JACQUET.

12e Année. N° 3. Décembre 1901.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LES RÉSEAUX DE QUADRIQUES

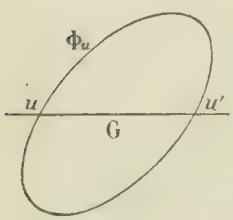
Par M. **L. Bickart**.

I. *Etant donné un réseau de quadriques F dont l'équation générale dépend linéairement de deux paramètres, le complexe des génératrices de ces quadriques coïncide avec le complexe des droites sur lesquelles ces mêmes quadriques tracent une involution.*

Les quadriques F, dont l'équation générale est

$$F = f_0 + \lambda f_1 + \mu f_2 = 0$$

ont en général huit points communs et la connaissance de sept de ces points détermine le huitième d'après un théorème connu [1]; considérons donc le réseau F comme défini par sept points donnés.



Soit G une droite susceptible de devenir une génératrice, et u un de ses points. Les quadriques F_u du réseau qui passent en u ne dépendent plus que d'un paramètre, et ont en commun une biquadratique Φ_u. Comme F_u doit pouvoir contenir G cette courbe Φ_u doit être rencontrée par G en deux points, dont l'un est u; soit u' l'autre. Les quadriques F_u coupent donc G en deux points fixes.

D'autre part, on reconnaîtrait de même que les quadriques $F_{u'}$ qui passent en u' doivent couper G en un deuxième point fixe, lequel ne peut être que u sans quoi la droite G serait entièrement contenue sur F, ce qu'on ne suppose pas. Donc enfin u et u' sont liés involutivement.

Réciproquement si sur une droite G les quadriques F tracent une involution uu', toutes celles qui passeront en u passeront également en u' et auront en commun une biquadratique Φ passant en u et u'. Leur équation dépendra d'un paramètre, et rien n'empêchera d'écrire que F contient un troisième point de G, c'est-à-dire la droite G elle-même. Donc enfin G fait partie du complexe des génératrices.

Ordre du complexe. — Assujettissons G à passer par un point u, c'est-à-dire F à passer par u. Les quadriques F_u auront en commun la courbe Φ_u et les droites G seront les génératrices du cône de sommet u et de directrice Φ_u, cône qui est en général du troisième degré. Donc le complexe K est en général du troisième ordre. Si trois des sept points donnés sont en ligne droite, autrement dit, si les quadriques F ont une droite commune A, Φ devient une cubique gauche. Le cône du complexe se décompose en un plan qui contient A et un cône du second degré. On peut dire encore que le complexe des génératrices du même système que A est du second degré.

Si les quadriques F, tout en ne dépendant que de deux paramètres ont deux droites communes A, B,

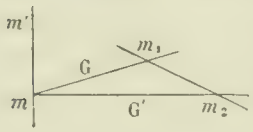
[1] Rappelons la construction du huitième point : il existe une quadrique et une seule conjuguée par rapport au tétraèdre dont les sommets sont quatre des sept points donnés, et conjuguée par rapport au triangle des trois derniers. Le pôle du plan de ce triangle par rapport à cette quadrique est le huitième point.

les quadriques F_u auront en commun deux nouvelles droites s'appuyant sur A et B et dont l'une passe en u. Le cône du complexe se décompose en trois plans dont deux contiennent respectivement A et B. Le complexe des génératrices du même système que A, B est linéaire.

II. *Sur les points doubles des involutions uu'.* — Soit m un point quelconque. Les plans polaires de ce point m par rapport aux quadriques F ont en commun un point m_1, car l'équation de ces plans polaires est de la forme

$$P_0 + \lambda P_1 + \mu P_2 = 0.$$

Donc la droite mm_1 est divisée involutivement par toutes les quadriques F et fait par suite partie du complexe K des génératrices. Soit G cette droite, elle est déterminée dès qu'on se donne le point m : nous dirons que m est l'origine de la droite G.



Se peut-il qu'un point serve d'origine à deux droites distinctes G et G' ?

S'il en est ainsi, les plans polaires de m par rapport aux quadriques F auront en commun un point m_1 de G comme on a vu, et aussi un point m_2 de G'. Donc ils passeront tous par la droite m_1m_2.

Le point m est donc sur la surface S, lieu des points dont les plans polaires par rapport aux quadriques F passent par une même droite. L'équation de S est

$$S = \begin{vmatrix} f_{[illegible]} & f'_{[illegible]} & f'_{[illegible]} \\ f_{[illegible]} & f'_{[illegible]} & f_{[illegible]} \\ f_{[illegible]} & f'_{[illegible]} & f'_{[illegible]} \end{vmatrix} = 0,$$

surface du troisième degré en général, et dont la section par un plan quelconque est la jacobienne du réseau de coniques déterminées par ce plan sur les quadriques F. Si nous coupons par un plan contenant G, la jacobienne correspondante passera par m et par m_1. Donc notre surface S contient m_1 et de même m_2 et tous les points de la droite m_1m_2. Cette surface est donc une surface réglée.

Toutes les droites qui passent par m et rencontrent m_1m_2 font partie du complexe K. Donc la surface S est le lieu des sommets des cônes du complexe qui se décomposent. D'autre part, le cône du complexe qui a pour sommet un point quelconque contient nécessairement tous les points fixes des quadriques F. Le point m n'est pas un de ces points fixes, pas plus que m_1 ni aucun point de m_1m_2. Le cône du complexe de sommet m est en général du troisième ordre et se décompose ici en un plan mm_1m_2 et un cône du second degré. Donc ce cône du second degré contient tous les points fixes des quadriques F : il est lui-même une des quadriques F. Donc enfin la surface S est le lieu des sommets des cônes du réseau.

Nous venons de reconnaître que les plans polaires d'un point m de S passent par une même droite m_1m_2 génératrice de S. Les plans polaires du point m_1 vont donc passer par une même droite, génératrice de S et passant évidemment par m. De même les plans polaires du point m_2 passent par une même droite, génératrice de S et passant par m. Mais il n'y a qu'une génératrice de S passant en m. Donc tous les plans polaires des points de m_1m_2 vont passer par cette génératrice mm'. Donc enfin les droites mm' et m_1m_2 sont conjuguées par rapport à toutes les quadriques du réseau.

En résumé, les propriétés de la surface S sont les suivantes :

La surface S est le lieu des points dont les plans polaires par rapport aux quadriques F *passent par une même droite* Δ.

Elle est réglée, et ses génératrices sont précisément les droites Δ.

Ses génératrices sont deux à deux conjuguées par rapport à toutes les quadriques F.

Elle est le lieu des sommets des cônes du réseau F.

Cette surface jouit donc par rapport au réseau F de propriétés analogues à celles de la jacobienne d'un réseau de coniques par rapport à ce réseau.

On peut déduire de là une quantité innombrable de propriétés particulières. Nous renverrons pour la marche à suivre aux articles de M. Gilbert (numéros d'août et de septembre 1900 de la *Revue*).

Démonstration analytique de la première partie. — Posons

(1)
$$F = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D,$$
$$F = f_0 + \lambda f_1 + \mu f_2 = 0;$$
$$A = A_0 + \lambda A_1 + \mu A_2,$$
$$A' = A'_0 + \lambda A'_1 + \mu A'_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Soient a, b, c, p, q, r les coordonnées d'une droite G, dont les équations sont

$$G \begin{cases} p = bz - cy, \\ q = cx - az. \end{cases}$$

L'équation aux z des points de rencontre de G et de F est

$$\varphi(a, b, c)z^2 + 2(q\varphi'_a - p\varphi'_b - c\psi(abc))z + Aq^2 + A'p^2 + 2Bpq + 2Cqr + 2C'pr + Dc^2) = 0,$$

équation où l'on a posé
$$2\varphi(x, y, z) = Ax^2 + \ldots 2B''xy,$$
$$\psi(x, y, z) = Cx + C'y + C''z,$$

et que nous écrirons sous la forme

(2)
$$\varphi z^2 + 2\theta z + \pi = 0.$$

Nous exprimerons que G est une génératrice en écrivant que cette équation est une identité par les conditions :

$$\varphi = \varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0,$$
$$\theta = \theta_0 + \lambda\theta_1 + \mu\theta_2 = 0,$$
$$\pi = \pi_0 + \lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0;$$

l'élimination de λ, μ entre ces relations donne

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui implique une relation entre a, b, c, p, q, r; elle représente le complexe K des génératrices.

Cherchons maintenant à quelles conditions les racines de l'équation (2) seront liées involutivement quels que soient λ et μ. Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe entre les coefficients une relation linéaire de la forme

(3)
$$\varphi = M\theta + N\pi,$$

où M et N ne dépendent pas de λ, μ, car alors l'équation (2) devient

$$\left(M\frac{\theta}{\pi} + N\right)z^2 + \frac{\theta}{\pi}z + 1 = 0,$$

et ses coefficients sont fonctions linéaires du seul paramètre $\frac{\theta}{\pi}$. Les racines z, z' seront liées par l'équation involutive

$$Nzz' - M(z + z') - 1 = 0.$$

Mais l'équation (3) donne, à l'identification,

$$\varphi_0 = M\theta_0 + N\pi_0,$$
$$\varphi_1 = M\theta_1 + N\pi_1,$$
$$\varphi_2 = M\theta_2 + N\pi_2,$$

et la condition pour que ce système admette la solution M, N est précisément

$$\Delta = 0.$$

NOTE SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0,$$

par M. **Maurice Cosandey**, élève de Mathématiques spéciales au collège Chaptal.

On peut résoudre cette équation par un procédé analogue à celui employé pour la résolution de l'équation du troisième degré. Posons en effet $x = y - z$, effectuons la substitution et développons ; nous aurons

$$y^5 + z^5 + 5(yz + p)(y^3 + z^3) - 5(y + z)(yz + p)(2yz + p) + q = 0,$$

et si nous astreignons y et z à vérifier la relation $yz + p = 0$, nous déterminerons y et z par les deux équations

$$y^5 + z^5 = -q \qquad \text{et} \qquad yz = -p;$$

la dernière donne $$y^5z^5 = -p^5;$$

par suite, y^5 et z^5 sont racines de l'équation du second degré

$$u^2 + qu - p^5 = 0.$$

Comme rien ne distingue y de z, nous pouvons prendre indifféremment pour y^5 l'une ou l'autre des deux racines de cette équation ; l'autre racine sera z^5 ; nous poserons

$$y^5 = -\frac{q}{2} + \varepsilon\sqrt{\frac{q^2}{4} + p^5}, \qquad z^5 = -\frac{q}{2} - \varepsilon\sqrt{\frac{q^2}{4} + p^5},$$

en désignant par $\varepsilon\sqrt{\frac{q^2}{4} + p^5}$ une des deux déterminations de la racine carrée de $\frac{q^2}{4} + p^5$.

La première de ces deux équations binomes fournit 5 valeurs pour y, et la deuxième 5 valeurs pour z ; il semble donc qu'il y ait 25 valeurs pour $y + z$; mais les valeurs de y et de z ne doivent pas être associées arbitrairement car leur produit est astreint à être égal à $-p$; la valeur de z qui correspond à une valeur donnée de y est donc parfaitement déterminée et il n'y a que 5 valeurs acceptables pour $y + z$.

Désignons par α l'une des racines imaginaires de l'équation $x^5 - 1 = 0$, les cinq racines de cette équation seront représentées par $\alpha^0 = 1$, α, α^2, α^3, α^4, et celles des équations binomes précédentes par y_0, αy_0, $\alpha^2 y_0$, $\alpha^3 y_0$, $\alpha^4 y_0$ et z_0, αz_0, $\alpha^2 z_0$, $\alpha^3 z_0$, $\alpha^4 z_0$, y_0 et z_0 étant des déterminations particulières de y et de z. Or le produit $y_0 z_0$ étant racine de l'équation binome $(yz)^5 = -p^5$ ne peut avoir pour valeur que $-p$, $-\alpha p$, $-\alpha^2 p$, $-\alpha^3 p$ ou $-\alpha^4 p$, et il est facile dans chacun de ces cas de choisir les valeurs de z que l'on doit associer à celles de y. Prenons, par exemple, le cas où $y_0 z_0 = -\alpha p$; nous devrons ajouter encore quatre fois le facteur α afin d'avoir en tout le facteur α^5 qui est égal à 1 ; les cinq valeurs de x sont donc $y_0 + \alpha^4 z_0$, $\alpha y_0 + \alpha z_0$, $\alpha^2 y_0 + \alpha^2 z_0$, $\alpha^3 y_0 + \alpha z_0$, $\alpha^4 y_0 + z_0$.

Si p et q sont réels et que $\frac{q^2}{4} + p^5$ soit positif, les valeurs de y^5 et de z^5 sont réelles ; alors, en prenant pour y_0 et z_0 les déterminations réelles de y et de z, le produit $y_0 z_0$ sera égal à $-p$; par conséquent les valeurs de x seront $y_0 + z_0$, $\alpha y_0 + \alpha^4 z_0$, $\alpha^2 y_0 + \alpha^3 z_0$, $\alpha^3 y_0 + \alpha^2 z_0$, $\alpha^4 y_0 + \alpha z_0$, et il est facile de voir que la première seule est réelle.

Si p et q sont réels et que $\frac{q^2}{4} + p^5$ soit négatif, y^5 et z^5 sont imaginaires conjuguées, par suite les déterminations de y et de z sont imaginaires conjuguées les unes des autres ; en choisissant ainsi y_0 et z_0, le produit $y_0 z_0$ est réel et nécessairement égal à $-p$; les valeurs de x sont donc encore

représentées par les expressions précédentes. Il est facile de voir cette fois qu'elles sont toutes réelles, car chacune d'elles est la somme de deux nombres imaginaires conjugués.

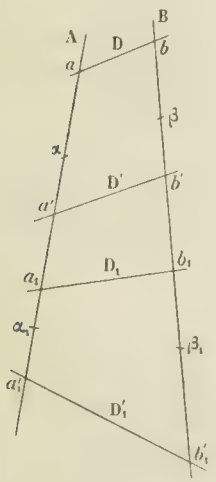
Nous ne poursuivrons pas cette discussion : il est aisé de voir ce qui se passe dans chaque cas.

GÉOMÉTRIE

1020. — *Démontrer que les quadriques* Q, *conjuguées par rapport à deux couples de droites données* (D, D′) *et* (D_1, D'_1), *ont en général quatre droites communes.*

Qu'arrive-t-il si les quatre droites données sont quatre génératrices d'un même système d'une quadrique ?

1. Il existe en général deux droites, et deux seulement, qui rencontrent les quatre proposées. Soient A et B ces deux droites, a, a', a_1, a'_1, b, b', b_1, b'_1 les points de rencontre.

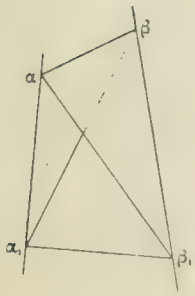


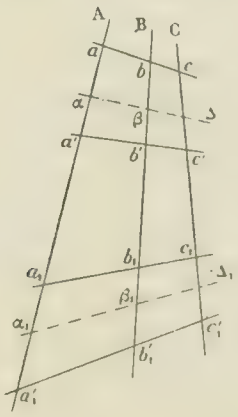
La conjuguée de A par rapport à une des quadriques Q contient les pôles des quatre plans déterminés par A et les quatre droites données. Donc ces pôles sont en ligne droite. Mais le pôle du plan AD, par exemple, est un point de D′, par hypothèse. Donc ces pôles sont quatre points des droites données. Donc la droite qui les contient n'est autre que B.

Soient alors α, α_1, β, β_1, les points doubles des involutions (a) et (b) déterminées sur A et B par les quatre droites données. Une des quadriques Q coupe A en deux points par rapport auxquels a et a' d'une part, a_1, a'_1 de l'autre, sont conjugués harmoniques. Donc ces deux points sont fixes et ne sont autres que α, α_1. De même les quadriques Q passent par β et β_1.

Le plan polaire d'un point m quelconque de A sera fixe, car il devra contenir la droite B et le conjugué m' de m dans l'involution (a). On en conclut que la conjuguée d'une droite quelconque s'appuyant sur A et B est fixe.

En particulier, la conjuguée de la droite $\alpha\beta$, qui est l'intersection des plans αB, βA, est précisément cette droite $\alpha\beta$. Donc cette droite $\alpha\beta$, confondue avec sa propre conjuguée, est tout entière contenue sur la quadrique Q, et il en est de même des droites $\alpha\beta_1$, $\beta\alpha_1$, $\alpha_1\beta_1$.





Les quadriques Q passent donc par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche.

2. Les raisonnements précédents tombent partiellement en défaut si la droite B est susceptible de plus de deux déterminations, c'est-à-dire si les quatre droites données sont quatre génératrices d'un même système d'une quadrique S.

Dans ce cas, tout ce que l'on peut dire, c'est que la conjuguée de A par rapport à Q est une droite qui rencontre les droites données et que le plan polaire d'un point m de A passe par m' conjugué de m dans l'involution (a) et par une des droites B, C,. . qui rencontrent les droites données. Autrement dit, ce plan polaire passe par m' et

touche la quadrique S. Comme il ne contient pas m, il ne contient pas A, donc il passe par la génératrice du système D, D'... qui passe en m', laquelle est fixe.

En particulier, le plan polaire du point α contiendra ce point ainsi que la génératrice $\alpha\beta$, et ce point α, ainsi que tous ceux de cette génératrice Δ, appartient à Q. De même, les points α_1, β_1, ... répartis sur la droite Δ_1, appartiennent à Q.

Ainsi donc les quadriques Q ont alors en commun les deux droites Δ, Δ_1, qui contiennent les points doubles des involutions (a), (b), ... et sont sur la quadrique S deux génératrices du système D, D'... De plus, la conjuguée d'une génératrice quelconque de ce système est fixe.

L. BICKART.

Autre solution excellente par M. Rebeix.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

979. — *On donne une ellipse* (E) *et une parabole* (P) *tangente aux axes de* (E). *Montrer que les normales à l'ellipse aux quatre points de contact des tangentes communes à la parabole sont concourantes en un point* M *de la directrice de la parabole.*

Trouver les courbes enveloppes de la polaire du centre de E, *de la tangente au sommet, de l'axe de la parabole* (P); *trouver les lieux du foyer* F, *du sommet de* (P), *et enfin l'enveloppe de la droite* MF, *lorsque la parabole* (P) *varie, le point* M *étant assujetti à rester sur un cercle concentrique à* (E).

Supposons l'ellipse rapportée à ses axes.

L'équation tangentielle générale des paraboles tangentes aux axes de coordonnées est

$$\lambda uv + \mu uw + \nu vw = 0. \tag{1}$$

L'hyperbole d'Apollonius de l'ellipse relative à un point $M(\alpha, \beta)$ a pour équation

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

Soient u, v, w les coordonnées de la tangente à (E) en un point (x, y) d'incidence d'une des normales menées de M. On a $x = -\dfrac{a^2u}{w}$, $y = -\dfrac{b^2v}{w}$. En portant ces valeurs de x, y dans l'équation de l'hyperbole d'Apollonius, nous obtenons l'équation tangentielle d'une conique tangente aux quatre tangentes aux pieds des normales,

$$f(u, v, w) = c^2uv - \beta uw + \alpha vw = 0.$$

L'identification de cette équation avec l'équation (1) étant toujours possible, les tangentes communes à l'ellipse et à une parabole (1) touchent l'ellipse aux quatre pieds des normales abaissées d'un point M. Nous prendrons pour équation tangentielle des paraboles (P), l'équation $f(u, v, w) = 0$.

Le point à l'infini de (P) dans la direction de son axe a pour équation tangentielle $f_u' = 0$, ou $\beta u - \alpha v = 0$. La parallèle à cet axe menée par l'origine est donc $\alpha x + \beta y = 0$. Il en résulte que la directrice, qui passe par l'origine (sommet d'un angle droit circonscrit), a pour équation $\beta x - \alpha y = 0$, et passe par le point M, comme l'indique l'énoncé.

Au moyen de l'équation tangentielle de (P), on obtient très facilement les droites et points remarquables de cette courbe, et par suite les enveloppes et lieux demandés, lorsque l'on a la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2. \tag{2}$$

Polaire de l'origine. — Les coordonnées u, v, w de cette droite satisfont aux équations $f_u' = 0$, $f_v' = 0$,

ou

$$c^2v - \beta w = 0, \qquad c^2u - \alpha w = 0.$$

L'élimination de α, β entre ces équations et l'équation de condition (2) donne l'enveloppe de la

droite,

$$\frac{c^4}{R^2}(u^2+v^2) - w^2 = 0;$$

c'est un cercle de rayon $\frac{c^2}{R}$, ayant l'origine pour centre.

Tangente au sommet de (P). — On obtient ces coordonnées u, v, w en exprimant qu'elle est tangente à la parabole, et qu'elle passe par le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à l'axe,

$$f(u, v, w) = 0, \qquad \alpha u + \beta v = 0.$$

En résolvant ces deux équations, et portant les valeurs de u, v, w ainsi trouvées dans $ux+vy+w=0$, on trouve pour équation ponctuelle de la tangente au sommet

$$\beta x - \alpha y - \frac{c^2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} = 0,$$

qui s'écrit, en tenant compte de la condition (2),

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} - \frac{c^2}{R^2} = 0.$$

Le point où cette droite touche son enveloppe est fourni par les équations

$$\frac{x}{-\alpha^3} = \frac{y}{\beta^3} = \frac{c^2}{-R^2}.$$

On en tire les valeurs de α, β qui, portées dans la relation $\alpha^2+\beta^2 = R^2$, donnent l'enveloppe de la tangente au sommet,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{c^2}{R}\right)^{\frac{2}{3}};$$

c'est une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Axe de (P). — C'est le diamètre conjugué de la direction perpendiculaire dans la parabole. Les coordonnées u, v, w satisfont aux équations

$$\frac{f'_u}{\alpha} = \frac{f'_v}{\beta}, \qquad f'_w = 0;$$

d'où l'équation de l'axe,

$$\alpha x - \beta y - \frac{c^2}{R^2}(\beta^2 - \alpha^2) = 0,$$

en tenant compte toutefois de l'hypothèse faite, $\alpha^2+\beta^2 = R^2$.

Nous obtenons son enveloppe en éliminant α, β entre l'équation (1) et les équations

$$\frac{x - 2\frac{c^2\alpha}{R^2}}{\alpha} = \frac{y + 2\frac{c^2\beta}{R^2}}{\beta} = \frac{\alpha x - \beta y}{-R^2}.$$

Ces équations résolues par rapport à x, y, en tenant compte des deux conditions $\alpha x + \beta y = \frac{c^2}{R^2}(\alpha^2 - \beta^2)$, et $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$, donnent

$$x = \frac{c^2\alpha(2\beta^2 + R^2)}{R^4}, \qquad y = -\frac{c^2\beta(2\alpha^2 + R^2)}{R^4};$$

de là, on déduit

$$x - y = \frac{c^2}{R^4}(\alpha - \beta)(R^2 - 2\alpha\beta) = \frac{c^2}{R^4}(\alpha - \beta)^3,$$

$$x + y = \frac{c^2}{R^4}(\alpha + \beta)(R^2 + 2\alpha\beta) = \frac{c^2}{R^4}(\alpha + \beta)^3.$$

L'élimination de α, β entre ces deux équations et l'équation de condition, qui peut s'écrire $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2R^2$, conduit à l'enveloppe de l'axe.

$$(x-y)^{\frac{2}{3}}+(x+y)^{\frac{2}{3}}=2\left(\frac{c^2}{R}\right)^{\frac{2}{3}},$$

hypocycloïde à quatre rebroussements situés sur les bissectrices des axes de coordonnées.

Foyer de (P). — C'est le pôle de la directrice. Son équation tangentielle est

$$\beta f_u-\alpha f_v=0,$$

ou

$$\alpha u-\beta v+\frac{\alpha^2+\beta^2}{c^2}w=0.$$

Les coordonnées de ce point sont par suite

$$x=\frac{c^2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{c^2\alpha}{R^2},\quad y=-\frac{c^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}=-\frac{c^2\beta}{R^2}.$$

Le lieu du foyer est le cercle $x^2+y^2-\frac{c^4}{R^2}=0$, c'est-à-dire l'enveloppe de la polaire de l'origine.

Sommet de (P). — Il suffit, pour avoir les coordonnées du sommet, de résoudre par rapport à x et y les équations de l'axe et de la tangente au sommet, trouvées plus haut. On obtient ainsi

$$x=\frac{c^2\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2}=\frac{c^2\alpha^3}{R^4},$$

$$y=-\frac{c^2\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2}=-\frac{c^2\beta^3}{R^4}.$$

Ce sont, comme on voit, les coordonnées du point où la tangente au sommet touche son enveloppe. Le lieu du sommet est donc l'hypocycloïde déjà trouvée

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{c^2}{R}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Droite MF. — L'équation de cette droite est

$$(\alpha^2+\beta^2-c^2)\beta x-(\alpha^2+\beta^2-c^2)\alpha y-2c^2\alpha\beta=0,$$

ou

$$(R^2+c^2)\beta x-(R^2-c^2)\alpha y-2c^2\alpha\beta=0.$$

Soient u, v, w les coordonnées de cette droite. On a

$$\alpha=-\frac{R^2+c^2}{2c^2}\cdot\frac{w}{u},\qquad \beta=\frac{R^2-c^2}{2c^2}\cdot\frac{w}{v},$$

ce qui permet d'obtenir immédiatement l'équation tangentielle de l'enveloppe,

$$\frac{(R^2+c^2)^2}{u^2}+\frac{(R^2-c^2)^2}{v^2}-\frac{4R^2c^4}{w^2}=0.$$

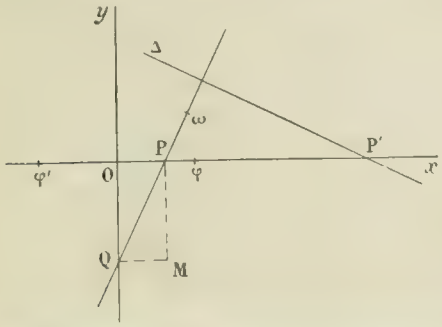
On reconnaît là l'équation d'une développée d'ellipse. Les droites MF sont donc normales à l'ellipse dont les carrés des demi-longueurs d'axes sont

$$a'^2=\frac{(R^2+c^2)^2}{4R^2},\qquad b'^2=\frac{(R^2-c^2)^2}{4R^2}.$$

On en déduit $c'^2=a'^2-b'^2=c^2$, ce qui montre que cette ellipse est homofocale à (E). C'est l'ellipse (E) elle-même si le rayon R est égal à $a+b$, ou à $a-b$.

VASNIER.

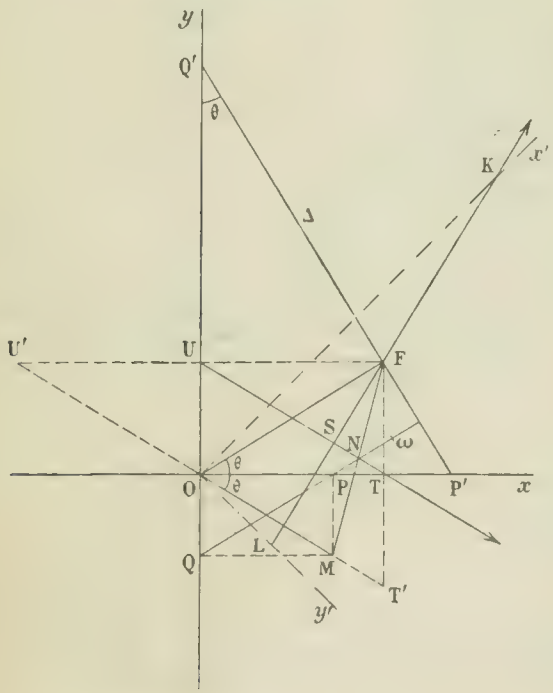
Solution géométrique. — Nous nous appuierons sur une construction géométrique du centre de l'hyperbole d'Apollonius d'une ellipse (E) de foyers φ et φ' relative à un point M.



On joint les projections P, Q du point M sur les axes. Le centre ω de l'hyperbole d'Apollonius, qui est du reste sur PQ, est le pôle par rapport à l'ellipse de la perpendiculaire Δ à PQ menée par le point P', conjugué harmonique de P par rapport à $\varphi\varphi'$ [1].

On a donc $OP.OP' = \overline{O\varphi}^2 = c^2$. Réciproquement ω étant le centre d'une hyperbole d'Apollonius, on obtient le point M, en abaissant de ω une perpendiculaire à Δ, et menant par P et Q les parallèles PM, QM aux axes de l'ellipse (E)

Cela posé, la polaire réciproque de (P) par rapport à (E) est une conique qui passe par les pôles de Ox, Oy et de la droite de l'infini par rapport à (E). C'est donc une hyperbole équilatère H_Δ passant par O et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de E, c'est-à-dire une hyperbole d'Apollonius relative à un point M du plan. Les quatre points de contact des tangentes communes à (E) et à (P) sont donc les pieds des normales abaissées à (E) du point M. De plus le centre ω de H_Δ est le pôle par rapport à (E) de la droite Δ qui joint les points P', Q', où la parabole (P) touche Ox et Oy. Nous obtenons facilement le point M par la construction que nous avons indiquée. Le foyer F est sur la perpendiculaire abaissée de O sur Δ, et la directrice, symétrique par rapport à Ox de OF qui est parallèle à PQ, est la droite OM, ce qui vérifie une propriété indiquée dans l'énoncé.



Dans les triangles semblables OPM, OFP', on a $\frac{OP}{OM} = \frac{OF}{OP'}$; d'où $OM.OF = OP.OP' = c^2$.

Donc si le point M décrit un cercle de centre O et de rayon R, le foyer F décrit un cercle concentrique de rayon $R' = \frac{c^2}{R}$, et la droite Δ est la tangente à ce cercle en F.

La tangente au sommet de (P), parallèle à la directrice OM et équidistante de cette droite et du foyer F, est la droite TU qui joint les projections de F sur Ox et Oy. Comme on a $TU = OF = R'$, c'est un segment de droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires Ox, Oy.

Son enveloppe est comme on sait, une hypocycloïde à quatre rebroussements situés sur Ox, Oy. F étant centre instantané de rotation, le point où la tangente au sommet touche son enveloppe est le pied de la perpendiculaire abaissé sur elle de F. C'est precisement le sommet S de la parabole. Le lieu de ce point se confond donc avec l'enveloppe de la tangente au sommet. L'axe de la parabole est la normale en S à l'hypocycloïde. L'enveloppe de FS est donc la développée de cette courbe. On sait que c'est une hypocycloïde. Il est du reste facile de le démontrer : les droites UT et Δ faisant l'angle θ l'une avec Ox, l'autre avec Oy sont également inclinées sur les bissectrices des axes Ox', Oy'. Il en est de même des perpendiculaires à ces droites, FS et OF. K et L étant les points où FS rencontre Ox', Oy' on a donc $KL = 2OF = 2R'$. L'enveloppe de l'axe est par suite une hypocycloïde à quatre rebroussements situés sur Ox', Oy'.

---

[1] Le centre de l'hyperbole d'Apollonius $\left(x = \frac{a^2\alpha}{c^2},\ y = -\frac{b^2\beta}{c^2}\right)$ est en effet le pôle de la droite $\alpha x - \beta y - c^2 = 0$, perpendiculaire menée par le point $\left(\frac{c^2}{\alpha}, 0\right)$ à la droite $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$.

Cherchons enfin l'enveloppe de MF. Soient N le point où MF rencontre TU, T' et U' les symétriques de F par rapport à Ox et Oy. On a $\frac{UN}{NT} = \frac{U'M}{MT'} = \frac{OF + OM}{OF - OM} = \frac{R' + R}{R - R}$. La longueur UT et le rapport $\frac{UN}{NT}$ étant constants, le lieu de N est une ellipse (E'), de demi-axes UN et NT, c'est-à-dire $\frac{R + R'}{2}\,\frac{R' - R}{2}$. Mais la normale à cette ellipse en N, qui passe par le centre instantané de rotation F est précisément la droite MF. L'enveloppe de cette droite est donc la développée de l'ellipse (E').

On peut remarquer que toutes les enveloppes et tous les lieux trouvés ne dépendant que de c^2 sont les mêmes pour toutes les ellipses homofocales à (E).

VASNIER.

Bonnes solutions analytiques : MM. R. Bouvait-Cans ; Lauvernier, élève à l'École normale supérieure ; J.-D. Dufaut, à Aiguillon ; Stoms, à Pau ; J. Maréchal.

1002. — *On donne une ellipse et deux droites rectangulaires* D, D'. *Une droite* Δ *rencontre l'ellipse aux points* R, Q.

1° *Trouver l'enveloppe de la droite* Δ, *de façon qu'il existe une conique tangente aux deux droites* D, D' *et ayant pour foyers* R, Q.

2° *Trouver l'enveloppe du cercle orthoptique de cette conique et le lieu de son centre.*

Prenons les deux droites D et D' pour axes et représentons par

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation de la conique donnée, ce qui supprime d'ailleurs l'hypothèse particulière que cette conique soit une ellipse. Puisque les points R et Q sont les foyers de la conique mobile tangente aux droites D et D', les angles $\widehat{QOx}$ et $\widehat{ROy}$ sont égaux et le produit des coefficients angulaires des deux droites OQ et OR doit être égal à 1.

Cela posé, soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite Δ ; celle des deux rayons OR et OQ s'obtient en éliminant la variable d'homogénéité entre l'équation de la droite et l'équation de la conique. Nous trouvons ainsi

$$w^2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) - 2w(Dx + Ey)(ux + vy) + F(ux + vy)^2 = 0;$$

si maintenant nous prenons comme inconnue $\frac{y}{x}$, et que nous égalions à 1 le produit des racines, nous aurons de suite l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites Δ :

$$(1) \qquad F(u^2 - v^2) + 2w(Du + Ev) + (A - C)w^2 = 0.$$

Cette équation représente une conique tangente aux deux bissectrices de l'angle des axes et indépendante du coefficient B ; cette remarque prouve que si la conique donnée varie dans un faisceau linéaire ponctuel dont les deux droites D et D' constituent une conique impropre, l'enveloppe des droites Δ ne change pas.

L'équation ponctuelle de la conique (1) est facile à obtenir ; c'est

$$F(A - C) + E^2)x^2 - F(A - C) - D^2)y^2 - 2DExy + 2DFx + 2EFy + F^2 = 0.$$

Si $F = 0$, la conique (1) se réduit à deux points : l'origine, qui est une solution exceptionnelle, et le point $x = \frac{2D}{A - C}$, $y = \frac{2E}{A - C}$, autour duquel tourne la droite Δ.

Si $F = 0$, $A = C$, la droite Δ reste parallèle à une direction fixe, la direction

$$Ex + Dy = 0.$$

Si $A = C$, la conique Δ enveloppe la parabole

$$(Ex - Dy)^2 + 2F(Dx + Ey) + F^2 = 0;$$

l'axe et la tangente au sommet sont en évidence.

Si $E = 0$, $D = 0$, la conique (1) est une hyperbole équilatère $(A - C)(x^2 - y^2) + F = 0$.

Enfin cette conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que

$$F(A - C)(D^2 - E^2) - F(A - C)^2$$

est positif, nul ou négatif.

2° Le centre de la conique variable est le milieu du segment RQ ; c'est donc le point de rencontre de la droite Δ avec le diamètre conjugué de cette droite dans la conique donnée. Désignons par P et Q les deux demi-dérivées par rapport à x et à y de l'équation de la conique donnée ; les coordonnées du centre cherché vérifieront les équations

$$ux + vy + w = 0, \qquad vP - uQ = 0 ;$$

nous en tirons $\dfrac{u}{P} = \dfrac{v}{Q} = \dfrac{w}{-(Px + Qy)}$.

Par conséquent, le lieu de ce centre est

$$(2) \qquad (A - C)(Px + Qy)^2 + 2(DP - EQ)(Px + Qy) + F(P^2 - Q^2) = 0.$$

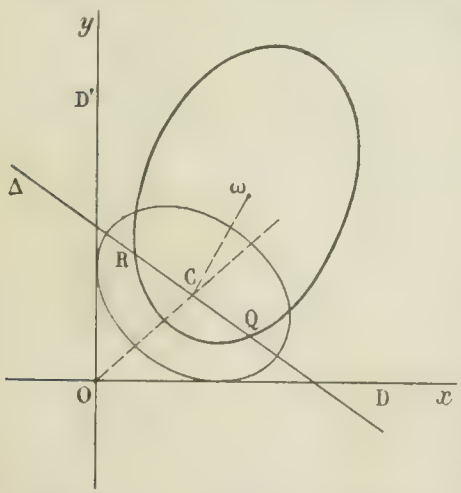
C'est l'équation d'une quartique unicursale ayant pour points doubles le centre de la conique donnée et les deux points à l'infini de cette conique.

Le cercle orthoptique de la conique variable passe au point O et son centre décrit la courbe (2) ; par conséquent son enveloppe est l'homothétique, dans le rapport 2, de la podaire de la quartique par rapport au point O. C'est aussi une courbe unicursale.

Dans les divers cas particuliers que nous avons signalés le problème se simplifie et la dernière partie peut être abordée plus aisément. Nous signalons encore comme étant intéressant et relativement facile le cas où la conique donnée est une ellipse ayant pour axes les deux droites D et D'.

E.-N. BARISIEN.

Remarques géométriques. — Des considérations géométriques très simples permettent de mettre en évidence les points fondamentaux de la solution précédente. Prenons un point Q quelconque de la conique donnée et menons la droite symétrique de OQ par rapport aux bissectrices de l'angle des axes ; elle coupe la conique en deux points R et R' ; par conséquent, il passe deux droites Δ par le point Q, les droites QR et QR' ; il en résulte que l'enveloppe de ces droites est de seconde classe. Pour que les points R et R' soient confondus, il faut que la droite OQ soit la symétrique par rapport aux bissectrices de l'une des tangentes à la conique donnée menées par le point O. Ces deux droites OQ_1Q_2, OQ_3Q_4 coupent la conique en quatre points qui sont les points de rencontre de cette conique avec l'enveloppe des droites Δ. Les pôles des deux sécantes communes par rapport à la conique enveloppe sont les points de rencontre de la conique donnée avec la polaire du point O par rapport à cette conique. En outre, si l'on cherche les droites Δ qui passent en O, on voit de suite que OQ et OR devant être confondues, il faut que ces droites coïncident avec les bissectrices de l'angle des axes.



Soient ω le centre de la conique donnée et C le milieu de RQ. La droite ωC décrit un faisceau du premier ordre et la droite Δ un faisceau du second ordre ; de plus la correspondance entre ωC et Δ est évidemment (1, 2). Il en résulte que le lieu du point C est du quatrième ordre et a un point double au point ω. De plus, par chacun des points à l'infini de la conique donnée, A ou B, passent deux droites Δ ; le rayon correspondant dans le faisceau linéaire est ωA ou ωB ; chacun de ces points est donc un point double et la quartique est unicursale.

Bonnes solutions géométriques de MM. Tribier et Vasnier.

Bonnes solutions analytiques de MM. G. Fauvernier et R. Boivait.

1003. — *On considère un cylindre parabolique et une normale à ce cylindre. On demande le lieu des foyers des paraboles obtenues en coupant le cylindre par des plans qui tournent autour de la normale.*

Prenons pour plan des xy le plan de la section droite passant par la normale choisie, pour axe des y cette normale et pour axe des x la tangente au pied de la normale, l'axe des z étant la génératrice du cylindre en ce point. L'équation du cylindre parabolique sera $(y - mx)^2 - 2ay = 0$, cette équation étant aussi celle de la section droite dans le plan des xy.

Le plan sécant, qui tourne autour de l'axe des y, aura pour équation $z - \lambda x = 0$, et les directions isotropes de ce plan auront pour projection sur le plan des xy, $(\lambda^2 + 1)x^2 + y^2 = 0$. Cela posé, soient α, β, γ les coordonnées du foyer de la section faite dans le cylindre par le plan considéré ; nous avons d'abord $\gamma - \lambda\alpha = 0$, puis, les tangentes à cette section menées par le point (α, β, γ) ont pour projections sur le plan des xy des parallèles aux deux directions imaginaires trouvées antérieurement ; d'autre part, ces deux projections sont les tangentes à la section droite menées par le point (α, β) ; elles ont donc pour équation quadratique

$$[(\beta - m\alpha)^2 - 2a\beta][(y - mx)^2 - 2ay] - [-mx(\beta - m\alpha) + y(\beta - m\alpha - a) + \ldots]^2 = 0,$$

et leurs directions sont fournies par

$$(y - mx)^2[(\beta - m\alpha)^2 - 2a\beta] - [mx(\beta - m\alpha) - y(\beta - m\alpha - a)]^2 = 0,$$

ou

$$-2\beta m^2x^2 + 2mxy(\beta + m\alpha) - (2m\alpha + a)y^2 = 0.$$

En identifiant cette équation avec $(\lambda^2 + 1)x^2 + y^2 = 0$, nous trouvons d'abord $\beta + m\alpha = 0$, qui exprime que le foyer se meut dans un plan perpendiculaire à xOy et passant par l'origine ; puis,

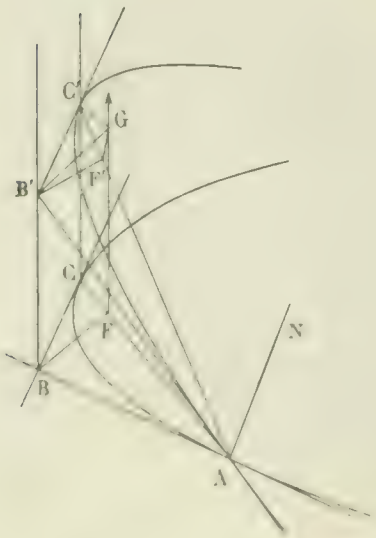
$$(\lambda^2 + 1)(2m\alpha + a^2) - 2m^2\beta = 0.$$

En remplaçant dans cette équation λ par $\frac{\gamma}{\alpha}$, nous avons un second lieu du foyer :

$$(\alpha^2 + \gamma^2)(2m\alpha + a^2) - 2m^2\alpha^2\beta = 0.$$

Le lieu demandé est donc la section de cette surface par le plan $\beta + m\alpha = 0$. C'est une cubique circulaire ayant un point double isolé à l'origine des coordonnées.

Solution géométrique. — Soient AB et AN la tangente et la normale à la section droite du cylindre parabolique et BC la tangente perpendiculaire à AB.



Coupons le cylindre par un plan passant par AN et soient AB' la tangente à la section qui se projette sur AB et B'C' la tangente à cette section perpendiculaire à AB' ; B'C' et BC sont parallèles à AN et, par suite, parallèles entre elles ; d'autre part, BC est la projection de B'C', le point de contact C' se meut sur une perpendiculaire au plan de la section droite, ainsi que le point B', où se coupent les deux tangentes rectangulaires.

Nous aurons les foyers, F et F' des deux paraboles en abaissant de B et de B' des perpendiculaires sur AC et AC'. Le foyer F' est donc toujours situé dans le plan ACC' ; c'est un premier lieu de ce point.

Abaissons du point B', B'G perpendiculaire sur ce plan, B'G est parallèle à BF et le point G se meut sur une parallèle aux génératrices du cylindre, FG ; le point F' s'obtient alors en abaissant du point G, GF' perpendiculaire sur AC'. Or si au point C' on mène dans le plan ACC' une perpendiculaire à AC', elle enveloppe une parabole ayant pour foyer le point A et pour tangente au sommet la droite CC. La droite GF', parallèle à celle-ci, enveloppe donc une parabole qu'on obtient en faisant subir à la précédente une translation C'G égale à CF. Le lieu du point F' est donc dans le plan ACC', la podaire de cette parabole par rapport au point A.

R. GUERITHAULT, élève de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

Bonnes solutions analytiques : MM. J. MARCHAL, CASS, à Versailles ; J.-D. DEFAUT, à Aiguillon.

1011. — *On considère une droite Z'Z et un plan P. Étudier le complexe des droites D telles que le point d'intersection de la droite D et du plan P soit le pied de la perpendiculaire commune aux deux droites Z'Z et D.*

Prenons la droite donnée Z'Z comme axe des z, pour origine le point où elle perce le plan P et pour axes des x et des y deux autres axes rectangulaires et perpendiculaires à Z'Z. Les équations du plan P et d'une droite D sont alors de la forme

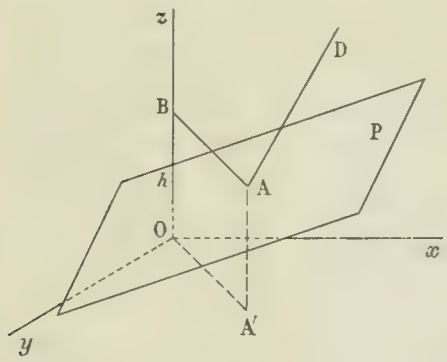
$$(P) \qquad ax + by + cz = 0,$$

$$(D) \qquad \frac{x - x'}{x' - x''} = \frac{y - y'}{y' - y''} = \frac{z - z'}{z' - z''} = \rho.$$

Les six quantités $\alpha = x' - x''$, $\beta = y' - y''$, $\gamma = z' - z''$,

$$l = y'z'' - z'y'', \qquad m = z'x'' - x'z'', \qquad n = x'y'' - y'x'',$$

sont les coordonnées pluckériennes de la droite.



Les coordonnées du point d'intersection A de D et P ont pour expressions

$$(A) \qquad x = x' + \alpha\rho, \quad y = y' + \beta\rho, \quad z = z' + \gamma\rho,$$

avec
$$\rho = -\frac{ax' + by' + cz'}{a\alpha + b\beta + c\gamma}.$$

La perpendiculaire commune AB à D et à ZZ' est contenue dans le plan mené par A perpendiculairement à D. Ce plan a pour équation

$$\alpha(x - x' - \alpha\rho) + \beta(y - y' - \beta\rho) + \gamma(z - z' - \gamma\rho) = 0.$$

La cote du point B où ce plan coupe l'axe des z est

$$h = \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \rho(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{\gamma}.$$

Mais la perpendiculaire commune à D et à ZZ' est parallèle au plan xOy; les z des points A et B sont donc égaux, et l'on a

$$\frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \rho(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{\gamma} = z' + \gamma\rho,$$

et, par suite,
$$\alpha x' + \beta y' + \rho(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

ou enfin, en remplaçant ρ par sa valeur,

$$(1) \qquad (a\alpha + b\beta + c\gamma)(\alpha x' + \beta y') - (ax' + by' + cz')(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Cette relation développée s'écrit

$$\alpha[b(\alpha y' - \beta x') + c(\alpha z' - \gamma x')] + \beta[c(\beta z' - \gamma y') + a(\beta x' - \alpha y')] = 0,$$

et comme

$$\alpha y' - \beta x' = x'y'' - x''y' = n, \qquad \alpha z' - \gamma x' = x'z'' - x''z' = -m, \qquad \beta z' - \gamma y' = y'z'' - z''y' = l,$$

il vient finalement

$$(2) \qquad \alpha(bn - cm) + \beta(cl - an) = 0.$$

C'est l'équation du complexe formé par les droites (D); on voit immédiatement que ce complexe est du second ordre.

Si α et β sont nuls, cette équation est vérifiée. Le complexe renferme donc toutes les droites parallèles à Oz; le point à l'infini sur Oz est un point singulier.

Si l, m et n sont nuls, l'équation (2) est encore vérifiée; par conséquent le complexe renferme toutes les droites qui passent au point O; ce point est encore un point singulier.

Enfin, si $\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$, l'équation (2) est identiquement vérifiée aussi. Cela veut dire que le complexe renferme toutes les droites du plan P; ce plan est un plan singulier. Il est facile de voir aussi

que le plan de l'infini est un plan singulier dont toutes les droites font partie du complexe, car, pour de pareilles droites, α, β, γ deviennent nuls.

Le cône du complexe s'obtient en fixant les nombres x', y', z' et faisant varier x'', y'', z'' : si nous remplaçons ces derniers par x, y, z, nous avons évidemment le lieu des droites qui passent au point (x', y', z'). Ce lieu est le cône

$$(x - x')^2(by' + cz') + (y - y')^2(ax' + cz') - cy'(y - y')(z - z')$$
$$- cx'(z - z')(x - x') - (bx' + ay')(x - x')(y - y') = 0.$$

En portant les axes parallèlement à eux-mêmes au point (x', y', z'), l'équation se simplifie et devient

$$(3) \qquad (by' + cz')x^2 + (ax' + cz')y^2 - cy'yz - cx'zx - (bx' + ay')xy = 0.$$

Cette équation est identiquement vérifiée pour $x' = y' = z' = 0$, ce qui est d'accord avec ce fait déjà constaté que toutes les droites passant à l'origine sont les droites du complexe. La précédente est identiquement nulle pour le point à l'infini sur Oz $(x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 1, \quad t' = 0)$.

Si on écrit que le cône se décompose, c'est-à-dire que le discriminant de l'équation (3) est nul, on trouve

$$(x^2 + y^2)(ax' + by' + cz') = 0.$$

Ce résultat montre que pour chaque point du plan P le cône se décompose en deux plans ; ce fait se manifeste bien plus clairement si l'on remonte à l'équation (1) : il est visible alors que pour tout point du plan P, la relation (1) se décompose en deux autres à chacune desquelles correspond un plan : l'une, la relation $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ donne le plan P ; l'autre, la relation $\alpha x' + \beta y' = 0$, donne le plan $x'(x - x') + y'(y - y') = 0$, qui est parallèle à Oz et perpendiculaire au plan mené par Oz et par le point (x', y', z'). Enfin le cône du complexe se décompose encore pour tous les points de Oz.

Cherchons maintenant la courbe du complexe située dans un plan quelconque

$$(P') \qquad u'x + v'y + w'z + 1 = 0.$$

Une droite de ce plan peut être considérée comme l'intersection du plan P' et d'un autre plan P'',

$$u''x + v''y + w''z + 1 = 0.$$

On a alors :

$$\alpha = w'v'' - w''v', \qquad l = u' - u'',$$
$$\beta = u'w'' - u''w', \qquad m = v' - v'',$$
$$\gamma = v'u'' - v''u', \qquad n = w' - w''.$$

Considérons u', v', w' comme constants, u'', v'', w'' comme variables, et posons $u'' = u$, $v'' = v$, $w'' = w$. L'équation (2) donnera

$$(4) \qquad w'v - wv'(bw' - w) - c(v' - v)^2 + (uw' - uw')(c(u' - u) - a(w' - w)) = 0.$$

Cette équation étant du deuxième degré en u, v, w définit une conique du plan P'. En outre, elle est vérifiée lorsque u, v, w tendent vers 0, c'est-à-dire lorsque le plan P'' s'éloigne à l'infini ; il s'ensuit que la courbe (4) est tangente à la droite de l'infini du plan P'. C'est donc une parabole.

Ce dernier résultat découle de ce qui a été dit plus haut sur les droites de l'infini.

Le plan passant par l'origine et par la droite (P', P'') a pour équation

$$lx + my + nz = 0.$$

D'ailleurs $\qquad u' = u' - l, \qquad v' = v' - m, \qquad w' = w' - n.$

L'équation (4) donne alors

$$(v'n - w'm)(bn - cm) + (w'l - u'n)(cl - an) = 0,$$

ou

$$cn'(l^2 + m^2) + (au' + bv')n^2 - (cv' + bw')mn - (aw' + cu')ln = 0.$$

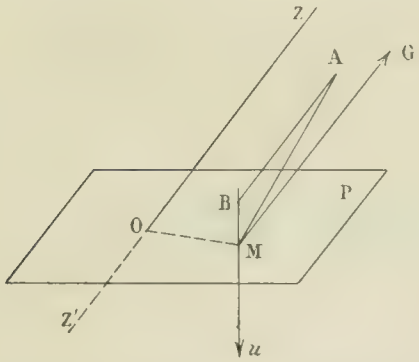
C'est l'équation tangentielle du cône ayant pour sommet l'origine et passant par la conique du complexe.

Ce cône se décompose si l'on a $w' = 0$ ou $(cv' + bw')^2 + (aw' + cu')^2 = 0$. La seconde condition

n'est réalisable avec des nombres réels que si l'on prend $\frac{u}{a} = \frac{v}{b} = \frac{w}{c}$. Les plans singuliers ordinaires du complexe sont donc les plans parallèles à Oz et les plans parallèles au plan P.

J.-D. DUFAUT, à Aiguillon.

Solution géométrique. — La solution géométrique est beaucoup plus intéressante. Cherchons d'abord les droites du complexe qui passent en un point A de l'espace; pour cela, menons la droite AB parallèle à Z'Z et appelons AM une droite quelconque du complexe passant en A.



Le pied de la perpendiculaire commune à OZ et à AM sur cette dernière droite s'obtient en projetant la droite OZ sur le plan ABM; cette projection G est une parallèle à OZ qui doit rencontrer AM en un point M du plan P. Or le lieu de MG est un cylindre de révolution ayant pour génératrices principales et opposées les deux droites OZ et AB. Donc le lieu du point M sur le plan P est une ellipse ayant pour diamètre OB; par conséquent, le cône du complexe ayant pour sommet le point A est un cône du second ordre ayant pour base une ellipse sur le plan P. Toutes ces ellipses sont homothétiques, car ce sont des projections obliques de cercles situées dans des plans parallèles et faites parallèlement à OZ sur le plan P.

Ce cône ne se décompose évidemment jamais, tant que le point A reste à distance finie et n'est situé ni sur OZ ni dans le plan P.

Si le point A reste sur OZ, le cylindre se réduit à deux plans isotropes, et le cône se décompose en ces deux plans; la seule droite réelle du complexe qui passe en A est la droite OZ.

Si le point A va à l'infini sur OZ, le cône devient un cylindre de révolution quelconque ayant OZ pour génératrice; il est donc indéterminé et ce point est un point singulier. Même résultat pour le point O.

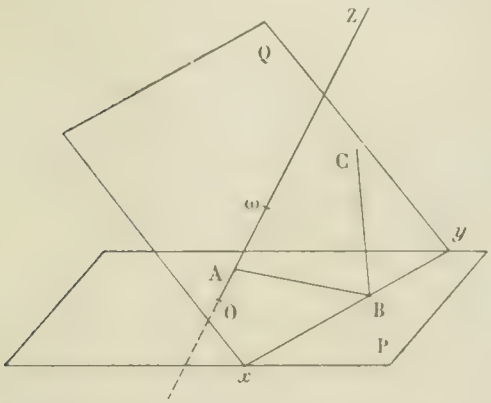
Enfin si le point A vient dans le plan P, le cône du complexe se décompose évidemment en le plan P et le plan perpendiculaire au plan ZOA mené parallèlement à OZ.

Quand le point A s'éloigne à l'infini dans une direction quelconque, le cylindre de révolution devient un plan et le plan de l'infini; par conséquent le cône du complexe se décompose en deux plans, dont le plan de l'infini.

L'examen sommaire du cône du complexe montre de suite que toutes les droites parallèles à OZ, celles qui passent en O et enfin celles qui sont à l'infini font partie du complexe.

Quant à la conique du complexe située dans un plan quelconque Q, il est évident maintenant que c'est une parabole tangente à la trace du plan Q sur le plan P.

Cela peut d'ailleurs se voir directement. Soient en effet Q le plan envisagé, xy sa trace sur le plan P, O et ω les traces de OZ sur les plans P et Q, et A un point quelconque de OZ. Menons par le point A un plan perpendiculaire à OZ et soit B son point de rencontre avec xy; par le point B menons un plan π perpendiculaire à AB et soit BC sa trace sur le plan Q, BC est la seconde droite du complexe située dans le plan Q et passant en B. Il s'agit d'avoir l'enveloppe de cette droite. Pour cela, remarquons que si nous projetons le tout orthogonalement sur un plan quelconque perpendiculaire à OZ, la trace du plan π enveloppe une parabole ayant le point homologue de A pour foyer et la droite homologue de xy pour tangente au sommet. Le plan π enveloppe donc un cylindre parabolique parallèle à OZ et ayant cette parabole pour section droite. L'enveloppe de la droite BC est la trace de ce cylindre sur le plan Q.



La courbe du complexe est donc une vraie parabole tant que le plan Q n'est parallèle ni à OZ, ni au plan P. Si le plan Q est parallèle à OZ, cette courbe se décompose en deux points : le point à l'infini sur OZ et le point de rencontre de la trace du plan Q sur le plan P avec le plan mené par OZ perpendiculairement au plan Q.

Si le plan Q est parallèle au plan P, la courbe se décompose en deux points imaginaires à l'infini, les points communs à toutes les ellipses qui servent de bases aux cônes du complexe.

Ces derniers résultats ont été rendus évidents par l'étude géométrique du cône du complexe.

Autre solution : M. R. Bouvait.

PHYSIQUE

974. — *Un microscope supposé réduit à deux lentilles simples est caractérisé par les données suivantes :*

Distance des deux lentilles ou longueur de l'instrument . . . . . $b = 240^{mm}$.

Distance focale de l'objectif . . . . . $g = 6^{mm},4$.

Distance focale de l'oculaire . . . . . $f = 15^{mm}$.

Distance à laquelle regarde l'observateur . . . . . $\Delta = 250^{mm}$.

Calculer la puissance et le grossissement de l'instrument.

On sait que la puissance de l'instrument est le produit de la puissance de l'oculaire par le grossissement de l'objectif : $P = pg$.

La puissance de l'oculaire a pour expression rigoureuse

$$p = \frac{1}{f} + \frac{f-a}{\Delta f},$$

où a désigne la distance de l'oculaire à l'œil et, par suite, à l'anneau oculaire.

On doit donc avoir $\frac{1}{240} - \frac{1}{a} = \frac{1}{15}$, d'où $a = 16$ et, en dioptries, $p = 66,4$.

On pourrait d'ailleurs, sans inconvénient, négliger le second terme de l'expression de p, ce qui fournirait la valeur suffisamment approchée : $p = 66,7$.

Pour avoir g, il faut calculer la position des images et celle de l'objet. Le cercle oculaire étant à 16^{mm} de l'oculaire, l'image virtuelle doit se former à $250 - 16 = 234^{mm}$ de la même lentille et la distance x de l'image objective est donnée par la relation $\frac{1}{x} - \frac{1}{234} = \frac{1}{15}$, d'où $x = 14,1$. Cette image objective est donc à une distance de l'objectif $240 - 14,1 = 225,9$ et la distance y de l'objet est donnée par la relation $\frac{1}{y} - \frac{1}{225,9} = \frac{1}{6,4}$. Enfin le grossissement g est égal au rapport $\frac{225,9}{y}$ et le calcul donne

$$g = 34,3, \text{ d'où } P = 2277,5.$$

Pour calculer cette puissance, on pourrait encore prendre simplement l'inverse de la distance focale du système constitué par le microscope tout entier ; d'après une formule connue, cet inverse est représenté par la formule

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \frac{b}{fg};$$

si on y introduit les valeurs numériques en prenant le mètre pour unité, on trouve 2277,1, valeur sensiblement égale à la précédente.

Le grossissement de l'instrument est le produit de sa puissance par la distance à laquelle on regarde à l'œil nu et que nous supposerons de 250^{mm}. On a donc $G = P \times 0,25 = 569$.

Autre solution : M. J. Lemoine.

QUESTIONS PROPOSÉES

1082. — On considère un triangle ABC dont le côté BC est fixe et dont le cercle conjugué a un rayon constant. Trouver le lieu du point A et construire ce lieu.

E. N. Barisien.

1083. — La podaire de la parabole (P)

$$(P) \qquad (ax+by)^2 - 4ab(bx+ay) + 4a^2b^2 = 0$$

par rapport à l'origine des coordonnées est une strophoïde oblique (S). Calculer les coordonnées du point de rencontre de cette courbe avec son asymptote et trouver le lieu de ce point lorsque $ab = c^{te}$.

Dans les mêmes conditions, trouver le lieu du foyer de la parabole (P) et le lieu des points de contact des courbes (P) et (S).

E.-N. Barisien.

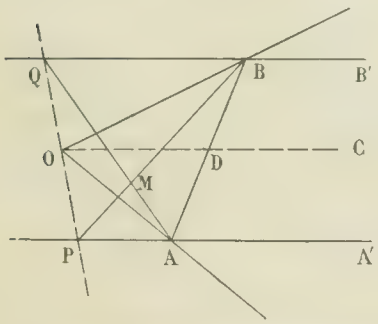
DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE

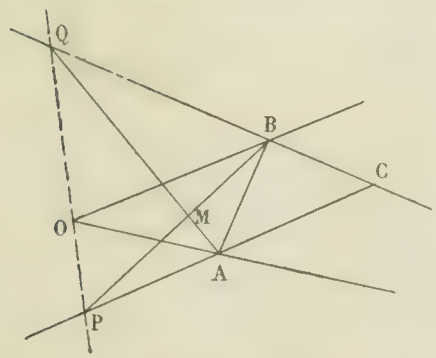
1025. — *Pour construire une parabole tangente à deux droites données,* OA *et* OB, *en* A *et* B, *on mène par* A *et* B *les parallèles* AA′ *et* BB′ *à la médiane du triangle* OAB *issue de* O; *puis, on fait tourner une droite autour de* O, *qui rencontre* AA′ *en* P, BB′ *en* Q; *on joint* AQ *et* BP; *le point de rencontre* M *de ces deux droites décrit la parabole. De plus la tangente en* M *est parallèle à* PQ.

Donner une démonstration géométrique et étendre cette construction convenablement modifiée au cas d'une conique tangente à deux droites données OA *et* OB *en* A *et* B *et passant en un troisième point donné* C.

On sait qu'il y a une parabole et une seule tangente en A et B aux deux droites OA et OB et que le diamètre relatif à la direction AB est la médiane OC du triangle OAB. Menons alors les deux droites AA′ et BB′ parallèles à OC et coupons-les par une sécante quelconque OPQ tournant autour du point O; les deux séries P et Q sont homographiques ainsi que les faisceaux AQ et BP; le lieu du point M, où les rayons AQ et BP se coupent, est donc une conique qui passe aux deux points A et B. Il est facile de voir que les tangentes en A et B à cette conique sont les droites OA et OB et qu'elle passe en outre au point à l'infini sur OC; par conséquent, elle coïncide avec la parabole proposée.



Pour obtenir la tangente en M, il suffit de considérer le quadrilatère inscrit dans la parabole et ayant pour côtés consécutifs MB, BB′, A′A et AM : les côtés opposés de ce quadrilatère et les tangentes aux sommets opposés se coupent en quatre points en ligne droite; trois de ces points sont O, P et Q; le quatrième est le point de rencontre de la droite OPQ avec la droite de l'infini; donc la tangente en M est parallèle à PQ.



Le même raisonnement s'applique à la construction d'une conique tangente en A et B aux droites OA et OB et passant par un troisième point donné C. Il suffit de remplacer les deux droites AA′ et BB′ par AC et BC et la droite de l'infini par la tangente en C. Cette tangente, que l'on construira préalablement, s'obtient aisément par une application simple du théorème de Pascal.

P. TRIBIER et CANS.

Bonnes solutions : MM. Bouvait, Laurenge et Rebiix.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1010. — *Soit* M *un point variable sur une ellipse dont les axes sont* AA′ *et* BB′. *Trouver :*
1° *L'enveloppe de l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles* MAA′ *et* MBB′ ;
2° *Le lieu du second point commun à ces cercles.*

Rapportons l'ellipse à ses axes et soient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de cette ellipse, et $a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$ les coordonnées du point M. Le cercle qui passe en A et A′ a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - a^2 = 0.$$

Écrivons qu'il passe au point M ; nous aurons $2\lambda = -\frac{c^2}{b} \sin \varphi$; par suite l'équation du cercle indiqué est

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2}{b} \sin \varphi\, y - a^2 = 0.$$

Nous trouverons de même, pour l'équation du cercle circonscrit au triangle MBB′.

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2}{a} \cos \varphi\, x - b^2 = 0.$$

L'équation de l'axe radical de ces deux cercles est immédiate ; c'est

$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} - 1 = 0.$$

Nous reconnaissons l'équation de la tangente à l'ellipse au point M ; par conséquent cette droite enveloppe l'ellipse.

2° Pour avoir le second point de rencontre des deux cercles et le séparer du point M, nous chercherons les abscisses des points de rencontre de cet axe radical avec l'un des cercles, nous supprimerons la solution $x = a \cos \varphi$, et nous éliminerons φ entre l'équation de l'axe radical et la nouvelle équation ainsi obtenue. Prenons le second cercle, par exemple, et remplaçons y par $\frac{b}{a} \frac{a - x \cos \varphi}{\sin \varphi}$, nous aurons l'équation du second degré

$$\frac{b^2(a - x \cos \varphi)^2}{a^2 \sin^2 \varphi} + x^2 - \frac{c^2 \cos \varphi}{a} x - b^2 = 0,$$

ou

$$(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)\, x^2 - ax \cos \varphi (a^2 - ab^2 \cos \varphi)(x - a \cos \varphi) = 0 ;$$

sous cette forme, la solution $x = a \cos \varphi$ est évidente et s'enlève immédiatement : il reste

$$(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)\, x - ab^2 \cos \varphi = 0.$$

Multiplions le terme constant $-ab^2 \cos \varphi$ par $\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b}$, pour obtenir une équation homogène en x et y : nous aurons finalement $ax \sin \varphi - by \cos \varphi = 0$.

Cette équation représente la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente à l'ellipse ; le lieu est donc la podaire de l'ellipse par rapport à l'origine. Son équation s'obtient facilement, car la dernière relation trouvée nous donne

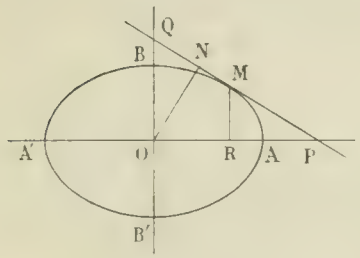
$$\frac{\cos \varphi}{ax} = \frac{\sin \varphi}{by} = \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}} ;$$

en portant ces valeurs dans l'équation de la tangente à l'ellipse et élevant ensuite au carré pour faire disparaître le radical, nous obtenons l'équation du lieu

$$x^2 + y^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

Cette courbe se construit sans peine à l'aide des coordonnées polaires et nous ne nous y arrêterons pas.

Démonstration géométrique. — Tous ces résultats peuvent s'apercevoir géométriquement d'une façon très simple. Soient en effet P et Q les points de rencontre de la tangente à l'ellipse avec les axes de cette ligne, R la projection du point M sur le grand axe. Nous savons que R est le conjugué harmonique de P par rapport aux points A et A'; nous avons donc



$$\frac{2}{PR} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PA'} \qquad \text{ou} \qquad 2PA.PA' = PR\,(PA + PA');$$

puis, comme $PA + PA' = 2PO$, $PA.PA' = PO.PR$.

Abaissons alors du centre ON de l'ellipse la perpendiculaire ON; le quadrilatère ORMN est inscriptible et nous pouvons écrire

$$PO.PR = PM.PN;$$

donc

$$PM.PN = PA.PA';$$

par conséquent les quatre points A, A' M, N sont sur un cercle. Nous démontrerions de même que les quatre points B, B', M et N sont sur un cercle. Les deux cercles de l'énoncé se coupent donc aux deux points M et N. Tout ce qui a été dit s'en suit.

E.-N. BARISIEN.

Très bonne solution : MM. Barbaroux et Portalier, lycée d'Alger.

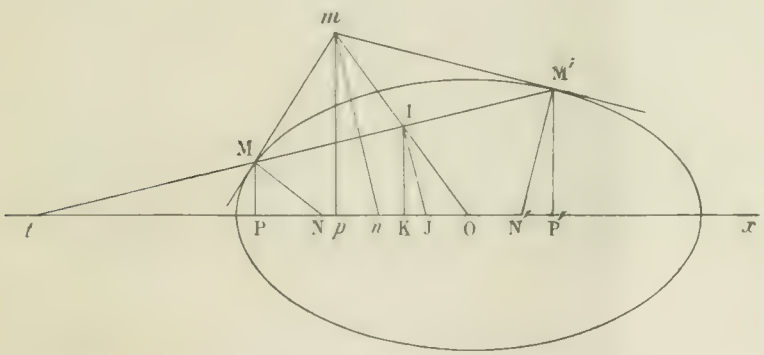
Bonnes solutions : MM. J. Marchal ; P. Tribier ; Cans ; Souls ; T. Lemoyne.

Autre solution géométrique. — La solution du problème est immédiate si l'on se reporte au théorème suivant dû à Laguerre :

En deux points d'une ellipse on mène les normales : la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde qui joint les deux points passe par les milieux des segments interceptés entre les normales par chacun des axes.

Voici une démonstration géométrique de cette proposition.

m étant un point quelconque du plan, désignons par p sa projection sur le grand axe Ox de l'ellipse, par t et n les points où la polaire de m et la perpendiculaire abaissée de m sur cette droite rencontrent respectivement Ox.



On a

$$\overline{Op}.\overline{Ot} = a^2, \qquad \overline{On}.\overline{Ot} = c^2,$$

d'où

$$\overline{On} = \frac{c^2}{a^2}\cdot\overline{Op}.$$

Nous pouvons, en conservant les notations, récrire cette formule pour les normales aux points M, M' de contact des tangentes issues de m :

$$\overline{ON} = \frac{c^2}{a^2}\cdot\overline{OP}, \qquad \overline{ON'} = \frac{c^2}{a^2}\cdot\overline{OP'}.$$

Soient alors J le point où la perpendiculaire élevée sur le milieu I de MM' rencontre l'axe Ox, et K la projection de I sur cet axe. Les points O, I, m sont en ligne droite, et l'on a

$$\frac{OJ}{Oa} = \frac{OI}{Oa} = \frac{OK}{Op}.$$

Donc

$$\overline{OJ} = \frac{On}{Op}\cdot\overline{OK} = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{\overline{OP} + \overline{OP'}}{2} = \frac{ON + \overline{ON'}}{2},$$

ce qui démontre la proposition.

Revenons maintenant à la question proposée.

Les centres ω_1, ω_2 des cercles MBB', MAA' sont les points de rencontre des axes et des perpendiculaires élevées sur les milieux de MB, MA respectivement. En vertu du théorème de Laguerre, ω_1 et ω_2 sont les milieux des segments ON_1 et ON_2 déterminés sur les axes par la normale en M. L'axe radical des deux cercles coïncide donc avec la tangente en M à l'ellipse, qui constitue ainsi l'enveloppe demandée. En outre le symétrique de M par rapport à $\omega_1\omega_2$ est la projection du point O sur la tangente en M, en sorte que le lieu du deuxième point commun aux deux cercles n'est autre que la podaire de l'ellipse par rapport à son centre.

VASNIER.

1018. — *On considère une parabole* (P) *et un point* A. *De* A *on mène les deux tangentes* AD, AE *à la courbe* (D, E *sont les points de contact*), *puis on considère le cercle* (C) *circonscrit au triangle* ADE *et l'hyperbole équilatère* (H) *passant par* A, D, E *et par le sommet de la parabole.*

Lieu de l'intersection M *de* (C) *et* (H) *quand* A *décrit une droite.*

Enveloppe de AM *dans les mêmes conditions.*

Soit $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, et α, β les coordonnées du point A. Nous allons former l'équation de l'hyperbole (H). La droite DE a pour équation $\beta y - px - p\alpha = 0$: par suite, l'équation générale des coniques passant par les points D et E est

$$y^2 - 2px + (\beta y - px - p\alpha)(ux + vy + w) = 0.$$

Écrivons que cette courbe est une hyperbole équilatère passant par l'origine et par le point A ; nous obtenons successivement

$$1 + \beta v - pu = 0, \qquad w = 0, \qquad 1 + u\alpha + v\beta + w = 0.$$

On en déduit aisément $u = 0$, $v = -\dfrac{1}{\beta}$, $w = 0$, et par suite l'équation de l'hyperbole (H) s'écrit

$$\beta(y^2 - 2px) - y(\beta y - px - p\alpha) = 0.$$

ou

$$(1) \qquad xy - 2\beta x + \alpha y = 0.$$

Les asymptotes de cette courbe sont parallèles aux axes de coordonnées, et les axes de l'hyperbole (H) sont parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées. Comme les droites DE et AM sont également inclinées sur les axes de l'hyperbole, le produit de leurs coefficients angulaires est égal à 1 ; il en résulte que le coefficient angulaire de AM est égal à $\dfrac{\beta}{p}$, et que l'équation de AM est

$$(2) \qquad y - \beta = \frac{\beta}{p}(x - \alpha).$$

La droite (2) rencontre la courbe (1) aux points A et M. Éliminons y entre les deux équations : nous obtenons une équation du deuxième degré par rapport à x, qui admet la racine $x = \alpha$, abscisse du point A et la racine $x = p - \alpha$, abscisse du point M. Remplaçons x par $p - \alpha$ dans l'équation (2), nous obtenons l'ordonnée du point M, qui est égale à $\dfrac{2\beta(p - \alpha)}{p}$.

Les coordonnées du point M sont donc

$$(3) \qquad x = p - \alpha, \qquad y = \frac{2\beta(p - \alpha)}{p}.$$

Supposons que le point A décrive la droite $Ax + By + C = 0$. Le lieu du point M s'obtiendra en éliminant α et β entre les équations (3) et la suivante :

$$(4) \qquad A\alpha + B\beta + C = 0.$$

Des équations (3), on tire $\alpha = p - x$, $\beta = \dfrac{py}{2x}$; et en portant ces valeurs dans l'équation (4), on obtient

$$2Ax^2 - 2x(Ap + C) + Bpy = 0.$$

Cette équation représente une parabole dont l'axe est parallèle à Oy.

Cherchons maintenant l'enveloppe de la droite AM dont l'équation est $y - \beta = \dfrac{\beta}{p}(x - \alpha)$. Remplaçons dans cette équation α par $-\dfrac{B\beta + C}{A}$; elle devient

$$B\beta^2 + \beta(Ax + Ap + C) - Apy = 0 ;$$

pour avoir l'enveloppe de cette droite, il nous suffit d'écrire que cette équation du second degré en β a

une racine double, ce qui nous donne $(Ax + Ap + C)^2 + 4ABpy = 0$.

Cette équation représente une parabole dont l'axe et la tangente au sommet sont mis en évidence.

G. FAUVERNIER.

Solution par M. E.-N. Barisien.

1019. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *trouver l'équation du conoïde engendré par une droite qui se meut en s'appuyant sur* Ox, *en restant parallèle à* yOz, *et de façon que sa plus courte distance à une droite donnée passant par* O, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, *soit égale à une longueur donnée* l. *Sections par des plans parallèles aux plans de coordonnées.*

Les équations de la droite mobile sont $x = \mu$, $y = \lambda z$. Nous aurons la plus courte distance en menant par cette droite un plan parallèle à la droite donnée $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ et en prenant la distance de l'origine à ce plan. Or tout plan mené par la droite mobile a pour équation $\rho(x - \mu) + y - \lambda z = 0$: la condition de parallélisme avec la droite donnée est $\rho a + b - \lambda c = 0$; elle donne $\rho = \frac{\lambda c - b}{a}$; donc le plan cherché a pour équation

$$(\lambda c - b)(x - \mu) + ay - a\lambda z = 0.$$

Si on égale à l la distance de l'origine à ce plan, on a la relation

$$\frac{|\mu(b - \lambda c)|}{\sqrt{(b - \lambda c)^2 + a^2(1 + \lambda^2)}} = l.$$

ou

$$l^2[(b - \lambda c)^2 + a^2(1 + \lambda^2)] = \mu^2(b - \lambda c)^2.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer dans cette relation μ par x et λ par $\frac{y}{z}$ pour avoir l'équation du conoïde indiqué dans l'énoncé. On trouve ainsi

$$(1) \qquad (l^2 - x^2)(bz - cy)^2 + a^2l^2(y^2 + z^2) = 0.$$

C'est une surface du quatrième degré ayant pour ligne double l'axe des x et pour centre l'origine des coordonnées ; le plan des yz est aussi un plan de symétrie.

Les plans parallèles au plan yOz coupent la surface suivant un couple de génératrices.

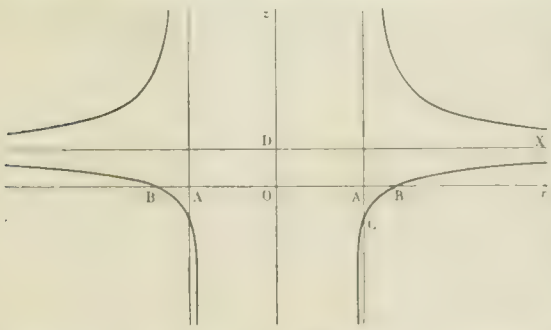
Les plans parallèles au plan zOx, $y = k$, coupent la surface suivant des quartiques aisées à construire :

$$(l^2 - x^2)(bz - ck)^2 + a^2l^2(z^2 + k^2) = 0.$$

Les sections faites par des plans parallèles au plan des xy ne diffèrent pas sensiblement de celles-ci.

Étudions rapidement les diverses formes de cette courbe, quand k varie, et ses déformations successives.

Pour $k = 0$, la ligne se réduit à deux fois Ox et à deux droites parallèles à Oz, $x^2 = l^2 + \frac{a^2l^2}{b^2}$. Ces deux droites sont deux asymptotes communes à toutes les lignes du faisceau étudié. Les points de rencontre avec l'axe des x, $z = 0$, sont fixes aussi et ont pour abscisses $x^2 = l^2 + \frac{a^2l^2}{c^2}$. La droite parallèle à Ox, $z = \frac{ck}{b}$, est une asymptote double ; l'axe Oz est un axe de symétrie. Si on ajoute que la position de la courbe par rapport aux deux asymptotes parallèles à Oz s'obtient immédiatement en voyant le signe de la différence $x^2 - l^2 - \frac{a^2l^2}{b^2}$, pour z infini, on aura donné toutes les indications qu'il faut pour qu'on puisse tracer la courbe. Nous la figurons en supposant $k > 0$, b et c de mêmes signes et $|c| < |b|$.



Quand k augmente les deux points D et C s'éloignent de Ox.

Enfin quand k devient infini, la ligne se réduit à deux droites parallèles à Oz et passant par les points fixes B et B'.

J. MARCHAL.

1035. — *Équation générale des hyperboles équilatères tangentes en O à Ox et ayant leurs centres sur la droite $x = a$.*

Par chaque point P du plan, il en passe deux. Régions du plan où doit se trouver le point P pour qu'elles soient réelles. Enveloppe des axes de ces hyperboles.

Toute hyperbole équilatère tangente à Ox au point O a une équation de la forme

$$x^2 - y^2 + 2\lambda xy + 2\mu y = 0.$$

Les coordonnées du centre sont $x = -\frac{\lambda\mu}{\lambda^2+1}$, $y = \frac{\mu}{\lambda^2+1}$; pour que ce centre soit sur la droite $x = a$, il faut qu'on ait

$$-\frac{\lambda\mu}{\lambda^2+1} = a, \qquad \text{ou} \qquad \mu = -\frac{a(\lambda^2+1)}{\lambda}.$$

Il en résulte que l'équation générale des hyperboles considérées est

$$x^2 - y^2 + 2\lambda xy - \frac{2ay(\lambda^2+1)}{\lambda} = 0.$$

En ordonnant cette équation par rapport à λ, nous obtenons une équation du deuxième degré

$$2\lambda^2 y(x-a) + \lambda(x^2 - y^2) - 2ay = 0.$$

Il passe donc deux hyperboles par tout point P du plan, et ces courbes sont réelles, si cette équation a ses racines réelles, c'est-à-dire si l'on a

$$(x^2 - y^2)^2 + 16ay^2(x-a) > 0,$$

ou encore

$$(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 + 16ay^2(x-a) > 0.$$

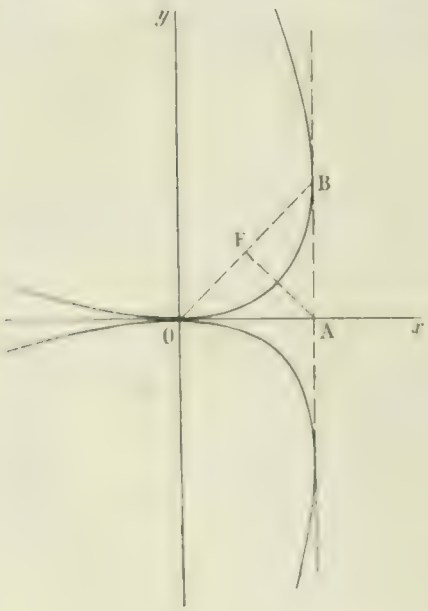
ou

$$(x^2 + y^2)^2 - 4y^2(x - 2a)^2 > 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2y(x - 2a)\,[x^2 + y^2 - 2y(x - 2a)] > 0,$$

ou enfin

$$(1) \qquad (x+y)^2 - 4ay\,[(x-y)^2 + 4ay] > 0.$$



Les équations $(x+y)^2 - 4ay = 0$, $(x-y)^2 + 4ay = 0$ représentent deux paraboles symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des x. Construisons l'une d'elles, par exemple, celle qui a pour équation $(x+y)^2 - 4ay = 0$.

Elle est tangente à Ox à l'origine, sa direction asymptotique est parallèle à la deuxième bissectrice des axes de coordonnées. De plus elle est tangente à la droite AB ($x = a$) au point B qui a pour ordonnée a; il en résulte que le foyer de cette parabole est le milieu de OB.

On voit alors aisément que pour que l'inégalité (1) soit vérifiée, il faut que le point (x, y) soit situé à l'extérieur de cette parabole et de la parabole symétrique par rapport à Ox. Enfin remarquons que l'ensemble de ces deux paraboles constitue l'enveloppe des hyperboles.

Enveloppe des axes. — Les directions des axes sont données par l'équation

$$\lambda(x^2 - y^2) - 2xy = 0;$$

comme les coordonnées du centre sont $x = a$, $y = -\frac{a}{\lambda}$,

l'équation de l'ensemble des axes est

$$\lambda\left[(x-a)^2-\left(y+\frac{a}{\lambda}\right)^2\right]-2(x-a)\left(y+\frac{a}{\lambda}\right)=0,$$

ou

$$\lambda^2[(x-a)^2-y^2]-2\lambda xy-a(2x-a)=0.$$

L'enveloppe a donc pour équation

$$x^2y^2+a(2x-a)[(x-a)^2-y^2]=0,$$

ou

$$(x-a)^2(y^2+2ax-a^2)=0.$$

Le facteur $(x-a)^2$ correspond à l'*enveloppe singulière* qui est le lieu des points doubles de la conique formée par l'ensemble des deux axes, c'est-à-dire le lieu du centre.

La véritable enveloppe est la parabole

$$y^2+2ax-a^2=0,$$

qui a son sommet au milieu de OA, son foyer au point O et dont la directrice est la droite AB.

E.-N. BARISIEN.

Bonnes solutions par MM. Bouvart, Fauvernier, Marchal et Souls.

CONCOURS DE 1901 (*Suite*)

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Mathématiques.

I. — **1084.** — Soit l'expression

$$(1)\qquad y=\text{arc cos}\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\text{arc sin}\,\frac{x}{e},$$

dans laquelle le symbole $\sqrt{x^2-1}$ représente la racine carrée positive de x^2-1.

1° Entre quelles limites peut varier x pour que l'arc y existe réellement ?

2° La formule (1) définit-elle une seule fonction y de la variable x ?

3° Calculer les dérivées des diverses fonctions y définies par (1).

II. — **1085.** — On considère la famille de coniques représentées par l'équation

$$(1)\qquad (a\lambda^2+a'\lambda+a'')x^2+2(b\lambda^2+b'\lambda+b'')xy+(c\lambda^2+c'\lambda+c'')y^2+2(d\lambda^2+d'\lambda+d'')x$$
$$+2(e\lambda^2+e'\lambda+e'')y+f\lambda^2+f'\lambda+f''=0,$$

dans laquelle λ représente un paramètre arbitraire. Par un point (α,β) du plan passent deux coniques (1) pour lesquelles le paramètre λ a les valeurs λ' et λ''.

1° Suivant les régions du plan où est pris le point (α,β), λ' et λ'' sont réels ou imaginaires. De quel degré est la courbe C qui sépare ces régions ?

2° On considère la région R pour laquelle λ' et λ'' sont réels ; suivant la position occupée par (α,β) dans R les courbes (1) passant par (α,β) sont elliptiques, hyperboliques ou paraboliques. Montrer que à ce point de vue la région R se partage en sous-régions limitées par des coniques Γ. Dire quel est le genre des coniques Γ.

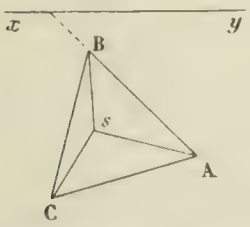
3° Application numérique : Déterminer les courbes C et Γ pour l'exemple suivant :

$$(\lambda^2+\lambda-2)x^2-y^2+2\lambda x+\lambda^2=0.$$

4° Généraliser la question n° 2 (séparation de la région R) en supposant que les coefficients de (1) sont, non plus des polynomes du second degré en λ, mais bien des polynomes d'un degré quelconque en λ.

(*Durée : 4 heures*)

Épure de géométrie descriptive.



1086. Intersection d'une sphère et d'un tétraèdre. — Le tétraèdre SABC repose sur le plan horizontal par la base ABC qui est un triangle équilatéral de $0^m,15$ de côté, AB faisant avec la ligne de terre xy un angle de 45°.

La face SCB est un triangle équilatéral égal au précédent. Enfin l'angle dièdre α suivant l'arête AB est tel que $\text{tg}\,\alpha=\frac{5}{2}$ ce qui achève de déterminer le tétraèdre.

La sphère a pour centre le milieu de SA et son rayon est de $0^m,06$.

On demande de représenter à l'encre noire, en faisant la distinction des parties vues et cachées, ce qui reste du tétraèdre après avoir enlevé la partie comprise à l'intérieur de la sphère.

Les lignes de construction seront faites à volonté en traits discontinus noirs ou en traits continus de couleurs. Toutes les courbes seront tracées à la main, au tire ligne ou à la plume, mais sans faire usage de pistolet ou de règle.

L'épure contiendra toutes les constructions faites pour la mise en place du tétraèdre, ainsi que celle d'un point courant et des points remarquables de l'intersection avec les tangentes.

On prendra comme ligne de terre le petit axe de la feuille et le point B sera placé à $0^m,04$ à gauche et à $0^m,02$ en avant du centre.

(Durée : 3 heures.)

Physique et Chimie.

I. — Qu'est-ce qu'une température ?

Principes sur lesquels sont basées les principales méthodes thermométriques. Quel est le véritable caractère des opérations thermométriques ? Peut-on dire que l'on mesure une température ?

II. — **1087.** — On donne un aérostat, exactement sphérique, de 6 mètres de diamètre, rempli de gaz d'éclairage à la pression de 750^{mm} de mercure. La pression extérieure est de 720^{mm}. On demande d'évaluer en dynes la force qui tend à déchirer l'enveloppe du ballon sur une longueur de $0^m,50$, comptée suivant un arc de grand cercle.

III. — Propriétés générales de la famille : calcium, strontium, baryum.

On mettra en évidence :

1° Les propriétés qui rapprochent les composés de ces trois métaux ;

2° Celles qui les séparent des corps appartenant aux familles chimiques voisines ;

3° Celles qui permettent de les distinguer entre eux.

On montrera comment les propriétés des divers composés varient progressivement lorsqu'on passe du calcium au strontium puis au baryum. (On insistera spécialement à ce point de vue sur les oxydes, carbonates sulfates).

(Durée : 3 heures 1/2.)

Calcul trigonométrique.

1088. — Dans un triangle ABC on donne :

$$a = 11925^m,30, \qquad A = 119°37'8'', \qquad B = 35°22'31''.$$

On demande de calculer :

1° Les côtés b et c en centimètres ;

2° La surface en mètres carrés ;

3° Le rayon du cercle inscrit en centimètres.

(Durée : 1 heure.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1089. — Trouver un polynome du troisième degré tel qu'en le multipliant par un polynome du premier degré on obtienne le carré de sa dérivée. — Expliquer le résultat obtenu.

E. H.

1090. — On considère une parabole P et un cercle C ayant son centre au sommet de P. Lieu du point de rencontre d'une tangente à C et de la tangente à P qui lui est perpendiculaire. Construire la courbe lorsque le cercle C passe par le foyer de P.

E.-N. Barisien.

Erratum. — Dans l'énoncé de la question 1068, proposée dans le n° d'octobre de la *Revue* ajouter le mot « semblables » après le mot hyperboles (première ligne).

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

[illegible]

12e Année. N° 4 Janvier 1902

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE DE GÉOMÉTRIE SUR LE PROBLÈME DU CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES EN 1896,

par **M. C. Grolleau**, professeur de mathématiques au collège d'Apt.

M. Leinekugel, ingénieur hydrographe de la marine, déduit la première partie du problème du concours général de 1896 de la proposition suivante :

« *Deux coniques* E *et* S *étant conjuguées par rapport à un triangle* ABC, *s'il existe un triangle* PQR *inscrit dans l'une et circonscrit à l'autre, les six points* A, B, C, P, Q, R *sont sur une même conique.* »

(J. M. S. de Longchamps, 1897.)

Je me propose de donner une démonstration simple et purement géométrique de cette proposition.

Je m'appuierai pour cela sur les deux problèmes suivants dûs à Chasles (Sections coniques, pages 113-141) et dont je rappelle les élégantes solutions.

I. — « *On donne quatre points* a, b, c, O *et une droite* L, *et l'on demande de construire une conique de manière que les trois premiers points soient conjugués relativement à cette courbe, et que le quatrième devienne le pôle de la droite* L. »

La droite Oa rencontre la droite bc en un point a' et la droite L en O'. Les deux couples de points a, a' et O, O sont conjugués par rapport à la conique demandée. Par conséquent les points de cette courbe situés sur la droite Oa divisent harmoniquement les deux segments aa' et OO' et sont dès lors déterminés. On déterminera de même les points de la conique situés sur les deux droites Ob, Oc. On connaîtra donc six points de cette courbe qui serviront à la construire complètement.

II. — « *Quand deux triangles ont leurs six sommets sur une conique, ces points forment deux systèmes de trois points conjugués par rapport à une autre conique.* »

Soient abc, $a'b'c'$ les deux triangles. On peut construire une conique dans laquelle les trois points a, b, c seront conjugués deux à deux, et le point a' sera le pôle de la droite $b'c'$ (I). Cette courbe satisfait à la question. En effet, appelons γ le point qui, sur $b'c'$, sera le conjugué de b' par rapport à cette conique. Les six points a, b, c, a', b', γ seront sur une même conique (d'après un théorème connu). Le point γ coïncide donc avec le point c' ; et par conséquent, les trois points a', b', c' sont conjugués par rapport à la conique construite.

Ceci posé, revenons au problème.

III. — Soient deux coniques E et S conjuguées à un triangle ABC. Nous savons que s'il existe un triangle PQR inscrit dans l'une et circonscrit à l'autre, il en existe une infinité. Soit $P_1Q_1R_1$ un second triangle inscrit dans l'une et circonscrit à l'autre.

D'après (II), nous pouvons construire une conique Γ conjuguée par rapport à ces deux triangles. Ceci posé, tranformons par polaires réciproques en prenant pour conique directrice Γ. Les deux coniques E et S se transforment l'une dans l'autre ; il en résulte que le triangle ABC, conjugué à la

fois à ces deux coniques, est aussi conjugué à F ; par suite les sommets de ce triangle et ceux du triangle PQR sont sur une même conique, car deux triangles conjugués à une même conique ont leurs sommets sur une conique.

IV. — Voici une démonstration analytique qui m'a été communiquée par M. Jamet, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Marseille.

Prenons pour triangle de référence le triangle PQR, inscrit à la conique S et circonscrit à E; l'équation de S est de la forme

$$F(X, Y, Z) = aYZ + bZX + cXY = 0,$$

et l'équation de E,

$$\varphi(X, Y, Z) = \alpha^2X^2 + \beta^2Y^2 + \gamma^2Z^2 - 2\beta\gamma YZ - 2\gamma\alpha ZX - 2\alpha\beta XY = 0.$$

Le triangle conjugué aux deux coniques S et E a pour sommets trois points communs aux trois coniques représentées par les équations

$$F\varphi_1 - F_1\varphi' = 0, \qquad F\varphi_2 - F_2\varphi' = 0, \qquad F_2\varphi_1 - F_1\varphi_2 = 0,$$

et toute conique circonscrite à ce triangle est représentée par une équation de la forme

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ F_1 & F_2 & F \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi' \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ bZ + cY & cX + aZ & aY + bX \\ \alpha(\alpha X - \beta Y - \gamma Z) & \beta(\beta Y - \gamma Z - \alpha X) & \gamma(\gamma Z - \beta Y - \alpha X) \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que cette conique passe par le sommet $(Y = 0,\ Z = 0)$ du triangle PQR, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ 0 & c & b \\ \alpha & -\beta & -\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\lambda(b\beta - c\gamma) + \mu(b\gamma - c\alpha) = 0.$$

Pour qu'elle passe par les deux autres sommets il faut qu'on ait

$$\mu(c\gamma - a\alpha) + \nu(c\alpha - a\gamma) = 0,$$
$$\nu(a\alpha - b\beta) + \lambda(a\beta - b\gamma) = 0$$

et ces trois équations, linéaires en λ, μ, ν, ont une solution commune, car on retrouve la troisième multipliée par γ en ajoutant membre à membre les deux premières, après qu'on a multiplié les deux membres de la première par a et les deux membres de la deuxième par b.

SUR LA DÉTERMINATION DES AXES D'UNE SECTION PLANE D'UNE QUADRIQUE.

par M. **Georges Halley des Fontaines**, élève de mathématiques spéciales au collège Chaptal.

Soient Q la quadrique donnée, P le plan de section, C la conique d'intersection de Q par P. Soient γ_1 et γ_2 deux plans de sections cycliques non parallèles, perpendiculaires à un même plan principal. Soient D_1 et D_2 les droites d'intersection de P par γ_1 et γ_2. Ces droites coupent la conique C en quatre points, a_1, b_1, a_2, b_2. On sait que deux sections cycliques non parallèles d'une quadrique sont toujours sur une même sphère. Cette sphère coupera le plan P, suivant un cercle F qui passera par a_1, b_1, a_2, b_2. Les axes de la conique C sont donc parallèles aux bissectrices des droites D_1 et D_2, cordes communes à la conique et au cercle F.

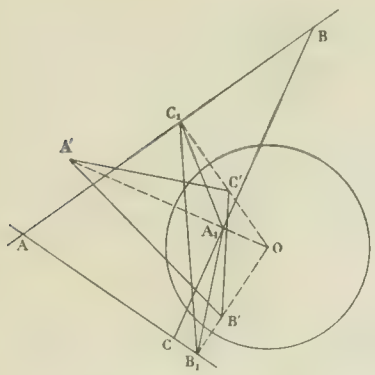
D'où le théorème suivant :

Pour avoir les directions des axes d'une section plane d'une quadrique, il suffit de prendre les bissectrices des traces sur le plan de cette section de deux plans cycliques non parallèles perpendiculaires à un même plan principal.

GÉOMÉTRIE

1012. — *Si un triangle varie en restant inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique, le cercle qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les côtés du triangle reste orthogonal à un cercle fixe.*

Soit ABC le triangle variable envisagé et O le point fixe. Transformons la figure par polaires réciproques en prenant pour conique fondamentale un cercle de centre O et de rayon quelconque R. Le triangle ABC devient A'B'C' et celui-ci jouit des mêmes propriétés générales que le premier : il est inscrit dans une conique fixe et circonscrit à une autre ; par conséquent il reste conjugué à une troisième conique par rapport à laquelle les deux précédentes sont réciproques l'une de l'autre (Voir le numéro de janvier 1900 de la *Revue*, solution de la question 936).



Soient Γ cette conique et (C) son cercle orthoptique. Nous savons que le cercle circonscrit au triangle A'B'C' est toujours orthogonal au cercle (C) ; dès lors si nous transformons par inversion la seconde figure en prenant comme centre d'inversion le point O et comme puissance d'inversion le nombre R^2, ce cercle se transformera en un cercle orthogonal aussi à un autre cercle fixe, transformé de C ; mais dans cette inversion, les points A_1, B_1, C_1, pieds des projections de O sur les côtés du triangle ABC, correspondent aux points A', B', C', pôles de BC, CA, AB ; le nouveau cercle mobile reste donc circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$ et le théorème est démontré.

De ce théorème découlent diverses propriétés intéressantes. Bornons-nous à en signaler une.

Si un triangle reste inscrit dans un cercle fixe et circonscrit à une conique fixe, la droite de Simpson relative à ce triangle et à un point fixe du cercle envisagé passe par un point fixe.

On pourra chercher une démonstration élémentaire de ce théorème dans le cas où la conique fixe est aussi un cercle.

Bonnes solutions : MM. Vasnier ; R. Bouvaist.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1013. — *On considère une sphère variable tangente au plan des xy en un point de Ox et telle que la cote du point du cône circonscrit de sommet O qui se projette au point de contact soit constante, et on demande :*

1° *Le lieu du centre de cette sphère ;*

2° *Le lieu du grand cercle de cette sphère perpendiculaire au plan des zx et dont le plan passe au point O. Construire la trace de cette surface sur le plan des zx.*

3° *On considère la ligne qui joint les centres de deux sphères infiniment voisines et on demande le lieu de la projection de l'origine sur cette droite.*

1. Appelons α l'abscisse du point de contact de la sphère avec le plan des xy, γ la cote de son centre et h la cote du point du cône circonscrit de sommet O qui se projette sur le point de contact de la sphère avec le plan des xy.

L'équation de la sphère est

$$(x-\alpha)^2+y^2+(z-\gamma)^2-\gamma^2=0\,;$$

celle du cône est

$$\alpha^2(x-\alpha)^2+y^2+(z-\gamma)^2-\gamma^2-(\alpha x-\alpha+\gamma z)^2=0.$$

Il n'y a plus qu'à faire dans cette équation $x = \alpha$, $y = 0$, $z = h$ pour avoir la relation entre α et γ, c'est-à-dire l'équation du lieu du centre de la sphère. Cette équation est

$$(1) \qquad 2\alpha^2\gamma + h(\gamma^2 - \alpha^2) = 0,$$

ou, avec les notations usuelles,

$$(1') \qquad 2x^2z + h(z^2 - x^2) = 0;$$

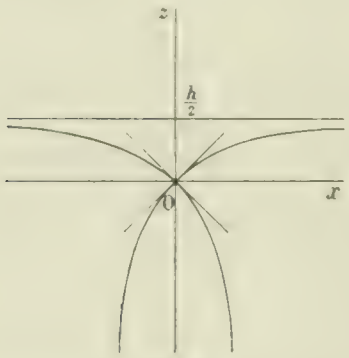


Fig. 1

elle représente une ligne du troisième degré, symétrique par rapport à Oz, ayant un point double à l'origine avec tangentes rectangulaires, les bissectrices de l'angle des axes, ayant pour asymptote la droite $z = \frac{h}{2}$, et deux branches paraboliques dans la direction de Oz. Cela suffirait à tracer la courbe, mais l'étude de la fonction x^2 de z tirée de l'équation (1') est immédiate et précise encore la forme de la courbe (*fig.* 1.)

2. Le plan du grand cercle considéré a pour équation $\frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\gamma}$, et le lieu de ce grand cercle s'obtient en éliminant α et γ entre l'équation précédente, celle de la sphère et la relation (1). Or nous avons de suite $\alpha = \lambda x$, $\gamma = \lambda z$, puis, en portant dans l'équation de la sphère et dans la relation (1),

$$(x^2 + z^2)(1 - \lambda)^2 + y^2 - \lambda^2 z^2 = 0,$$
$$2\lambda(x^2 z + h(z^2 - x^2)) = 0;$$

la dernière donne $\lambda = \frac{h(x^2 - z^2)}{2x^2 z}$ et la première fournit ensuite l'équation de la surface cherchée :

$$(x^2 + z^2)(2x^2 z + h(z^2 - x^2))^2 - 4x^2y^2z^2 - h^2z^2(x^2 - z^2)^2 = 0.$$

En développant cette équation, x^2 se met en facteur et il reste une équation du sixième degré :

$$(2) \qquad 4x^2z^2(x^2 + y^2 + z^2) - 4hz(x^4 - z^4) + h^2(x^2 - z^2)^2 = 0.$$

La trace de cette surface sur le plan des xz est une courbe du sixième degré dont l'équation est

$$(3) \qquad 4x^2z^2(x^2 + z^2) - 4hz(x^4 - z^4) + h^2(x^2 - z^2)^2 = 0;$$

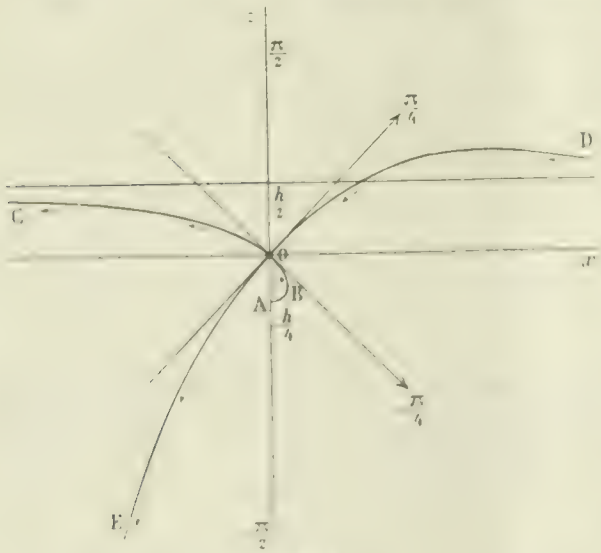


Fig. 2

c'est cette ligne qu'il s'agit de tracer. Pour cela nous passerons aux coordonnées polaires, nous poserons $x = \rho\cos\omega$, $z = \rho\sin\omega$, et nous obtiendrons une équation du second degré en ρ à étudier :

$$4\rho^2\sin^2\omega\cos^2\omega - 4h\rho\cos^2\omega - \sin^2\omega) \sin\omega$$
$$+ h^2(\cos^2\omega - \sin^2\omega)^2 = 0;$$

Cette équation, résolue par rapport à ρ, nous donne les deux expressions suivantes :

$$\rho = \frac{h(\cos^2\omega - \sin^2\omega)}{2\sin\omega(1 \pm \sin\omega)}.$$

Il suffit, comme on le voit aisément, de considérer l'une d'elles, la première par exemple, pour obtenir la courbe tout entière. Etudions donc l'équation $\rho = \frac{h}{2}\frac{\cos^2\omega - \sin^2\omega}{\sin\omega(1 - \sin\omega)}$.

Si on y change ω en $\pi - \omega$ l'équation ne change pas, par conséquent la courbe (*fig.* 2) est symétrique par rapport à Oz, et il suffit de faire varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ pour en obtenir une moitié. De $-\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{4}$, ρ est positif et varie

de $\frac{h}{4}$ à 0; nous avons l'arc fini ABO tangent en O à la seconde bissectrice. De $-\frac{\pi}{4}$ à 0, ρ est négatif et varie de 0 à $-\infty$: nous avons l'arc infini OC tangent en O à la deuxième bissectrice et ayant pour direction asymptotique Ox. De 0 à $\frac{\pi}{4}$, ρ varie de $-\infty$ à 0; nous avons l'arc infini DO ayant pour direction asymptotique Ox et tangent en O à la première bissectrice. Enfin de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$, ρ varie de 0 à $-\infty$, et nous avons l'arc infini OE, tangent à la première bissectrice en O et ayant pour direction asymptotique Oz.

Pour avoir l'asymptote parallèle à Ox, il faut trouver la limite de

$$\delta = \rho \sin\omega = \frac{h(\cos^2\omega - \sin^2\omega)}{2(1-\sin\omega)}$$

pour $\omega = 0$; cette limite est $\frac{h}{2}$; l'asymptote est donc la droite $z = \frac{h}{2}$. D'autre part, $\delta - \frac{h}{2} = \frac{h\sin\omega}{2}\,\frac{1-2\sin\omega}{1-\sin\omega}$; cette quantité est négative pour les petites valeurs négatives de ω et positive pour les petites valeurs positives de ω; cela donne les positions respectives des deux arcs OC et OD par rapport à l'asymptote.

Nous aurons l'asymptote parallèle à Oz en cherchant la limite de $\delta = -\rho\cos\omega$ quand ω tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs plus petites $\frac{\pi}{2}$; δ a pour valeur $-\frac{h}{2\sin\omega}\,\frac{\sqrt{1-\sin^2\omega}}{1-\sin\omega}(\cos^2\omega - \sin^2\omega)$; cette quantité grandit indéfiniment par valeurs positives; l'arc OE est donc un arc parabolique.

Il n'y a plus qu'à achever la courbe par symétrie.

3. Si on considère deux sphères infiniment voisines, la ligne qui joint leurs centres est la tangente à la courbe (1) au centre de l'une d'elles; le lieu de la projection de l'origine sur cette droite est donc la podaire de la courbe (1) par rapport au point O. On peut obtenir l'équation de cette courbe directement en introduisant comme inconnues les coordonnées du point de contact; mais l'élimination à faire ainsi est assez compliquée et il vaut mieux, puisque la courbe (1) est unicursale, exprimer les coordonnées d'un point courant sur cette ligne à l'aide d'un paramètre et calculer les coordonnées du point courant de la podaire en fonction du même paramètre. En posant $z = tx$ l'équation (1) donne $x = \frac{h}{2}\,\frac{1-t^2}{t}$, puis $z = \frac{h}{2}(1-t^2)$; par conséquent l'équation de la tangente à cette courbe au point t s'obtient aisément en fonction de t: elle s'écrit finalement

$$4t^3x - 2(1-t^2)z - h(1-t^2)^2 = 0;$$

la perpendiculaire abaissée du point O a pour équation

$$\frac{x}{2t^3} = \frac{z}{-(1+t^2)},$$

et elle rencontre la droite précédente en un point dont les coordonnées s'obtiennent immédiatement :

$$\frac{x}{2t} = \frac{z}{-(1+t^2)} = \frac{\frac{-h}{2}(1-t^2)}{4t^6 + (1+t^2)^2},$$

ou

$$(4)\quad \begin{cases} x = \dfrac{-ht^3(1-t^2)^2}{4t^6 + (1+t^2)^2}, \\ z = \dfrac{h(1-t^2)^2(1+t^2)}{2(4t^6 + (1+t^2)^2)}. \end{cases}$$

Ces équations représentent une courbe du septième ordre. R. BOUVAIST.

Excellente solution de M. J. MARCHAL.

1016. — *On considère une droite fixe (D), un point fixe B sur cette droite et un point fixe A en dehors de cette droite.*

1° Trouver l'équation générale des cercles passant par le point B et rencontrant la droite (D) en un second point M où la tangente soit la droite AM. Lieu des centres de ces cercles.

2° On associe ces cercles deux à deux de façon qu'ils soient orthogonaux et on demande le lieu du second point de rencontre de ces deux cercles, l'équation de la droite qui joint leurs centres et son enveloppe.

3° Trouver l'équation de la droite qui joint les pôles de la droite (D) par rapport aux deux cercles envisagés et le lieu du point de rencontre de cette droite avec la ligne des centres.

1. Nous prendrons pour axe des y la droite (D) et pour axe des x la perpendiculaire abaissée de A sur cette droite, puis nous désignerons l'abscisse de A par a et l'ordonnée de B par b. Représentons par $y - \lambda(x - a) = 0$ l'équation de la droite AM, de sorte que les coordonnées de M soient 0 et $-\lambda a$; le cercle de rayon nul ayant son centre en ce point aura pour équation $x^2 + y^2 + \lambda a^2 = 0$; or le cercle cherché fait partie du faisceau linéaire déterminé par la tangente en M et par ce cercle de rayon nul ; il a donc pour équation

$$x^2 + (y + \lambda a)^2 - 2\mu(y - \lambda x + \lambda a) = 0,$$

μ étant donné par la condition que ce cercle passe au point B ; ceci conduit à $\mu = -\dfrac{b + \lambda a}{2}$, et par suite l'équation du cercle cherché est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - \lambda(\lambda a + b)x + (\lambda a - b)y - ab\lambda = 0$$

Les coordonnées du centre de ce cercle sont données par les deux équations

$$2x + \lambda(b + \lambda a) = 0, \qquad 2y + \lambda a - b = 0,$$

et le lieu de ce point s'obtient en éliminant λ entre elles. Ce lieu est la parabole

$$(2) \qquad (y - b)(2y - b) + ax = 0,$$

ligne qui passe au point B et au milieu de OB, qui a son axe parallèle à Ox et sa concavité tournée en sens contraire de OA et qui rencontre Ox en un point situé sur la perpendiculaire à AB en B ; ces remarques suffisent pleinement pour placer la parabole.

2. La condition d'orthogonalité de deux cercles λ et λ' est

$$\lambda\lambda'(b + \lambda a)(b + \lambda' a) + (\lambda a - b)(\lambda' a - b) + 2ab\lambda + 2ab\lambda' = 0;$$

elle se décompose en deux :

$$\lambda\lambda' + 1 = 0, \qquad \text{et} \qquad a^2\lambda\lambda' + ab(\lambda + \lambda') + b^2 = 0;$$

cette dernière donne $\lambda = -\dfrac{b}{a}$ ou $\lambda' = \dfrac{-b}{a}$ et le cercle correspondant a pour équation

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0.$$

C'est le cercle-point qui a son centre en B ; ce cercle est évidemment orthogonal à tout autre cercle du système, ce qui explique l'introduction de cette solution exceptionnelle. La véritable condition est donc

$$\lambda\lambda' + 1 = 0 ;$$

elle exprime que les deux tangentes AM et AM′ sont rectangulaires.

Pour trouver le lieu du second point de rencontre (x, y) des deux cercles, il suffit d'exprimer que le cercle (1) passe en ce point et d'écrire ensuite que le produit des deux valeurs de λ ainsi déterminées est égal à -1 ; on trouve ainsi l'équation

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - ax - by = 0,$$

qui représente un cercle passant à l'origine, au point B et au symétrique A′ de A par rapport à l'origine.

La ligne des centres a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \lambda(a\lambda+b) & \lambda a-b & -2 \\ \lambda'(a\lambda'+b) & \lambda' a-b & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

en développant cette équation, supprimant le facteur $\lambda-\lambda'$ et remplaçant $\lambda\lambda'$ par -1, on obtient

$$2ax-2by+a^2+b^2+(\lambda+\lambda')(ab-2ay)=0.$$

Cette équation ne dépend que d'un paramètre et linéairement ; la droite correspondante passe donc par un point fixe, le point qui a pour coordonnées

$$x=-\frac{a}{2}, \qquad y=\frac{b}{2};$$

c'est le centre du cercle (3).

3. Le pôle de l'axe des y par rapport au cercle (1) a pour coordonnées

$$x=\frac{a\lambda+b}{2\lambda}, \qquad y=\frac{b-a\lambda}{2}.$$

La ligne des pôles des deux cercles λ et λ' a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\lambda+b & \lambda(b-a\lambda) & 2\lambda \\ a\lambda'+b & \lambda'(b-a\lambda') & 2\lambda' \end{vmatrix} = 0;$$

cette équation, traitée comme la précédente, devient

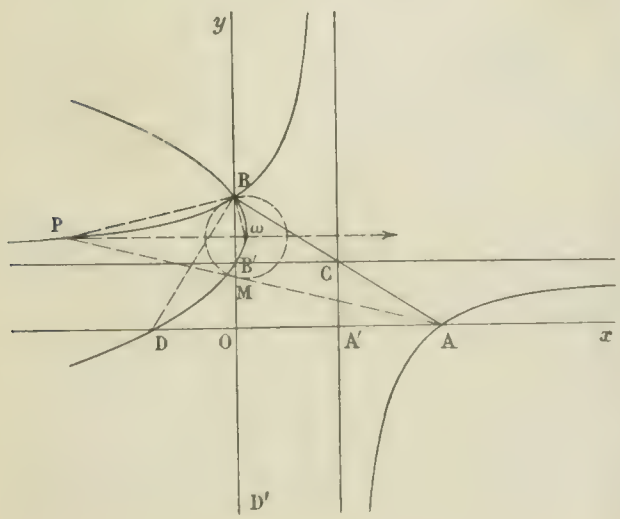
$$2ax+2by-a^2-b^2+ab(\lambda+\lambda')=0;$$

elle montre que la droite des pôles est parallèle à une direction fixe. Le lieu demandé s'obtient en éliminant $\lambda+\lambda'$ entre l'équation de la ligne des centres et celle de la ligne des pôles ; c'est l'hyperbole

$$(4) \qquad 2axy+2by^2-(a^2+3b^2)y+b(a^2+b^2)=0.$$

Cette courbe admet l'axe des x comme asymptote et passe au point B ; elle passe aussi au point $\left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ et sa seconde direction asymptotique est parallèle à la direction fixe de la ligne des pôles.

Solution géométrique. Considérons un des cercles du système et soient AMP et BP les tangentes en M et B ; elles sont également inclinées sur la droite (D), c'est-à-dire sur les axes Ox et Oy ; elles engendrent deux faisceaux homographiques égaux et opposés, et, par suite, le lieu de leur point de rencontre, le lieu du pôle P de l'axe des y, est une hyperbole équilatère ayant AB pour diamètre et pour asymptotes des parallèles aux axes.



Menons alors Bω perpendiculaire à BP et Pω parallèle à Ox ; ces deux droites se coupent au centre du cercle. Or Bω décrit un faisceau homographique au faisceau BP et Pω un faisceau homographique au même faisceau ; par conséquent le point ω décrit une conique qui passe au point B et au point à l'infini sur Ox. Il est visible que cette conique est une parabole ayant son axe parallèle à Ox passant au point B' milieu de OB et au point D où la perpendiculaire à BA en B rencontre Ox ; ces deux derniers résultats dérivent immédiatement de la définition du cercle ω.

Pour que deux cercles ω et ω soient orthogonaux, il faut que leurs tangentes en B soient rectangulaires et, par suite aussi, leurs tangentes AM et AM' issues du point A, puisqu'en direction elles sont symétriques de celles-ci par rapport à Ox.

La ligne des centres ωω est alors une corde

de la parabole vue du point B sous un angle droit ; elle passe donc par un point fixe, le point de Frégier correspondant au point B ; ce point est situé sur la normale en B à la parabole et sur la droite B'C parallèle à Ox.

Puisque la ligne des centres pivote autour d'un point fixe, le pied de la perpendiculaire abaissée du point B sur cette ligne décrit un cercle ; le second point de rencontre des deux cercles décrit le cercle homothétique de celui-là par rapport au point B et dans le rapport 2.

La ligne des pôles PP' est une corde de l'hyperbole équilatère vue du point B sous un angle droit ; elle reste donc parallèle à la normale à l'hyperbole au point B. D'autre part, elle est associée homographiquement à la ligne des centres $\omega\omega'$; donc le lieu de leur point de rencontre est une hyperbole. Cette ligne est aisée à fixer.

Bonnes solutions analytiques : MM. G. Fauvernier, E.-N. Barisien, R. Bouvaist ; J. Marchal ; Dulimbert ; T. Lemayne, à Troyes. Solutions géométriques analogues à la précédente : MM. Vasnier et Rebeix.

1017. — *On considère une ellipse fixe et un point* M *variable sur cette ellipse. Soient* P, Q, R *les pieds des autres normales abaissées du point* M *sur l'ellipse. On demande de trouver le lieu des centres des sécantes communes à l'ellipse et au cercle circonscrit au triangle* PQR ; *puis de trouver le lieu du centre et l'enveloppe de ce cercle.*

Soit $M(\alpha, \beta)$ un point de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Le cercle circonscrit au triangle PQR est le cercle de Joachimstal du point M. Pour l'obtenir, nous écrivons que la normale en un point (x, y) de l'ellipse passe au point (α, β), ce qui nous donne

$$\frac{\alpha - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\beta - y}{\frac{y}{b}},$$

nous appelons λ la valeur commune de ces deux rapports, et nous en déduisons les coordonnées du pied d'une normale issue de (α, β) : $x = \frac{a^2\alpha}{a^2 + \lambda}$, $y = \frac{b^2\beta}{b^2 + \lambda}$, avec la condition

$$(1) \qquad \frac{a^2\alpha^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2 + \lambda)^2} - 1 = 0,$$

qui exprime que le point (x, y) est sur l'ellipse et qui donne les λ des pieds des quatre normales issues du point M. Parmi ces quatre valeurs de λ, une est nulle, elle correspond au point M ; les trois autres correspondent aux points P, Q, R.

Soit alors

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + r = 0$$

l'équation cherchée ; exprimons qu'elle est vérifiée par les coordonnées du pied d'une normale issue du point (α, β), nous aurons une équation du quatrième degré en λ :

$$(2) \qquad \frac{a^2\alpha^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2 + \lambda)^2} - \frac{2pa^2\alpha}{a^2 + \lambda} - \frac{2qb^2\beta}{b^2 + \lambda} + r = 0,$$

qui doit avoir trois racines communes avec l'équation (1), toutes les racines de cette équation, sauf la racine nulle. Multiplions l'équation (1) par λ et ajoutons-la à l'équation (2), nous aurons, après réduction, une équation du troisième degré qui admettra justement les racines correspondant aux points P, Q, R ; cette équation est

$$\frac{a^2\alpha^2 - 2pa^2\alpha}{a^2 + \lambda} + \frac{b^2\beta^2 - 2qb^2\beta}{b^2 + \lambda} + r - \lambda = 0,$$

en la multipliant par $(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)$, on la rendrait entière et le coefficient de λ^3 serait égal à -1 ; donc en multipliant le premier membre par $\frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)}$, on doit obtenir une fraction identique

au premier membre de (1). Faisons dans cette identité $\lambda = -a^2$ après avoir multiplié par $(\lambda + a^2)^2$, puis $\lambda = -b^2$ après avoir multiplié par $(\lambda + b^2)^2$, et enfin égalons les coefficients de λ^3 dans les deux membres rendus entiers; nous aurons p, q et r :

$$p = \frac{\alpha}{2}\frac{b^2}{a^2}, \qquad q = \frac{\beta}{2}\frac{a^2}{b^2}, \qquad r = -a^2 - b^2.$$

Le cercle cherché a donc pour équation

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - \frac{b^2 \cos\varphi}{a} x - \frac{a^2 \sin\varphi}{b} y - a^2 - b^2 = 0,$$

en appelant φ l'anomalie excentrique du point M.

Le lieu du centre du cercle (3) est immédiat : c'est l'ellipse

$$(4) \qquad \frac{4a^2x^2}{b^4} + \frac{4b^2y^2}{a^4} - 1 = 0.$$

L'enveloppe s'obtient de suite aussi en isolant dans un membre $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, prenant la dérivée par rapport à φ, puis ajoutant les carrés des deux équations ainsi obtenues. On trouve de cette façon la quartique bicirculaire

$$(5) \qquad a^2b^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 - b^6x^2 - a^6y^2 = 0.$$

Cette courbe est une anallagmatique ayant pour pôle d'anallagmatie le point O et pour déférente correspondante l'ellipse (4); il est visible en effet que le cercle (3) reste orthogonal au cercle fixe

$$x^2 + y^2 + a^2 + b^2 = 0.$$

Pour traiter la première question, considérons l'équation générale des coniques qui passent par les points de rencontre de l'ellipse avec le cercle :

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + x^2 + y^2 - \frac{b^2\cos\varphi}{a}x - \frac{a^2\sin\varphi}{b}y - a^2 - b^2 = 0.$$

Cette équation représente deux droites si les trois dérivées partielles sont nulles en même temps; d'autre part, le point de rencontre des deux droites a justement pour coordonnées les valeurs de x, y, z qui constituent la solution commune à ces trois équations; nous aurons donc le lieu demandé en éliminant λ et φ entre les équations annoncées :

$$2(\lambda + a^2)x - ab^2\cos\varphi = 0,$$
$$2(\lambda + b^2)y - ba^2\sin\varphi = 0,$$
$$b^2x\cos\varphi + a^2y\sin\varphi + 2ab(a^2 + b^2 + \lambda) = 0.$$

Les deux premières donnent $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, la troisième donne alors λ, et le lieu s'obtient en écrivant que $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Nous trouvons ainsi

$$(6) \qquad a^4b^4(a^2x^2 + b^2y^2)C^2 + (a^6x^2 + b^6y^2)E^2 - 2a^2b^2(a^4x^2 + b^4y^2)EC - a^4b^4\frac{E^2}{4} = 0,$$

équation dans laquelle E et C désignent respectivement les fonctions

$$b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 - a^2 - b^2;$$

cette équation représente une courbe du sixième degré. Elle peut d'ailleurs se simplifier beaucoup et s'écrire

$$4a^6x^2(E - b^2C)^2 + 4b^6y^2(E - a^2C)^2 - a^4b^4E^2 = 0,$$

ou

$$(6') \qquad 4a^4x^2(a^2y^2 - b^4C)^2 + 4b^4y^2(a^2x^2 + a^4C)^2 - a^4b^4E^2 = 0.$$

Sous cette dernière forme, les directions asymptotiques sont en évidence.

La courbe (5) est aisée à construire : il suffit, pour cela, de discuter l'équation bicarrée en y qui lui correspond

$$a^2b^2y^4 + [2a^2b^2(x^2 - a^2 - b^2) - a^6]y^2 + a^2b^2(x^2 - a^2 - b^2)^2 - b^6x^2 = 0.$$

Le dernier coefficient de cette équation admet pour racines a, $-a$, $\frac{a^2 - b^2}{a}$ et $-\frac{a^2 + b^2}{a}$,

auxquelles correspondent les points A, A′, B et B de Ox. Le second coefficient est nul pour $x^2 = a^2 + b^2 + \frac{a^4}{2b^2}$: ce nombre est plus grand que a^2 ; voyons s'il est plus grand que $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2}$; cela exige que l'on ait

$$2b^6 + 2a^2b^4 - a^6 < 0 ;$$

or le premier membre égalé à 0 fournit une équation du troisième degré en $\frac{b^2}{a^2}$ qui a une racine α comprise entre 0 et 1 ; si donc b^2 est moindre que αa^2, l'inégalité est remplie ; si b^2 est compris entre αa^2 et a^2, elle ne l'est pas.

La discussion s'achève dès lors aisément : on remarque en effet que la condition de réalité est vérifiée quand x^2 est moindre qu'une certaine quantité $\frac{(a^2+b^2)^2}{4b^2(a^2-b^2)}$; d'ailleurs cette quantité est plus grande que $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2}$, puisque entre les nombres a et $\frac{a^2+b^2}{a}$ les valeurs de y^2 sont réelles et de signes contraires, et elle est moindre que la valeur de x^2 qui annule le second coefficient, quand toutefois celle-ci est plus grande que $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2}$, c'est-à-dire quand b^2 est plus petit que αa^2, car pour cette valeur de x^2 l'équation en y^2 a sûrement ses racines imaginaires.

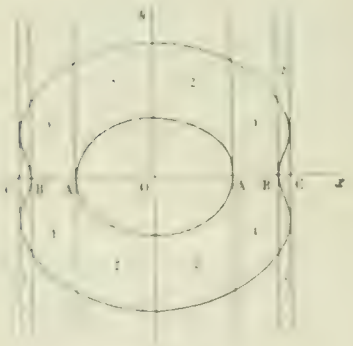


Fig. 1.

Dans ce cas, représentons par OC et — OC′ les valeurs de x que nous venons de trouver et pour lesquelles l'équation a deux racines doubles, et menons par les six points A, A′, B, B′, C et C′ des parallèles à Oy (*fig.* 1).

En dehors de l'intervalle CC′, l'équation en y n'a pas de racines réelles ; entre O et A et entre O et A′, elle a deux racines positives et deux racines négatives ; de même entre B et C, B′ et C′ ; entre A et B et entre A′ et B′, elle a une racine positive et une racine négative.

En tenant compte de ce que la courbe est tangente en A, A′, B, B′ aux parallèles à Oy et doublement tangente à celles qui sont menées par les points C et C′, elle est facile à tracer.

Si b^2 est compris entre αa^2 et a^2, les racines sont imaginaires entre B et C comme entre B′ et C′ la courbe se compose encore de deux ovales, mais n'a pas de sinuosités comme dans le premier cas (*fig.* 2).

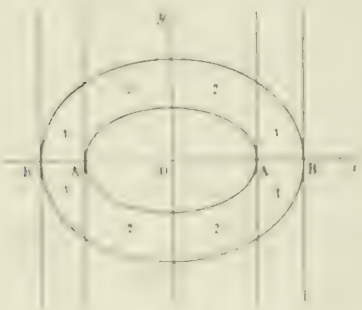


Fig. 2.

En discutant l'équation bicarrée en x qui provient de l'équation (5), il est facile de s'assurer que la courbe n'a pas d'autres sinuosités que celles qui ont été signalées.

Pour apercevoir la forme de la courbe (6) ou (6′), mettons d'abord son équation sous la forme

$$4a^2x^2y^2(b^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2b^2) - a^2b^2(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)^2 = 0.$$

Nous voyons de suite que les sommets de l'ellipse donnée sont des points doubles ainsi que les points à l'infini sur les axes et que la courbe est tout entière à l'extérieur de l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2b^2 = 0,$$

qu'elle touche d'ailleurs aux quatre points de rencontre avec l'ellipse proposée. Les demi-axes de cette nouvelle ellipse ont pour longueurs $\frac{a^2\sqrt{2}}{b}$, $\frac{b^2\sqrt{2}}{a}$: le premier est toujours plus grand que a, le second n'est plus petit que b que si b est moindre que $\frac{a}{\sqrt{2}}$, et, dans ce cas seulement, les quatre

points de contact signalés plus haut sont réels, et deux des points doubles, les extrémités du petit axe de l'ellipse donnée, sont des points doubles ordinaires. Si b est compris entre $\frac{a}{\sqrt{2}}$ et a, ceci n'a pas lieu.

Les asymptotes ont pour équations

$$x = \pm \frac{ab^2}{2c^2}, \qquad y = \pm \frac{a^2 b}{2c^2}.$$

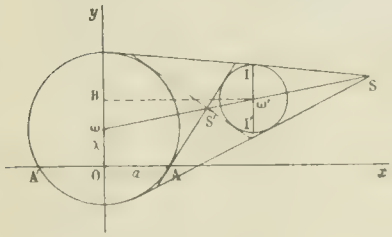
Ces remarques permettent de se faire une idée assez exacte de la forme de la courbe dans chaque cas particulier ; il serait facile de la construire complètement dans une hypothèse déterminée ; mais il est assez difficile de classer tous les cas qui peuvent se présenter et de donner toutes les formes correspondantes.

E.-N. BARISIEN.

Bonnes solutions : MM. FAUVERNIER ; J. MARCHAL ; T. LEMOYNE, à Troyes.

1021. — *Trouver le lieu des points de concours des tangentes communes à deux cercles, quand l'un d'eux reste fixe et que l'autre varie en passant par deux points fixes. Étudier les diverses formes de la courbe ainsi obtenue.*

Prenons pour axes la droite joignant les deux points fixes A et A′ et la perpendiculaire élevée en son milieu. Soient $OA = OA' = a$; α, β les coordonnées du centre ω' du cercle fixe, ρ son rayon ; enfin r le rayon du cercle ω.



1. Cherchons d'abord le lieu des centres de similitude S et S′ ; x, y étant les coordonnées d'un de ces points, on a

$$\frac{x}{x-a} = \frac{y-\lambda}{y-\beta} = -\frac{\varepsilon r}{\rho} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

On obtiendra le lieu de S et S′ en éliminant λ et εr entre les équations précédentes et la relation $r^2 = a^2 + \lambda^2$, ce qui donne

$$(\beta x - \alpha y)^2 + a^2(x-\alpha)^2 - \rho^2 x^2 = 0,$$

ellipse, parabole ou hyperbole, suivant que ρ est inférieur, égal ou supérieur à a.

Cette conique coupe Oy aux points imaginaires fixes $y^2 + a^2 = 0$, quel que soit le cercle ω'. Elle est tangente en I, I′ aux droites OI, OI′ (I et I′ extrémités du diamètre de ω' parallèle à Oy).

2. Les quatre autres ombilics sont les points d'intersection des tangentes menées de S au cercle ω' avec les tangentes menées de S′ au même cercle ; or l'équation quadratique des tangentes menées du point $x = \frac{\varepsilon r \alpha}{\rho + \varepsilon r}$, $y = \frac{\lambda\rho + \varepsilon r \beta}{\rho + \varepsilon r}$, est, en tenant compte de la relation $r^2 = a^2 + \lambda^2$,

$$[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \rho^2(\alpha^2 + \beta^2 - 2\lambda\beta - \rho^2 - a^2 - 2\varepsilon r\rho) - \alpha(x-\alpha) - \beta(y-\beta) + \rho^2 + \varepsilon r\rho]^2 = 0.$$

On a les tangentes menées de S et S′ en égalant ε successivement à $+1$ et à -1. Les quatre ombilics sont donc sur les deux coniques qu'on obtient en égalant à 0 les termes qui contiennent $\varepsilon r\rho$, puis ceux qui ne le contiennent pas :

$$(\beta x - \alpha y)^2 - a^2[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2] - \rho^2(x^2 + y^2) - 2\lambda[(\beta x - \alpha y)(x-\alpha) - \rho^2 y] - \lambda^2[(y-\beta)^2 + \rho^2] = 0,$$

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y - \lambda(y-\beta) = 0.$$

La seconde équation représente le cercle décrit sur $\omega\omega'$ comme diamètre, qui passe par les quatre ombilics (résultat connu).

On a le lieu cherché en éliminant λ ; après quelques réductions et après suppression du facteur $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$, on trouve

$$y^2[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2] - (\beta x - \alpha y)^2 - a^2(y-\beta)^2 - \rho^2 x^2 = 0.$$

Le lieu est donc une quartique. Ordonnée par rapport à x, l'équation s'écrit

$$(y^2 - \beta^2 - \rho^2)x^2 - 2\alpha y(y - \beta)x + (y^2 + a^2)(y - \beta)^2 = 0.$$

Le point B $(0, \beta)$ est comme on voit un point double. On peut discuter en résolvant par rapport à x,

$$x = \frac{(y - \beta)\alpha y \pm \sqrt{-y^4 + (\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - \rho^2)y^2 + a^2(\beta^2 - \rho^2)}}{y^2 - \beta^2 + \rho^2}.$$

Le lieu n'est réel que si le discriminant du trinome en y^2 placé sous le radical est positif, c'est-à-dire si l'on a

$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 - \rho^2 \quad (\alpha + a)^2 + \beta^2 - \rho^2 > 0$$

Nous nous placerons dans cette hypothèse

Il y a trois cas principaux à distinguer : $\beta^2 - \rho^2 > 0$, $\beta^2 - \rho^2 = 0$, $\beta^2 - \rho^2 < 0$, c'est-à-dire ou β supérieur, égal ou inférieur à ρ, car nous pouvons toujours supposer $\beta > 0$

1er Cas. $\beta > \rho$. Soit alors $\beta^2 - \rho^2 = y_0^2$: les deux droites $y = \pm y_0$ sont asymptotes.

La substitution de y_0^2 à y^2 sous le radical donne un résultat positif $\alpha^2 y_0^2$. Les asymptotes sont donc dans la région réelle de la courbe.

Nous pouvons écrire la quantité sous le radical $-(y^2 + k^2)(y^2 - y_1^2)$, avec $y_0 < y_1$.

L'axe Ox rencontre la courbe aux deux points réels $x = x_1 = \pm \dfrac{a\rho}{y_0}$. Enfin pour $y^2 = y_1^2$, le radical étant égal à αy_1, les points d'intersection à distance finie de la courbe et de ses asymptotes sont

$$x_2 = \frac{\alpha(y_1 - \beta)}{2y_1}, \qquad y = y_1,$$

et

$$x_3 = \frac{\alpha(y_1 + \beta)}{2y_1}, \qquad y = -y_0.$$

La courbe présente trois formes distinctes suivant que l'on a $y_1 > \beta$, $y_1 = \beta$, ou $y_1 < \beta$, ce qui a lieu lorsque $\alpha^2\beta^2 - (\beta^2 + a^2)$ est négatif, nul ou positif.

En supposant $y_1 > \beta$, on a le tableau suivant :

y	$-y_1$	$-y_0$	0	$+y_0$	β	$+y_1$
x_2	x_4	$+\infty \mid -\infty$	$-x_1$	x_2	0	x_3
x_3	x_4	x_2	$-x_1$	$+\infty \mid -\infty$	0	x_2

Il est aisé de vérifier que l'on a $x_4 > x_5$, ces deux abscisses étant d'ailleurs positives pour $y_1 > \beta$ (*fig.* 1).

Lorsque $y_1 = \beta$, $x_2 = 0$ et le point B est de rebroussement (*fig.* 2). Si l'on a $y_1 < \beta$, x_2 devient négatif et le point B est un point double isolé (*fig.* 3).

2e Cas. $\beta = \rho$. La courbe n'est réelle que si l'on a $\alpha^2 - a^2 > 0$.

Les formes de courbes ne diffèrent des précédentes qu'en ce que la droite $y = 0$ est asymptote double. Nous donnons le tracé dans le cas où l'on a $y_1 > \beta$ (*fig.* 4).

3e Cas. $\beta < \rho$. Les deux racines du trinome en y^2 placé sous le radical sont de même signe. Elles sont positives, si l'on a $(\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 - a^2) > 0$. Soient alors y_1^2, y_2^2 ces racines. On doit avoir $(y^2 - y_1^2)(y^2 - y_2^2) < 0$. La courbe ne présente plus de branches infinies. Le point double B peut être réel, isolé ou de rebroussement. Ce dernier cas se présente lorsque β est égal à y_1 ou y_2, ce qui a lieu lorsque la quantité $\alpha^2\beta^2 - (\beta^2 + a^2)\rho^2$ étant nulle, $\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - \rho^2$ est négatif ou positif. Le point de rebroussement peut donc être sur l'une ou l'autre des droites $y = y_1$, $y = y_2$. D'où les tracés donnés (*fig.* 5, 6, 7, 8).

Au lieu de discuter les abscisses des points de la courbe, nous aurions pu chercher la nature des points de rencontre avec les droites passant par le point double B.

On a, en posant $y - \beta = tx$,

$$(1 + t^2)y^2 - 2\alpha t y + a^2t^2 - \beta^2 + \rho^2 = 0.$$

Les valeurs de y sont réelles si l'on a

$$-a^2t^4 + (\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - \rho^2)t^2 + \beta^2 - \rho^2 > 0.$$

Or, en remplaçant t par $\frac{y}{a}$ dans cette inégalité, on trouve précisément la condition pour que

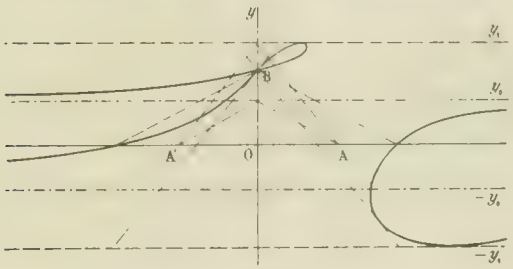


Fig. 1.

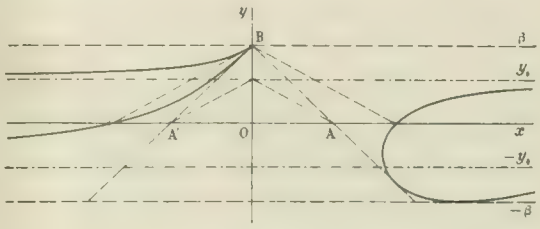


Fig. 2

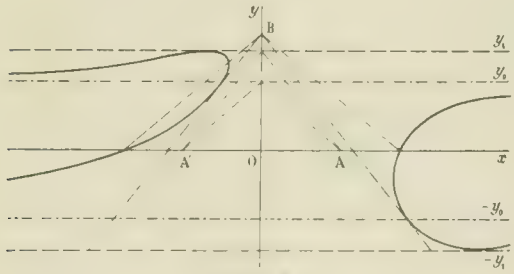


Fig. 3.

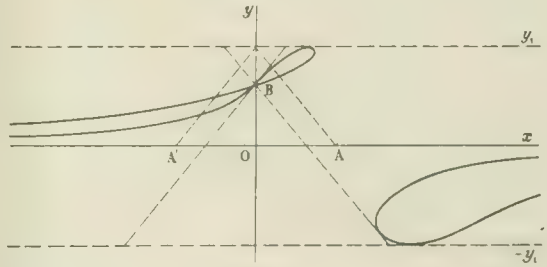


Fig. 4.

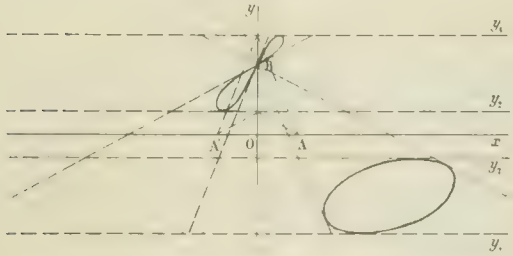


Fig. 5

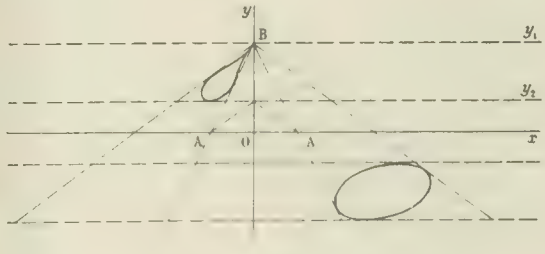


Fig. 6

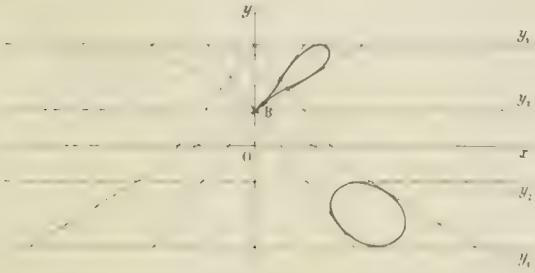


Fig. 7.

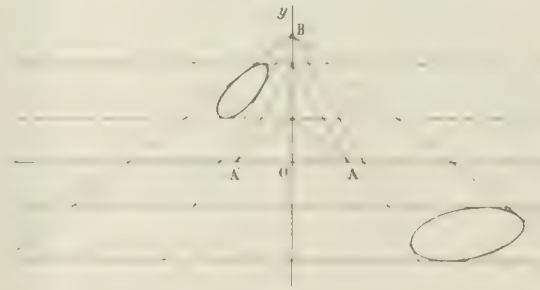


Fig. 8.

l'abscisse soit réelle, condition qui a servi de base à la précédente discussion. Aux valeurs remarquables de l'ordonnée y_0, y_1, y_2 correspondent pour t les valeurs t_0, t_1, t_2 égales respectivement à $\frac{y_0}{a}$, $\frac{y_1}{a}$, $\frac{y_2}{a}$,

et qui déterminent de nouvelles régions pour la quartique. Les droites issues de B et de coefficients angulaires $-t_1$, $+t_2$ sont les tangentes à la courbe menées du point double ; celles de coefficients angulaires $\pm t_0$ donnent les points sur l'axe Ox.

VASNIER.

QUESTIONS PROPOSÉES

1090. — On donne la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n.q^\alpha},$$

dans lequel q désigne le nombre des chiffres de n, et α un nombre plus grand que l'unité.

Montrer, à l'aide de tel théorème qu'il conviendra, que cette série est convergente.

Étudier ensuite le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, et voir quelle particularité intéressante il présente, étant donnée la convergence de la série.

M. B.

1091. — Résoudre le système

$$\begin{cases} X + Y = a_0, \\ Xx + Yy = a_1, \\ Xx^2 + Yy^2 = a_2, \\ Xx^3 + Yy^3 = a_3. \end{cases}$$

X, Y, x, y, sont les inconnues. Former l'équation du second degré dont x et y sont racines.

De même, résoudre le système

$$\begin{cases} X + Y + Z = a_0, \\ Xx + Yy + Zz = a_1, \\ Xx^2 + Yy^2 + Zz^2 = a_2, \\ Xx^3 + Yy^3 + Zz^3 = a_3, \\ Xx^4 + Yy^4 + Zz^4 = a_4, \\ Xx^5 + Yy^5 + Zz^5 = a_5. \end{cases}$$

Former l'équation dont x, y, z sont les co-racines. Généralisation.

APPLICATION. — Mettre un polynome entier en x de degré impair $2n+1$ sous la forme d'une somme de $n+1$ puissances $2n+1^{\text{ièmes}}$ de binomes du premier degré.

Résolution de l'équation du troisième degré.

***1092.** — Soient C et C′ deux coniques telles qu'il existe des quadrilatères inscrits à C et circonscrits à C′. Soit C_1 la polaire réciproque de C par rapport à C′ et soit Γ la conique enveloppe des droites divisées harmoniquement par C et par C′ :

1° Il existe des triangles inscrits à C et conjugués à C_1.

2° Il existe des hexagones inscrits à C et conjugués à Γ.

3° Relation entre ces triangles et ces hexagones.

4° Profiter de ces résultats pour établir la relation entre les coefficients de l'équation en λ de C et de Γ, exprimant qu'il y a des hexagones inscrits à C et circonscrits à Γ.

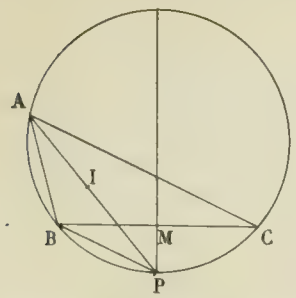
E. DUPORCQ.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE

1045 — *Dans un triangle* ABC, *la base* BC *reste fixe et le centre* I *du cercle inscrit jouit de cette propriété que* $\overline{IA}^2 = IB.IC$. *Construire les courbes lieux des points* I *et* A.

Les triangles qui vérifient la relation $\overline{IA}^2 = IB.IC$ ont été signalés par M. Emmerich (*Mathesis*, 1900)



comme étant les triangles non isocèles dont les bissectrices extérieures en B et C sont égales; l'auteur obtient d'abord la relation sous la forme

$$(1) \qquad \sin^2 \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

d'où résulte l'inégalité $A \leqslant 60°$; il en déduit $IA = r' - r$, avec les notations habituelles, et tire de là une construction du triangle quand on connaît a et A.

Cette dernière relation donne encore

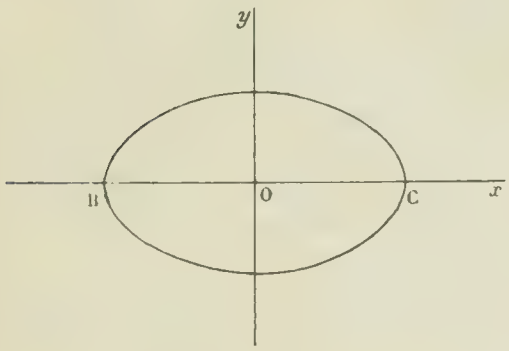
$$(2) \qquad IA = 2\,PM,$$

qui résulte d'ailleurs directement de la relation (1) puisque l'on a

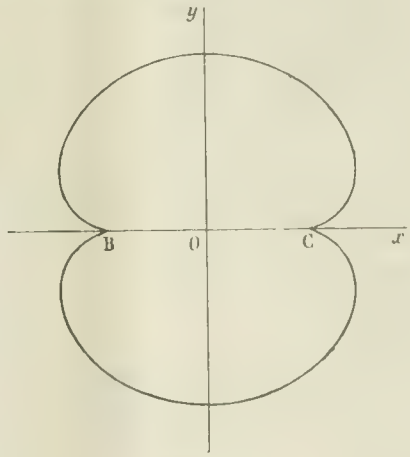
$$PM = PB \sin \frac{A}{2} = 2R \sin^2 \frac{A}{2}, \qquad IA = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2};$$

on a donc

$$PA = PI + IA = PB + 2PM.$$



Lieu de I.



Lieu de A.

ce qui donne une construction simple du triangle quand on connaît a et A.

On peut enfin, de la relation (1), déduire pour le point I la relation simple

$$y = \frac{a \cos^2 I}{\sin I}$$

entre l'angle $\widehat{BIC}$ et la distance du point I à la droite BC.

Il est dès lors facile de construire les lieux des points A et I lorsque la base BC est fixe, en faisant varier l'angle A de 0° à 60°; la courbe qui est le lieu des points A a deux points de rebroussement en B et C.

G. F.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1036. — *On considère dans un plan deux systèmes d'axes, xOy, $x'O'y'$. Trouver un point qui ait mêmes coordonnées dans les deux systèmes. Discussion.*

Soient x_0, y_0 les coordonnées de O' dans le système d'axes xOy, et α, β les coefficients directeurs de $O'x'$, α', β' ceux de $O'y'$ (*fig.* 1).

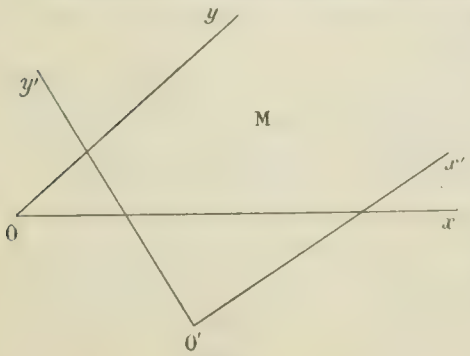


Fig. 1

Appelons x, y les coordonnées d'un point M dans le premier système, x', y' ses coordonnées dans le second.

On connaît les relations

$$x = \alpha x' + \alpha' y' + x_0,$$
$$y = \beta x' + \beta' y' + y_0.$$

Si les coordonnées de M sont les mêmes dans les deux systèmes on aura $x = x'$, $y = y'$, et x et y seront déterminés par les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} (\alpha - 1)x + \alpha' y + x_0 = 0, \\ \beta x + (\beta - 1)\, y + y_0 = 0. \end{cases}$$

I. — Supposons

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha' \\ \beta & \beta' - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux équations auront une solution et une seule qui sera

$$x = \frac{\alpha' y_0 - (\beta' - 1) x_0}{(\alpha - 1)(\beta' - 1) - \alpha'\beta}, \qquad y = \frac{\beta x_0 - (\alpha - 1) y_0}{(\alpha - 1)(\beta' - 1) - \alpha'\beta}.$$

Donc on aura un seul point M.

Construction graphique du point M. — Soit A le point de rencontre de Oy et de $O'y'$ (*fig.* 2). Sur $O'y'$ je porte AD égal à AO en grandeur et en signe, par D je mène une parallèle DE à Ox, qui rencontre Ox en E. Je joins AE. Par B, point de rencontre des deux axes des x, je mène BT parallèle à AE. Cette droite est le lieu des points tels que si par l'un d'eux M on mène les parallèles à Oy et $O'y'$ ces droites limitées à leurs intersections avec Ox et $O'x'$ sont égales.

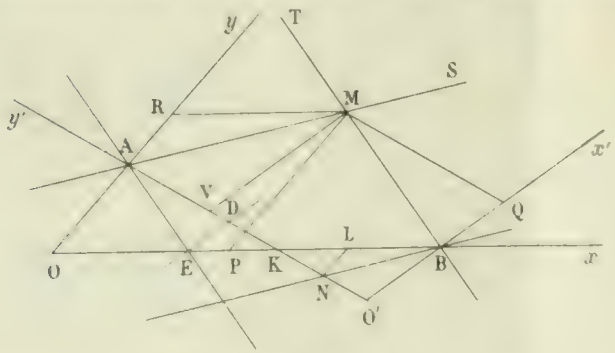


Fig. 2.

On démontre facilement l'égalité des droites MP et MQ en remarquant la similitude des triangles AOE et PMB d'une part, AED et MBQ de l'autre. De même sur Ox je porte BL égal à BO' en grandeur et signe, je mène LN parallèle à Oy, je joins NB et par A je mène AS parallèle à NB.

Les droites AS et BT se coupent en un point M qui est le point cherché. On démontrerait comme précédemment l'égalité des droites MV et MR. On a donc

$$MQ = MP \qquad \text{et} \qquad MV = MR.$$

Donc le point M a mêmes coordonnées dans les deux systèmes.

2. — Le déterminant (2) est nul ; on a

$$(\alpha - 1)(\beta' - 1) - \alpha'\beta = 0.$$

1° Supposons qu'aucun des nombres $\alpha - 1$, $\beta' - 1$, α', β ne soit nul. Menons par l'origine O des parallèles aux axes du second système et traçons le cercle de rayon égal à l'unité (*fig.* 3). On voit facilement que les coefficients directeurs de la droite xx' sont proportionnels à $(\alpha - 1)$ et β, et que ceux de yy' sont proportionnels à α' et $(\beta' - 1)$.

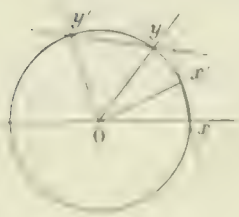


Fig. 3.

Fig. 4.

La relation $(\alpha - 1)(\beta' - 1) - \alpha'\beta' = 0$ exprime que ces deux droites xx' et yy' sont parallèles (*fig.* 4).

Si cette condition est réalisée, *l'angle* xOy' *est égal à l'angle* $x'Oy$ *et de signe contraire*.

Algébriquement. $\alpha - 1$ étant différent de 0, si $\alpha y_0 - (\beta' - 1) x_0 = 0$, les deux équations n'auront aucune solution commune.

Si $\alpha y_0 - (\beta' - 1) x_0 = 0$, nous aurons une infinité de solutions communes. Les deux équations se réduisent à une seule.

Géométriquement. La droite $\alpha' y - (\beta' - 1)x = 0$ est la parallèle aux droites xx' et yy' menée par O.

Si O′ n'est pas sur cette droite, les deux droites AS et BT sont parallèles, donc pas de point de rencontre à distance finie (*fig.* 5.)

Si O′ est sur cette droite, les deux droites BT et AS sont confondues; tous les points de la droite AB ont donc mêmes coordonnées dans les deux systèmes d'axes (*fig.* 6).

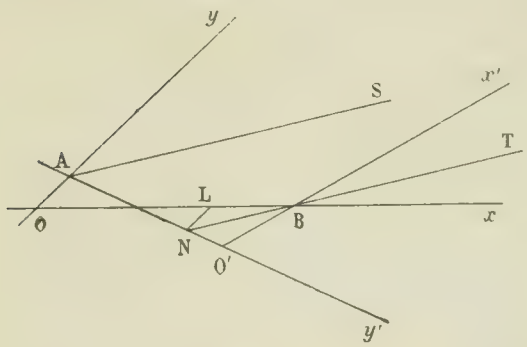


Fig. 5.

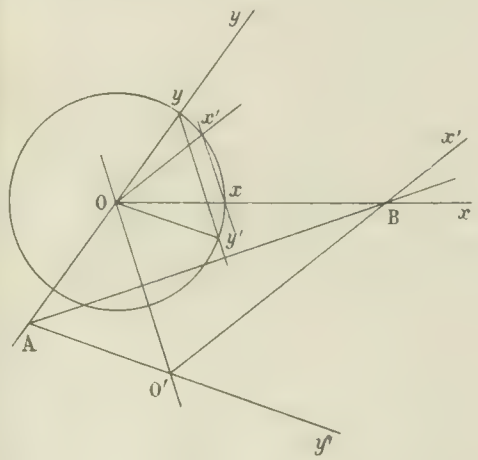


Fig. 6.

On démontrera en effet facilement que dans ce cas BT et AS sont toutes deux perpendiculaires au milieu de OO′.

2° Supposons maintenant que l'un ou plusieurs des nombres $\alpha - 1$, $\beta' - 1$, α', β soient nuls. On voit facilement que les seuls cas à considérer sont les suivants (nous supposons toujours le déterminant (2) nul) :

a) $\alpha - 1 = 0$, qui entraîne $\beta = 0$;

b) $\beta - 1 = 0$, qui entraîne $\alpha = 0$;

c) $\alpha - 1 = 0$, $\beta' - 1 = 0$ $\alpha' = 0$, $\beta = 0$.

a). *Algébriquement.* Les équations deviennent

$$\alpha' y + x_0 = 0, \qquad \beta' - 1)y + y_0 = 0.$$

Si l'on a $\alpha' y_0 - (\beta' - 1)x_0 \neq 0$, aucune solution.

Si l'on a $\alpha' y_0 - (\beta' - 1)x_0 = 0$, une infinité de solutions : tous les points M seront sur la droite $\alpha' y + x_0 = 0$.

Géométriquement. Dans ce cas, O′x' est parallèle à Ox et de même sens. O′y' et Oy font des angles quelconques (*fig.* 7).

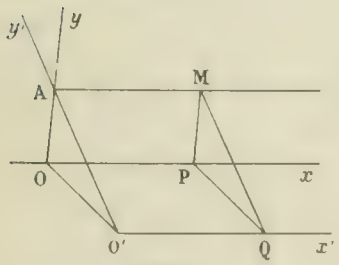


Fig. 7

Si O′ a une position quelconque, on n'aura aucun point M répondant à la question.

Soit M un point du plan; si on avait OP = O′Q, on en déduirait PQ = OO′ et ces deux droites seraient parallèles. Les deux triangles AOO′ et MPQ seraient égaux et l'on aurait AO = MP, AO′ = MQ. Pour que les ordonnées soient les mêmes, il faudrait que AO = AO′, ce qui n'est pas en général.

La droite $\alpha' y - (\beta - 1)x = 0$ est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle yAy'. Si O′ est sur cette droite, le triangle AOO′ est isocèle et on a AO = AO′.

Alors tous les points de la parallèle à Ox menée par A répondent à la question.

b). $\beta - 1 = 0$, $\alpha = 0$. Ce cas est le même que le précédent; il suffit d'intervertir les rôles des axes des x et des y. Les deux axes des y sont parallèles.

On n'aura aucune solution si $(\alpha - 1)y_0 - \beta x_0$ est différent de 0. Et si $(\alpha - 1)y_0 - \beta x_0 = 0$, tous les points de la parallèle à Oy menée par B répondront à la question.

c). $\alpha - 1 = 0$, $\beta - 1 = 0$, $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$. Les axes de même nom sont parallèles et de même sens. Les équations se réduisent à $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. O et O' ne coïncidant pas, il n'y a pas de point à distance finie répondant à la question. On peut dire que les points cherchés sont les points de la droite de l'infini.

Cas particulier où O *et* O' *coïncident.* — On a alors $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Les équations deviennent

$$(\alpha - 1)x + \alpha' y = 0, \qquad \beta x + (\beta' - 1)y = 0.$$

1° $(\alpha - 1)(\beta' - 1) - \alpha'\beta = 0$. On n'a pas d'autre solution que l'origine des coordonnées.

2° $\alpha - 1 = \beta' - 1 = \alpha'\beta = 0$.

Supposons tous les termes de ce déterminant différents de zéro.

Tous les points dont les coordonnées vérifient l'équation $(\alpha - 1)x + \alpha' y = 0$ répondent à la question.

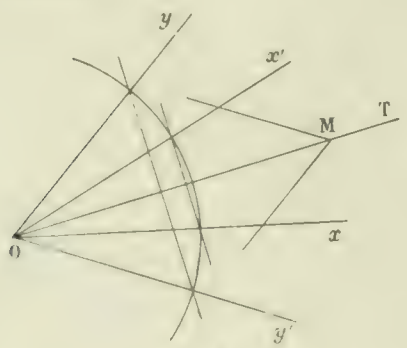


Fig. 8

Dans ce cas, les angles xOy et $x'Oy'$ sont égaux et de sens contraires (*fig.* 8). Menons la bissectrice de l'angle xOx' qui est aussi celle de l'angle yOy'. Tous les points de cette droite répondent à la question.

Si l'un ou plusieurs des termes du déterminant sont nuls les deux systèmes ont un axe commun. Tous les points de cet axe répondent à la question.

Si les quatre termes du déterminant sont nuls, les deux systèmes coïncident. Tout point du plan satisfait à la question.

Cas où les deux systèmes d'axes sont rectangulaires. —

1° $xOy = +\frac{\pi}{2}$. Les équations sont

$$x\cos\varphi - (1 - y\sin\varphi - x_0 = 0, \qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi - (1 - y_0 = 0.$$

Le déterminant des inconnues n'est nul que si l'on a $\cos\varphi - 1 = 0$; alors les axes de même nom sont parallèles. Si les axes ne sont pas parallèles, on a un seul point M qu'on construit facilement. Si les axes sont parallèles, tous les points de la droite de l'infini et ceux-là seuls répondent à la question.

2° $xOy = -\frac{\pi}{2}$. Les équations sont

$$x\cos\varphi - (1 - y\sin\varphi - x_0 = 0, \qquad x\sin\varphi - y(\cos\varphi - 1) - y_0 = 0.$$

Le déterminant des inconnues est nul quel que soit φ, ce qui était à prévoir puisque les angles des axes sont égaux et de sens inverse. On n'aura aucune solution, ou une infinité situés sur la droite $x\cos\varphi - (1 - y\sin\varphi - x_0 = 0$, selon que O' sera ou ne sera pas sur la droite $y(\cos\varphi - 1) - \sin\varphi x = 0$.

J. MARCHAL.

1037. — *Deux cercles dont les centres sont fixes, A et B, varient en restant tangents extérieurement. Trouver le lieu des points de contact des tangentes communes extérieures et l'enveloppe de ces tangentes.*

Prenons pour origine le centre de l'un des cercles et pour axe des x la droite qui joint ce point au centre du second cercle, pour axe des y la perpendiculaire à cette droite ; désignons la distance des centres par $2a$, le rayon du premier cercle par R et, par suite, le rayon du second cercle par $2a - R$. Si nous appelons en outre φ l'angle que fait Ox avec le rayon du premier cercle qui aboutit au point de contact avec l'une des deux tangentes communes autres que l'axe radical, l'équation de cette tangente pourra prendre les deux formes

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - R = 0, \qquad (x - 2a)\cos\varphi + y \sin\varphi - 2a + R = 0,$$

et en identifiant ces deux équations nous aurons

$$R = a(1 + \cos\varphi).$$

Or R et φ sont les coordonnées polaires du point de contact avec le premier cercle ; le lieu de ce point est donc une cardioïde ayant Ox pour axe de symétrie et le point O pour point de rebroussement.

Le lieu du point de contact avec le second cercle est une cardioïde symétrique de la précédente par rapport au milieu de la ligne des centres.

Portons la valeur de R dans la première équation de la tangente commune ; nous aurons

$$(x - a)\cos\varphi + y \sin\varphi - a = 0,$$

et sous cette forme, on reconnaît l'équation de la tangente à un cercle de rayon a et ayant pour centre le milieu de la ligne des centres. Ce cercle est donc l'enveloppe cherchée.

M. LAURENCE.

Bonnes solutions : MM. J. Marchal ; Y. Collin, à Laval ; M. Josem, élève au lycée de Nancy ; P. Thonet ; Deboher, à Saint-Etienne ; R. Bouvaist.

Solution géométrique. — Soient O le milieu de AB, M et N les deux points de contact des cercles A et B avec l'une de leurs tangentes communes ; abaissons de O une perpendiculaire sur MN, OC ; comme OC est parallèle à AM et BN et équidistant de ces deux rayons, nous avons $OC = \frac{AM + BN}{2}$ ou $OC = a$. Le lieu du point C est donc le cercle décrit sur AB comme diamètre. La droite MN enveloppe ce cercle. Les lieux des points M et N sont les podaires de ce cercle par rapport aux points A et B ; ce sont donc deux cardioïdes égales, symétriques l'une de l'autre par rapport au point O.

M. LAURENCE.

Solutions semblables : MM. Vasnier ; P. Thonet ; G. Fauvernier ; P. Tribier.
Autres solutions : MM. A. Cans ; H. Belbenoît, à Arras ; J. Marchal.

1044. — *On donne un cercle O, une tangente XD à ce cercle en un point D et l'on considère les paraboles bitangentes au cercle et dont le sommet A est sur la droite XD. Soit BC la corde des contacts de la parabole et du cercle. On demande :*

1° *Le lieu de l'intersection de BC avec l'axe de la parabole ;*

2° *Le lieu du pôle de BC ;*

3° *Les lieux du foyer F et de son inverse par rapport à O, la puissance d'inversion étant* $\frac{R^2}{4}$.

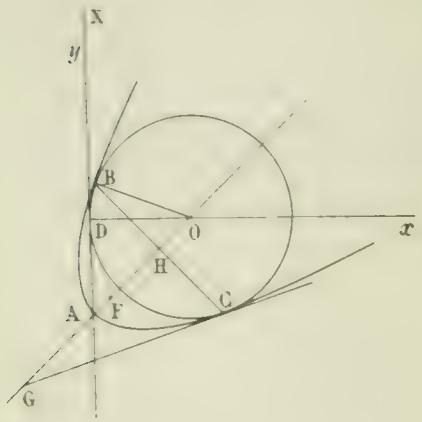
Prenons pour axe des x le diamètre DO et pour axe des y la tangente DX. L'équation du cercle sera

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0,$$

celle de la parabole,

$$x^2 + y^2 - 2Rx - (x \cos\varphi + y \sin\varphi - p)^2 = 0,$$

en représentant par $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ la corde des contacts.



L'axe de la parabole a pour équation $\dfrac{x - R}{\cos \varphi} = \dfrac{y}{\sin \varphi}$; car il est évident que cette droite est la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur la corde des contacts ; son point de rencontre avec Oy a pour coordonnées $x = 0$, $y = -R \operatorname{tg} \varphi$, et il suffit maintenant d'exprimer que ce point est sur la parabole, ce qui donne

$$R^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = (R \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi + p)^2;$$

nous en déduisons deux valeurs de p,

$$p = -R \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \pm R \operatorname{tg} \varphi.$$

Mais il suffit de prendre l'un des deux signes, car si on considère les deux équations de la corde des contacts qui leur correspondent,

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + R \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \mp R \operatorname{tg} \varphi = 0;$$

on passe de l'une à l'autre en changeant φ en $\varphi + \pi$.

L'équation générale des paraboles de l'énoncé est donc

$$x^2 + y^2 - 2Rx - (x \cos \varphi + y \sin \varphi + R \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi - R \operatorname{tg} \varphi)^2 = 0.$$

1. Pour avoir le lieu de l'intersection de BC avec l'axe de la parabole, il faut éliminer y entre les deux équations

$$\frac{x - R}{\cos \varphi} = \frac{y}{\sin \varphi}$$

et

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + R \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi - R \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

En multipliant le terme $-R \operatorname{tg} \varphi$ par $\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}$, on rend la seconde équation homogène en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ et il n'y a plus qu'à remplacer $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ par les quantités proportionnelles $x - R$ et y. Ce calcul donne, après suppression des facteurs $x - R$, $(x - R)^2 + y^2$, et une élévation au carré,

$$(1) \qquad y^2 (x + R) - x^2 (x - R) = 0.$$

Cette équation représente une strophoïde droite ayant pour point double l'origine des coordonnées et pour sommet le point (R, 0), c'est-à-dire le centre du cercle.

Le facteur $x - R = 0$ ne correspond à aucune position particulière de la parabole ; c'est un facteur étranger qui a été introduit par notre méthode de calcul, laquelle exige une division par $\cos \varphi$, facteur qui correspond justement à $x - R$ dans l'élimination précédente. Le facteur $(x - R)^2 + y^2$ correspond à deux paraboles impropres du faisceau et que nous obtenons en donnant à $\operatorname{tg} \varphi$ les valeurs $+i$ et $-i$; pour ces valeurs, $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ sont infinis et la parabole se réduit à la droite double $(x + iy - R)^2 = 0$ ou $(x - iy - R)^2 = 0$; dans chacun de ces cas, la corde des contacts et la perpendiculaire abaissée du centre coïncident avec la droite double. Il est facile de comprendre ce fait au point de vue géométrique, en se rappelant que les deux droites $x - R \pm iy = 0$ sont tangentes au cercle à l'infini et que le sommet d'une parabole réduite à une droite double est indéterminé sur cette droite.

2. Le pôle de BC est le même dans le cercle et dans la parabole ; si donc on appelle x et y les coordonnées de ce point, la corde des contacts a pour équation

$$X(x - R) + Yy - Rx = 0,$$

et si on identifie cette équation avec celle de BC, on a les relations

$$\cos\varphi = \lambda(x - R), \qquad \sin\varphi = \lambda y \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg}\varphi(1 - \sin\varphi) = \lambda x,$$

où λ désigne un certain facteur de proportionnalité. Il est facile d'éliminer φ et λ entre ces équations : il suffit de porter $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ dans la dernière, puis d'y remplacer λ par $\frac{1}{\sqrt{(x-R)^2 + y^2}}$; on trouve, après suppression du facteur $x - R$,

$$(2) \qquad x(x^2 + y^2) + R(y^2 - x^2) = 0,$$

équation qui représente la strophoïde déjà trouvée. L'existence de la solution supprimée $x - R = 0$ donne lieu aux remarques déjà faites.

3. Le foyer de la parabole envisagée est le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la parabole ; or l'équation de celle-ci est $C - P^2 = 0$, C étant le premier membre de l'équation d'un cercle et P le premier membre de l'équation d'une droite ; il y a donc un cercle focal en évidence, $C = 0$; nous les aurons tous en écrivant ainsi l'équation :

$$C + 2\mu P + \mu^2 - (P + \mu)^2 = 0.$$

L'équation générale des cercles focaux est $C + 2\mu P + \mu^2 = 0$. Le centre de l'un de ces cercles a pour coordonnées

$$x = R - \mu\cos\varphi, \qquad y = -\mu\sin\varphi,$$

et nous avons à exprimer qu'il est sur le cercle, c'est-à-dire qu'il annule

$$\frac{1}{2}f'_t, \qquad \text{ou} \qquad -Rx + \mu(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + 2\mu R\operatorname{tg}\varphi(\sin\varphi - 1) + \mu^2;$$

cette nouvelle équation, jointe aux deux qui donnent le centre, conduit au lieu du foyer : il n'y a plus qu'à éliminer φ et μ. Le calcul se fait comme précédemment : il donne d'abord, toujours pour la même cause, $x - R = 0$, puis la solution

$$(3) \qquad 4xy^2 + (x - R)(2x - R)^2 = 0,$$

qui représente une strophoïde ayant pour sommet le point O et pour point double le point $x = \frac{R}{2}$, $y = 0$. Le premier fait est évident ; on s'assure du second en portant les axes parallèlement à eux-mêmes au point $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$.

Portons les axes au point O, l'équation (3) deviendra

$$4y^2(x + R) - x(2x + R)^2 = 0;$$

en y remplaçant x et y par $\frac{R^2x}{4(x^2 + y^2)}$ et $\frac{R^2y}{4(x^2 + y^2)}$, nous aurons l'équation de l'inverse de cette courbe par rapport au point O avec la puissance $\frac{R^2}{4}$. Nous retombons sur la même équation ; la strophoïde (3) se transforme en elle-même.

Solution géométrique. — La longueur de la tangente menée d'un point de la parabole à un cercle focal est égale à la distance de ce point à la corde des contacts ; donc $AD = AH$. Mais $AH = AG$, d'après la propriété de la sous-tangente. Par conséquent, les points H et G décrivent la même strophoïde définie à l'aide de l'angle droit xDy et du point fixe O.

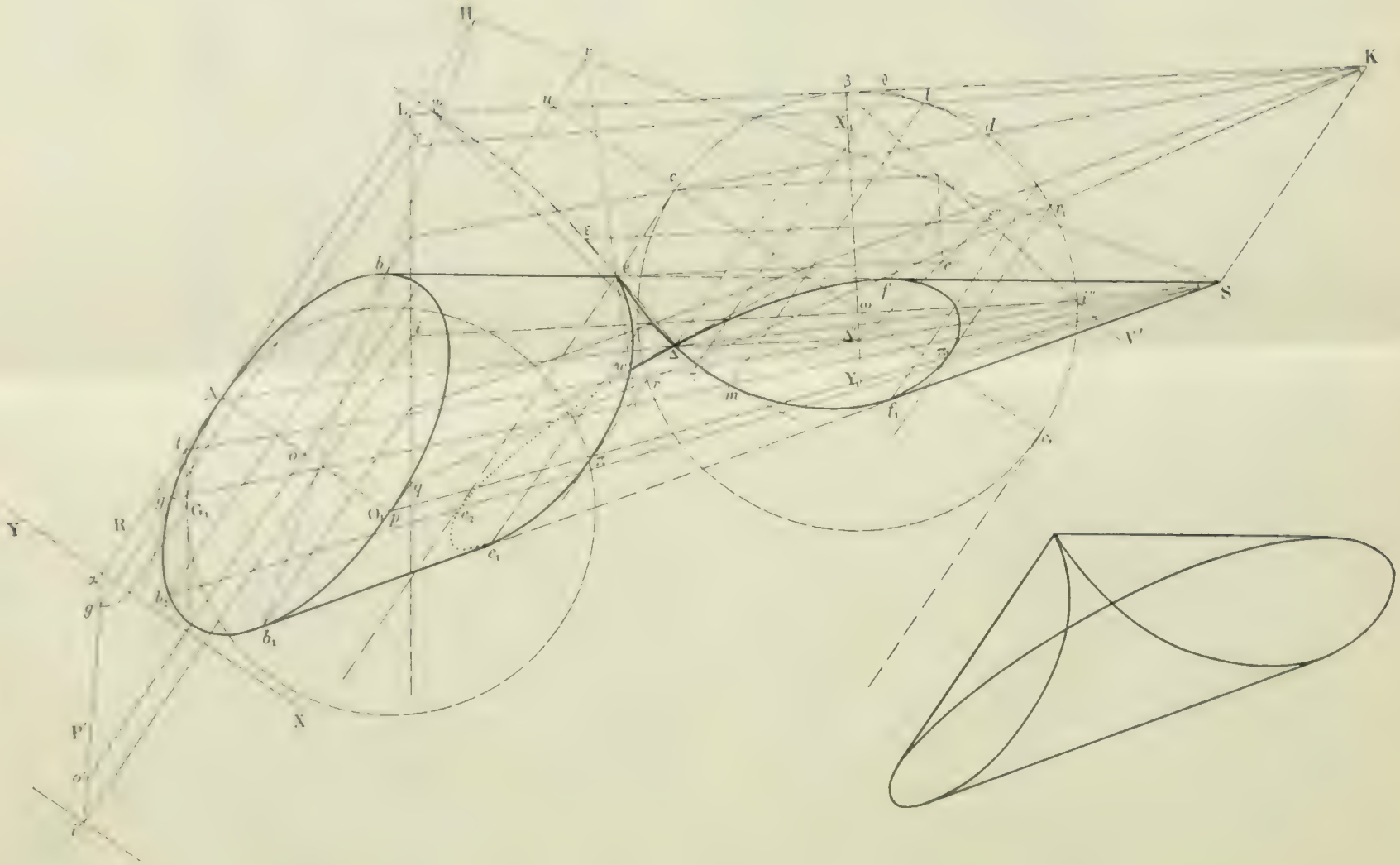
OC étant normale en C à la parabole, le foyer F est le milieu de OG ; donc le point F décrit la strophoïde homothétique de la précédente dans le rapport $\frac{1}{2}$. Enfin on a $OH \cdot OG = R^2$. La première strophoïde est donc sa propre inverse dans l'inversion de centre O et de puissance égale à R^2. La seconde strophoïde se transformera alors en elle-même pour la puissance $\frac{R^2}{4}$.

M. LAURENCE et J. MARCHAL.

M. Vasnier nous a envoyé une solution analogue très simple, où la propriété du cercle focal est démontrée géométriquement en quelques signes.

Bonnes solutions analytiques : MM. E.-N. Barisien ; R. Bouvaist (par les coordonnées polaires) ; F. Soles ; L. Odor, pensionnat Valbenoite.

Solutions géométriques analogues à la précédente : MM. P. Tridier ; H. Belbenoit, à Arras.


K
S
Y
R
X

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

INTERSECTION D'UN CÔNE ET D'UN CYLINDRE.

984. — *On demande de déterminer la projection horizontale de l'intersection d'un cône et d'un cylindre, les surfaces étant définies de la manière suivante :*

1° Le cône a sa base contenue dans un plan donné par sa trace horizontale RH (R *sur le côté gauche du cadre à* 240mm *du côté supérieur,* H *sur le côté supérieur à* 180mm *du côté gauche) et son angle* (60°) *avec le plan horizontal, de manière que le rabattement de la ligne de plus grande pente soit* αP'.

La base de ce cône est un cercle tangent en A *au plan horizontal* (A *milieu de* RH), *son rayon est de* 65mm.

Le sommet du cône est le point S *du plan horizontal (la droite* SA *fait un angle de* 50° *avec* RH), *la longueur* AS = 320mm.

2° Le cylindre a sa base contenue dans un plan donné par sa trace horizontale LβK *parallèle aux grands côtés du cadre et son angle* (45°) *avec le plan horizontal. Cette base se projette horizontalement suivant un cercle* ωβ *tangent en* β *à la droite* LK, *le rayon de ce cercle est de* 70mm. *Les génératrices du cylindre sont horizontales et parallèles à la droite* RH ; *celle qui passe par* β *rencontre la droite* AS *au point* Δ *tel que* AΔ = 140mm.

On représentera le cône opaque en supprimant de cette surface la portion comprise dans le cylindre, cette dernière surface étant enlevée. On limitera le cône au plan de la base donnée.

On construira ensuite la projection horizontale du solide commun au cône et au cylindre en admettant la transparence des surfaces qui limitent ce solide.

(*École Centrale. 2e session 1900.*)

Remarquons d'abord qu'il manque une donnée, car LK, parallèle aux grands côtés du cadre, est indéterminée. Nous avons fait l'épure en prenant un ensemble de données, à peu près semblable à celui du croquis accompagnant le texte.

Détermination d'un point de l'intersection. — L'ellipse projection de la base du cône étant construite, nous avons le contour apparent horizontal du cône ; celui du cylindre est obtenu immédiatement.

Pour avoir l'intersection de ces deux surfaces nous emploierons des plans auxiliaires passant par S et parallèles aux génératrices du cylindre ; ils passeront tous par SK. L'intersection des plans LK et RH des deux directrices est projetée en L*i*.

Ceci étant, prenons sur la directrice circulaire du cône, directrice rabattue sur le plan horizontal selon le cercle de centre O_1 et de rayon O_1A, un point quelconque G_1 qui se relève en (g,g'). La génératrice correspondante du cône est projetée en S*g*. Le plan auxiliaire contenant cette génératrice, contenant SK, coupe le plan de la directrice du cône qui est parallèle à SK suivant une parallèle à SK, parallèle projetée en $g\gamma$. L'intersection de ce plan auxiliaire et du plan de la directrice du cylindre est projetée en Kγ qui rencontre la projection de cette directrice du cylindre en *l*. On a en *lm* la projection de l'une des génératrices du cylindre contenues dans le plan auxiliaire. On en déduit *m*, point de rencontre de S*g* et de *lm*, qui est la projection d'un point quelconque de l'intersection des deux surfaces. La tangente $m\tau$ en ce point est l'intersection des plans tangents S*gt* et $l0\tau$ aux deux surfaces en ce point.

Points remarquables. — Les plans auxiliaires limites sont les plans K*qp* et KLA. Le premier donne les points π et π_1 où les tangentes sont les génératrices $r\pi$ et $r_1\pi_1$ du cylindre. Le second donne seulement le point Δ qui est un point double réel de l'intersection. Nous avons obtenu directement la tangente Δμ en ce point Δ en construisant la courbe d'erreur, section du plan LβV' de la directrice du cylindre, avec le cône du second degré qui a pour sommet Δ et pour directrice la courbe d'intersection des deux surfaces données. Cette courbe d'erreur est une conique que nous avons construite par points ; un de ses points est déterminé en (ξ,ξ'), point de rencontre de $(\Delta e,\Delta''e'')$ avec LβV'. Cette courbe d'erreur rencontre en μ la trace LH du plan

tangent commun en Δ, c'est-à-dire du plan horizontal de projection, sur le plan $L\beta V$. Alors $\Delta\alpha$ est tangente en Δ à l'un des arcs de courbe qui passent par ce point. L'autre tangente $\Delta\gamma$ est le quatrième rayon d'un faisceau harmonique dont $\Delta A, \Delta\alpha$, et $\Delta\beta$ sont les trois autres.

Nous avons ensuite déterminé les points de l'intersection situés sur les contours apparents des deux surfaces. Sur la génératrice Sb nous avons trouvé e et f, et sur la génératrice Sb les points e et f. Sur la génératrice ce du cylindre nous obtenons e et e_1.

Nous remarquons que les deux génératrices de contour apparent horizontal Sb et ce se coupent en e, qui est alors un point de rebroussement de la projection horizontale.

Ligne des points doubles. — La ligne des points doubles est la projection de l'intersection des plans diamétraux conjugués des cordes verticales. Les plans, $SHbb$ dans le cône, et $vucc$ dans le cylindre, ont leurs traces horizontales se coupant en v. Si nous remarquons que e est la projection d'un point commun à ces deux plans de contour apparent horizontal, nous voyons que v est la ligne des points doubles qui passe alors par le point double en projection w.

Représentation de la surface du cône. — Nous représentons la portion de la surface opaque du cône extérieure au cylindre qui est enlevé. Les portions ef et e_1f_1 de génératrices du cône intérieures au cylindre sont enlevées. Alors tout est vu sur la portion restante du cône, sauf l'arc we_2e_1, tracé sur la portion inférieure du cône, et qui est caché par la partie supérieure $b_1e_1\pi web$ qui reste.

Pour le solide commun, figuré à part, tout est vu puisqu'on suppose les corps transparents.

N. C.

QUESTIONS PROPOSÉES

1093. — On considère un polynome du troisième degré, $ax^3 + bx^2 + cx + d$; montrer qu'il y a une infinité de trinomes du second degré, $x^2 + px + q$, dont les racines font prendre au polynome donné la même valeur.

Trouver q en fonction de p. Étudier ensuite les variations des racines de ce trinome quand p varie.

E. H.

1094. — Dans le cas où le polynome du quatrième degré $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4b'x + a'$ n'est pas une quatrième puissance exacte, trouver la condition pour qu'on puisse le mettre sous la forme

$$p(x + \alpha)^4 + q(x + \beta)^4.$$

Résoudre l'équation du quatrième degré dans ce cas.

E. H.

1095. — Dans un triangle ABC la bissectrice intérieure de l'angle A, AD, a une longueur constante et ses extrémités fixes; en outre la différence des angles B et C est constante. Trouver :

1° Le lieu des sommets B et C ;

2° Le lieu du milieu de BC ;

3° Le lieu de l'orthocentre du triangle ABC.

E. N. Barisien.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

[illegible]

12e Année. N° 5 Février 1902

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

par E. Humbert.

On appelle *lieu géométrique* une ligne simple ou complexe, dont tous les points satisfont à une condition géométrique donnée, à l'exclusion de tous les autres points du plan.

Généralement les points d'un lieu satisfont à plusieurs conditions géométriques reliées entre elles, qui ne sont pas indépendantes. Alors elles équivalent finalement à une condition unique; mais l'algèbre seule peut éclaircir complètement ce point; c'est ce que nous verrons dans l'étude analytique des cas généraux.

1° Lorsque la condition géométrique imposée aux points du lieu est unique, il arrive parfois qu'il suffit de la traduire dans le langage algébrique propre à la géométrie analytique pour obtenir de suite l'équation du lieu. C'est ainsi qu'on obtient : l'équation d'un cercle; l'équation d'une ellipse, d'une hyperbole ou d'une parabole définies par leur propriété focale élémentaire; l'équation d'une ligne aplanétique, etc. C'est ainsi encore qu'on aurait l'équation de la droite regardée comme lieu des points équidistants de deux points donnés.

Dans d'autres cas voisins de ceux-ci, la définition géométrique du lieu se traduit immédiatement par son équation en coordonnées polaires dans un système particulier; puis de là on déduit l'équation cartésienne dans le système rectangulaire d'axes attaché au système de coordonnées polaires. C'est ainsi qu'on obtient : l'équation d'une cissoïde de droite et de cercle; l'équation d'une conchoïde de droite; celle d'une conchoïde de cercle. Lorsque l'équation est demandée dans un système donné d'axes de coordonnées, on la cherchera dans un autre système, si elle est alors immédiate, puis on effectuera le changement de coordonnées qui ramène aux axes imposés.

2° Le plus souvent, le point mobile qui décrit le lieu est à l'intersection de deux courbes variables qui se meuvent et se déforment d'après des lois données, mais qui appartiennent chacune à une espèce déterminée de lignes. Analytiquement, le fait pour une courbe d'appartenir à une espèce donnée se traduit par la nature spéciale de la fonction de x, y qu'il faut annuler pour avoir l'équation de cette courbe. Dans chaque question, cette fonction se forme à l'aide de paramètres variables que l'on introduit arbitrairement dans les calculs, mais dont le choix et le nombre sont d'une importance considérable pour la simplification des calculs; ces paramètres sont reliés entre eux par diverses équations, et c'est la nature de ces équations, ainsi que la manière dont les paramètres entrent dans les équations des deux courbes variables, qui fixent les lois de mobilité et de déformation des lignes envisagées.

Désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, les paramètres variables introduits dans une question que l'on veut traiter, par x et y les coordonnées d'un point quelconque du lieu cherché. Il résulte de ce qui précède que les nombres $x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ vérifieront d'abord les équations des deux courbes mobiles, puis que les paramètres vérifieront seuls diverses relations. On aura donc un système d'équations tel que

$$\begin{gathered}
f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0, \\
\varphi(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0, \\
g_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0, \\
g_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0.
\end{gathered}$$

Nous allons montrer d'abord que $k = n - 1$.

Si l'on avait $k = n$, les $n - 2$ équations du système, contenant $n + 2$ inconnues, auraient des solutions isolées, les points qui satisfont à ce système formeraient donc un ensemble de points isolés et non un lieu. Si l'on avait $k > n$, le système serait impossible et ne serait vérifié par aucun point du plan.

Si l'on avait $k = n - 2$, on pourrait se donner arbitrairement x et y, et l'on aurait n équations pour déterminer les n paramètres ; tout point du plan satisferait aux conditions imposées, et il n'y aurait pas de lieu. Si k était moindre que $n - 2$, on trouverait chaque point du plan une infinité de fois : il n'y aurait pas davantage de lieu.

Il est bien entendu que notre raisonnement suppose toutes les équations du système distinctes les unes des autres, et qu'il s'agit ici d'un système réduit à son nombre minimum d'équations.

Le premier cas qui se présente est donc celui d'un point mobile défini comme intersection de deux courbes variables, dont les équations dépendent d'un seul paramètre arbitraire :

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0, \\ \varphi(x, y, \lambda) = 0 ; \end{cases}$$

nous supposerons d'ailleurs que ces équations sont entières par rapport à x, y et λ. Dans ce cas, on obtient le lieu en éliminant λ entre les deux équations.

En effet, soient λ_0 une valeur du paramètre et x_0, y_0 les coordonnées d'un point commun aux deux courbes qui correspondent au paramètre λ ; par définition ce point est un point du lieu. Nous avons d'ailleurs

$$f(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \qquad \varphi(x_0, y_0, \lambda_0) = 0,$$

équations qui expriment que

$$f(x_0, y_0, \lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(x_0, y_0, \lambda) = 0,$$

ont une racine commune, $\lambda = \lambda_0$; donc leur résultant est nul. Mais si l'on désigne par $R(x, y)$ le résultant de $f(x, y, \lambda) = 0$, $\varphi(x, y, \lambda) = 0$ par rapport à λ, le résultant actuel est évidemment $R(x_0, y_0)$, et l'on a $R(x_0, y_0) = 0$.

Réciproquement, si un point (x_0, y_0) vérifie l'équation $R(x, y) = 0$, c'est un point du lieu. Car $R(x_0, y_0) = 0$ exprime que $f(x_0, y_0, \lambda) = 0$ et $\varphi(x_0, y_0, \lambda) = 0$ ont une racine commune, $\lambda = \lambda_0$; on a donc $f(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, $\varphi(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, et ces équations expriment que les deux courbes relatives au paramètre λ_0 se coupent au point x_0, y_0 ; ce point est donc un point du lieu.

Il importe d'observer que nous entendons actuellement par *lieu* l'ensemble total des solutions communes aux équations (1), quand λ varie arbitrairement, sans nous soucier des origines géométriques des équations (1).

Plaçons-nous maintenant dans le cas général où la traduction en langage algébrique des conditions géométriques imposées conduit au système suivant, dans lequel les équations seront supposées entières par rapport à toutes les variables :

$$(2)\quad \begin{cases} f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0, \\ \varphi(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0, \\ \psi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0, \\ \chi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{n-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0, \end{cases}$$

et désignons par $R(x, y) = 0$ l'équation résultante du système (2), par rapport aux inconnues λ_k, c'est-à-dire la condition nécessaire et suffisante pour que les $n + 1$ équations (2) aient une solution par rapport aux lettres λ_k regardées comme inconnues. Un raisonnement très simple va nous montrer que $R(x, y) = 0$ est l'équation du lieu.

En effet, désignons par $a_1, a_2, \ldots a_n$ un système de valeurs des paramètres λ_k vérifiant les $n - 1$

équations $g_h = 0$; les deux courbes

$$f(x, y, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0, \qquad \varphi(x, y, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$$

sont alors acceptables dans les familles f et φ, et leurs points de rencontre sont des points du lieu. Soit alors (x_0, y_0) l'un d'eux; toutes les équations (2) sont vérifiées pour $x = x_0$, $y = y_0$, $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_2, \ldots \lambda_n = a_n$; par suite, si l'on fait $x = x_0$, $y = y_0$ dans le système (2), les équations de ce système ont une solution par rapport aux lettres λ_k, la solution $a_1, a_2, \ldots a_n$; donc $R(x_0, y_0)$ est nul.

Réciproquement, si $R(x_0, y_0) = 0$, les équations (2), où l'on fait $x = x_0$, $y = y_0$ ont une solution commune, $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_2, \ldots \lambda_n = a_n$; les équations $g_h = 0$ sont satisfaites pour cette solution, et, par suite, les courbes $f(x, y, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$, $\varphi(x, y, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$ sont acceptables; et, comme on a

$$f(x_0, y_0, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0, \qquad \varphi(x_0, y_0, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0,$$

ces courbes se coupent au point (x_0, y_0); c'est donc un point du lieu.

Ici encore nous appelons *lieu* l'ensemble des couples (x, y), pour lesquels les équations (2) peuvent être simultanément vérifiées, sans plus nous inquiéter des considérations géométriques qui ont conduit au système (2).

De plus nous avons supposé que dans chacun des deux cas étudiés, l'élimination a été faite correctement, c'est-à-dire de façon à conduire à la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution relativement aux paramètres. Ce n'est pas ainsi que l'élimination se fait dans la pratique : il en résulte que des facteurs étrangers s'introduisent souvent dans le résultat final. Nous reviendrons plus tard sur ce point.

3° Enfin il existe un cas plus général que le précédent et qui se présente parfois dans les applications. C'est le cas où les coordonnées du point mobile qui décrit le lieu figurent dans plus de deux des équations obtenues. On obtient alors un système de la forme suivante :

$$(3)\quad \begin{cases} f_1(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0, \\ f_2(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n+1}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0. \end{cases}$$

Nous supposerons encore les équations $f_k = 0$ entières par rapport aux lettres $x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$; mais nous ne supposerons pas, malgré l'écriture adoptée, que toutes ces équations contiennent x et y : si quelques-unes d'entre elles ne contiennent que les paramètres, il n'y aura qu'à y regarder les coefficients des termes en x et y comme nuls, en écrivant ces équations sous les formes les plus générales que leurs degrés respectifs leur imposent.

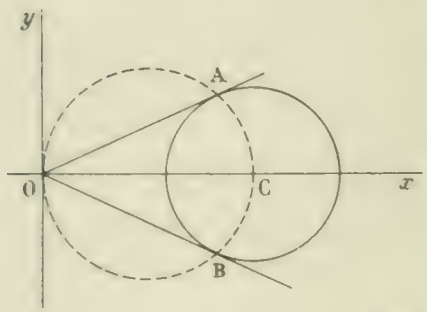
Nous démontrerions comme précédemment que le nombre de ces équations est $n+1$ et que l'équation du lieu cherché s'obtient en éliminant correctement les paramètres entre les équations (3). Pour le premier point, cela est évident. Pour établir le second, nous n'avons qu'à remarquer que la condition nécessaire et suffisante pour que le point (x, y) soit un point du lieu est que les nombres x et y fassent acquérir aux équations (3) une solution commune par rapport aux lettres λ_k.

Il nous reste maintenant à faire, relativement à la théorie des lieux géométriques, un certain nombre d'observations qui sont capitales pour l'explication des résultats obtenus dans les divers cas particuliers. Nous nous placerons dans le cas où les points du lieu sont définis par l'intersection de deux courbes mobiles et où il n'y a qu'un paramètre. Il sera alors facile au besoin d'étendre les remarques que nous allons faire aux autres cas, qui, d'ailleurs, se ramènent tous, théoriquement, au premier.

Première observation. — Il arrive parfois que certaines parties du lieu correspondent seules à la définition purement géométrique de ce lieu et que pour les autres parties les constructions proposées sont impossibles. Cela tient à ce qu'en dehors de certaines limites les éléments de cette construction géométrique deviennent tous ou en partie imaginaires sans que le point du lieu cesse d'être réel. Ce

n'est pas ici le lieu de montrer comme quoi l'application de l'algèbre à la géométrie nécessite l'introduction des imaginaires en géométrie, ni de quelle façon cette introduction se fait. Il nous suffit de constater qu'elle permettra d'expliquer l'existence de certaines parties du lieu qui, sans cela, n'eussent eu aucun sens.

Premier exemple. — *Trouver le lieu des milieux des cordes d'un cercle qui sont issues d'un point donné.* Prenons, pour axe des x positif, la demi-droite joignant le point donné au centre du cercle, et pour axe des y la droite perpendiculaire menée par le point donné. En appelant a l'abscisse du centre du cercle donné et r son rayon, son équation sera



$$(x-a)^2+y^2-r^2=0;$$

celle d'une sécante quelconque issue du point O est $y=\lambda x$, λ désignant le coefficient angulaire de cette droite.

Nous aurons les abscisses des points de rencontre de cette droite avec le cercle donné en portant λx à la place de y dans l'équation de ce cercle. Nous obtenons ainsi

$$(\lambda^2+1)x^2-2ax+a^2-r^2=0;$$

les abscisses des points de rencontre de la droite et du cercle sont les racines, x' et x'', de l'équation ci-dessus, et l'x du milieu en est la demi-somme, $x=\frac{x'+x''}{2}$, ou $x=\frac{a}{1+\lambda^2}$. Ce milieu est alors, pour chaque valeur de λ, le point de rencontre des deux droites $y=\lambda x$, $x=\frac{a}{1+\lambda^2}$; ce sont dans le cas actuel les deux courbes mobiles qui définissent le lieu. On obtient l'équation de ce lieu en éliminant λ entre leurs équations; on a ainsi successivement $\lambda x=y$, $x+\lambda^2 x=a$; puis $x+\lambda y=a$; enfin

$$x^2+y^2-ax=0.$$

Le lieu est donc le cercle décrit sur OC comme diamètre. Mais si $a>r$, c'est-à-dire si le point O est extérieur au cercle, on voit de suite qu'au point de vue purement géométrique, il n'y a que l'arc ACB, intérieur au cercle donné qui convienne, car lorsque la sécante est en dehors de l'angle des tangentes, elle ne rencontre pas le cercle. La condition de réalité des racines x', x'' de l'équation en x donne d'ailleurs sans peine les deux limites entre lesquelles doit varier λ. Quand la sécante est en dehors de l'angle AOB, elle rencontre le cercle en deux points imaginaires conjugués et leur milieu est réel; d'ailleurs l'x de ce point, toujours calculé comme demi-somme de x' et x'', est $\frac{a}{1+\lambda^2}$, quantité toujours réelle avec λ. C'est ce milieu, introduit par des calculs algébriques, qui achève de décrire le lieu.

Les méthodes de la géométrie analytique étant des méthodes analytiques, nous ne regarderons pas ces parties d'un lieu comme essentiellement distinctes des autres, et nous dirons qu'elles font partie du vrai lieu. Il nous semble bien inutile de leur accoler l'épithète de parasites, d'autant plus que nous allons rencontrer plus tard de véritables parties accessoires dans certains lieux et qui devront, pour des raisons diverses, être séparées du vrai lieu.

Deuxième observation. — Considérons les deux équations entières $f(x, y, \lambda)=0$, $\varphi(x, y, \lambda)=0$, qui définissent le lieu. A chaque point du lieu correspondent une ou plusieurs valeurs du paramètre, les racines communes aux deux équations, par rapport à λ. Nous dirons que ces deux équations définissent une représentation du lieu à l'aide du paramètre λ et que cette représentation est *propre*, si à un point mobile sur le lieu correspond une valeur unique de λ, qu'elle est *impropre* si à un point du lieu correspondent toujours plusieurs valeurs de λ. Nous supposerons toujours qu'il s'agit d'une représentation propre.

Alors à un point réel du lieu correspond une valeur réelle de λ, car, par des divisions algébriques successives, on arrivera au plus grand commun diviseur des deux polynomes en λ, $f(x, y, \lambda)$, $\varphi(x, y, \lambda)$; d'autre part, ce plus grand commun diviseur est du premier degré; donc la racine commune aux deux équations est donnée par $\lambda A(x, y)+B(x, y)=0$, A et B étant des polynomes entiers; on a donc $\lambda=-\frac{B(x, y)}{A(x, y)}$, et, par suite, λ est réel, aucun radical ne s'étant introduit dans nos calculs. Mais le raisonnement inverse ne peut pas se faire : on ne peut pas affirmer qu'à une valeur réelle de λ correspond nécessairement un point réel. Ceci pourra se faire cependant dans un cas particulier important, où x et y s'expriment, eux aussi, rationnellement en fonction de λ; dans ce cas, la courbe décrite est dite *unicursale*.

Pour certains points particuliers du lieu, les équations $f(x, y, \lambda)=0$, $\varphi(x, y, \lambda)=0$ acquièrent

parfois deux ou plus de deux racines communes. Il est suffisant d'examiner le premier cas. Alors le plus grand commun diviseur des deux polynomes est $A\lambda^2 + B\lambda + C$, A, B, C étant des polynomes entiers à coefficients réels. Il en résulte donc que les deux valeurs de λ sont réelles ou imaginaires conjuguées ou toutes deux égales à un même nombre réel. Quand les valeurs de λ sont distinctes, λ_1 et λ_2, il y a au moins deux branches de courbes réelles ou imaginaires qui se croisent au point (x, y) ; car, lorsque λ varie au voisinage de λ_1 ou de λ_2, il y a une branche correspondante décrite par le point mobile sur le lieu, et qui passe au point (x, y). Le point (x, y) est donc un point double, ordinaire ou isolé. Quand les deux nombres λ_1 et λ_2 sont égaux, rien ne permet plus d'affirmer que les deux branches sont distinctes, ni même qu'il doive être parlé de deux branches ; cependant en regardant ce cas comme un cas particulier des deux autres, on peut encore dire qu'il y a deux branches passant au point (x, y), dont les éléments infinitésimaux en ce point sont confondus, c'est-à-dire qui ont même tangente en ce point; ce dernier fait est évident, si l'on admet l'existence des deux branches, car alors les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ au point double sont les mêmes, puisque $\lambda_1 = \lambda_2$.

Même si λ_1 et λ_2 sont réels, on ne peut affirmer que le point double soit un point double ordinaire où se croisent deux branches réelles; mais on peut assurer qu'en un point de ce genre les valeurs de λ sont réelles, car pour un point voisin, sur l'une ou l'autre des deux branches, la valeur de λ est réelle, et, par suite, les valeurs de λ voisines de λ_1 ou de λ_2 sont réelles. Il faut supposer toutefois que ce point double est obtenu ainsi et que son existence ne tient pas à d'autres causes.

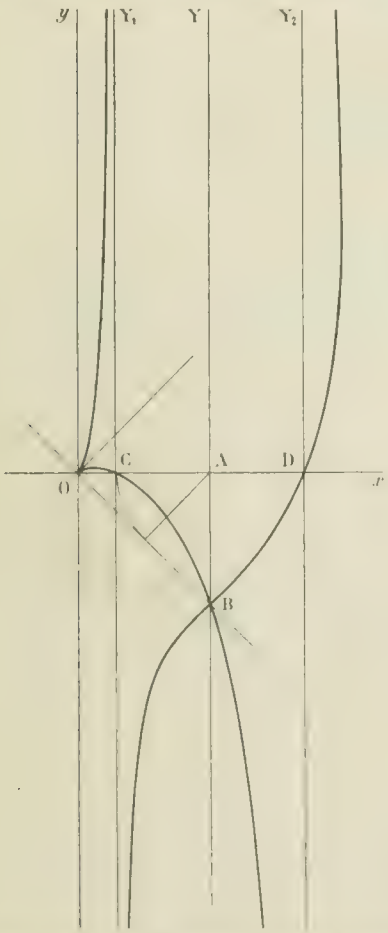
Deuxième exemple. — *On considère un angle droit xOy et la seconde bissectrice de cet angle. Trouver le lieu des points de rencontre d'un cercle qui se meut en restant tangent à cette bissectrice, pendant que son centre décrit une parallèle à Oy, avec le diamètre qui passe au point O.*

Prenons pour axes les deux droites Ox et Oy et désignons par a l'abscisse de la droite donnée AY, parallèle à Oy. Les coordonnées du centre du cercle étant a et λ, l'équation de ce cercle est

$$(x-a)^2 + (y-\lambda)^2 - R^2 = 0 \ ;$$

nous déterminerons R en cherchant la distance du point (a, λ) à la droite $x + y = 0$; nous aurons ainsi $R = \frac{|a+\lambda|}{\sqrt{2}}$. D'autre part, le diamètre du cercle passant en O a pour équation $\frac{x}{a} = \frac{y}{\lambda}$. Les deux courbes mobiles ont donc ici pour équations

$$2(x-a)^2 + 2(y-\lambda)^2 - (a+\lambda)^2 = 0,$$
$$\lambda x - ay = 0.$$



L'élimination de λ est immédiate et donne pour équation du lieu

$$2(x^2+y^2)(x-a)^2 - a^2(x+y)^2 = 0.$$

Cette équation montre aisément que les deux points O et B sont des points doubles. Mais la construction de cette courbe peut se faire sans difficulté en partant de la définition géométrique qui est donnée pour le lieu, et elle montre aussi bien que les deux points O et B sont des points doubles, le premier étant un point de rebroussement ayant pour tangente la première bissectrice.

Or, au premier point, on a $x = 0$, $y = 0$; les deux équations se réduisent à $(\lambda - a)^2 = 0$ et $0 = 0$; elles ont deux racines communes. Au second point, on a $x = a$, $y = -a$, les deux équations se réduisent à $(\lambda + a)^2 = 0$ et $\lambda + a = 0$; elles n'ont en réalité qu'une racine commune; les explications que nous avons données antérieurement ne s'appliquent pas à ce cas. Cela tient à ce que chaque valeur de λ donne deux points du lieu et que pour $\lambda = -a$ ces deux points viennent coïncider.

Les observations qui ont été faites plus haut sont donc insuffisantes dans le cas général où plusieurs points du lieu correspondent à la même valeur de λ; elles ne présentent de complète certitude que lorsque chaque valeur de λ ne donne qu'un point du lieu. Dans ce cas, les coordonnées x et y s'expriment rationnellement à l'aide de λ et la courbe est dite *unicursale*. Quand le lieu ne sera pas de cette nature, il pourra se faire que deux ou plusieurs points du lieu, en général distincts, viennent coïncider de façon à former un point multiple du lieu sans que les deux équations en λ acquièrent le nombre correspondant de racines communes.

Nous ne pouvons terminer ce paragraphe sans dire quelques mots du cas où le lieu est représenté algébriquement d'une façon impropre. Si l'on suppose que pour chaque point du lieu il y a p racines communes, le lieu total est décrit p fois quand λ varie, et l'élimination de λ entre les deux équations doit donner l'équation du lieu p fois répétée, c'est-à-dire que le résultant est une puissance p^r.

TROISIÈME EXEMPLE. — *On considère un cercle et une droite fixes ; un point se meut sur cette droite. Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des divers points de la droite sur leurs polaires respectives par rapport au cercle.*

Nous allons traiter ce problème par une méthode particulière qui met en évidence le résultat que nous avons annoncé plus haut.

Prenons pour axes deux diamètres rectangulaires dont l'un, Oy, soit parallèle à la droite donnée. L'équation du cercle est $x^2 + y^2 - r^2 = 0$; celle de la droite est $x - a = 0$. Nous aurons tous les points du cercle en faisant varier t de $-\infty$ à $+\infty$ dans les formules $x = r\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{2rt}{1+t^2}$.

Soit t le paramètre d'un point du cercle : la tangente en ce point a pour équation

$$\frac{X - x}{x} = \frac{Y - y}{y},$$

ou, toutes réductions faites, $$(1 - t^2)X + 2tY - r(1 + t^2) = 0.$$

Cette droite coupe la droite $x = a$ au point dont les coordonnées sont

$$x = a, \qquad y = \frac{r(1 + t^2) - a(1 - t^2)}{2t}.$$

Nous avons ainsi exprimé les points de cette droite d'une façon particulière avec un paramètre arbitraire t.

Cela posé, la polaire de ce point a pour équation

$$2atx + r(1 + t^2) - a(1 - t^2)y - 2tr^2 = 0,$$

et la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette polaire est

$$r(1 + t^2) - a(1 - t^2)x - 2aty = 0.$$

Nous aurons le lieu en éliminant t entre ces deux équations. Ordonnées, elles s'écrivent

$$(r + a)xt^2 - 2ayt + (r - a)x = 0,$$
$$(r + a)yt^2 + 2ax - r^2t + (r - a)y = 0 ;$$

et le résultant de ces deux équations est

$$(r^2 + a^2)xy - r^2 - a^2)xy^2 + 2(r^2 - a^2)x(ax - r^2) + ay^2(ay^2 + x(ax - r^2)) = 0,$$

ou plus simplement, $$2(r^2 - a^2)ax^2 + ay^2 - r^2x^2 = 0.$$

Le lieu est donc le cercle $a(x^2 + y^2) - r^2x = 0$, et nous trouvons deux fois ce lieu. Cela tient à ce que chaque point de la droite $x - a = 0$ est obtenu deux fois, pour les deux valeurs du paramètre qui donnent les points de contact des tangentes issues de ce point ; par suite, à chaque point du lieu correspondent deux valeurs de t.

Il est à peine besoin d'observer que la méthode que nous avons suivie est mauvaise à tout autre point de vue, et que le problème peut se traiter beaucoup plus simplement.

Troisième observation. — Quand l'une des courbes mobiles passe par un point fixe, le lieu passe un certain nombre de fois par ce point fixe.

En effet dire que la courbe $f(x, y, \lambda) = 0$ passe par un point fixe (x_0, y_0), c'est dire que pour toute valeur de λ on a $f(x_0, y_0, \lambda) = 0$. Cette équation est donc une identité. Si l'on exprime alors que les deux courbes passent au point (x_0, y_0), on obtient l'équation unique $\varphi(x_0, y_0, \lambda) = 0$. Cette équation est vérifiée pour un certain nombre de valeurs de λ, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$; pour chacune de ces valeurs du paramètre, les deux courbes mobiles se coupent au point (x_0, y_0) ; ce point est donc situé sur p branches du lieu au moins.

Dans le second exemple, l'une des courbes mobiles passe par un point fixe, l'origine des coordonnées ; c'est la droite $\lambda x - ay = 0$; l'autre équation contient λ au second degré ; alors le lieu passe deux fois à l'origine, c'est ce que nous avons constaté.

Dans le troisième exemple, chacune des droites passe par un point fixe : les points $x = \dfrac{r}{a}$, $y = 0$ et $x = 0$, $y = 0$, le lieu passe par ces deux points.

Nous rencontrerons encore d'autres applications de cette observation.

Il arrive parfois cependant que le point fixe (x_0, y_0) n'est pas sur le véritable lieu. Cela tient à ce qu'il se trouve sur des lieux exceptionnels, faisant partie du lieu total au point de vue algébrique, et qui ont été supprimés. Nous allons indiquer l'origine de ces lieux exceptionnels.

Quatrième observation. — Si pour certaines valeurs du paramètre, les deux courbes $f(x, y, \lambda) = 0$, $\varphi(x, y, \lambda) = 0$ coïncident, ces positions particulières des courbes font partie du lieu total. Il en est

encore de même de l'une des courbes, pour $\lambda = \lambda_0$, si pour cette valeur du paramètre, l'autre est identiquement satisfaite. Ces résultats sont évidents.

Quatrième exemple. — *On considère toutes les coniques circonscrites à un triangle rectangle* OAB *et dont les tangentes aux extrémités de l'hypoténuse,* A *et* B, *se coupent sur la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur cette hypoténuse. Trouver le lieu du point de rencontre des normales en ces points* A *et* B.

Prenons pour axes des x et des y les côtés de l'angle droit, OA et OB, et désignons OA par a, OB par b. L'équation générale des coniques passant aux points O, A et B est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - Aax - Cby = 0.$$

Les équations des tangentes à l'une de ces coniques aux points $(a, 0)$, $(0, b)$ sont

$$a(2Ax + 2By - Aa) - Aax - Cby = 0,$$
$$b(2Bx + 2Cy - Cb) - Aax - Cby = 0;$$

ordonnons-les, exprimons qu'avec la droite $ax - by = 0$, perpendiculaire à l'hypoténuse, elles forment un système de trois droites concourantes; nous aurons la relation

$$(A - C)(Aa^2 + Cb^2 - 2Bab) = 0.$$

Si nous prenons $Aa^2 + Cb^2 - 2Bab = 0$ ou $2B = \frac{Aa^2 + Cb^2}{ab}$, nous obtiendrons le système de coniques

$$\left(\frac{Ax}{a} + \frac{Cy}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0,$$

toutes réduites à deux droites, la droite AB et une droite passant en O. Ces coniques satisfont évidemment aux conditions imposées, puisqu'elles passent aux points O, A et B, et que les tangentes en A et B sont confondues avec l'hypoténuse. Mais ce sont des solutions exceptionnelles que nous n'avons pas à envisager. Le système véritable s'obtient en prenant $A = C$, et l'équation générale des coniques qu'il renferme est

$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 - ax - by = 0.$$

Les normales aux points A et B ont pour équations

$$\frac{x - a}{a} = \frac{y}{2\lambda a - b} \quad \text{et} \quad \frac{x}{2\lambda b - a} = \frac{y - b}{b}.$$

Rendons-les entières et éliminons λ entre ces deux équations; nous aurons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a(x - a) & b(x - a) + ay \\ b(y - b) & a(y - b) + bx \end{vmatrix} = 0;$$

les deux éléments de la dernière colonne sont identiques et l'équation se décompose en deux autres :

$$bx + ay - ab = 0 \qquad \text{et} \qquad a(x - a) - b(y - b) = 0.$$

La première représente la droite AB; c'est un lieu exceptionnel; on l'obtient quand les deux normales coincident avec AB, car alors elles se coupent en tous leurs points; et ceci a lieu pour le cercle circonscrit au triangle AOB. La seconde équation représente le vrai lieu; c'est une droite perpendiculaire à l'hypoténuse et passant au point (a, b).

Dans le cas actuel, les deux normales pivotent autour de deux points fixes A et B, et cependant aucun de ces points n'est sur le vrai lieu; cela tient à ce que ces points se trouvent sur l'autre partie du lieu, qui est ici le lieu exceptionnel. Cette disparition des points fixes autour desquels pivotent les courbes mobiles se produit souvent dans le vrai lieu.

Cinquième observation. — Il arrive aussi que l'on trouve des lieux complètement étrangers à la question. Ces lieux s'introduisent de plusieurs façons; nous allons signaler les principales.

D'abord, dans la pratique, il est rare que l'on élimine correctement les paramètres; le plus souvent, éliminer, c'est tout simplement trouver une équation qui soit une combinaison plus ou moins compliquée des équations du système employé et qui ne contienne plus les paramètres. Cette relation entre x et y, étant vérifiée par tous les points du lieu, contient le premier membre de l'équation du lieu en facteur; mais elle peut contenir d'autres facteurs, car rien ne nous permet d'affirmer que le système ait une solution par rapport aux paramètres, quand cette relation est vérifiée. Ces facteurs annulés représentent des lieux; nous les appellerons des lieux étrangers de première espèce.

Cinquième exemple. — *On considère un angle droit* xOy *et un point fixe* A; *autour de ce point on fait tourner deux droites rectangulaires qui sont les cordes des contacts de deux paraboles tangentes aux deux axes. Trouver le lieu du point de rencontre des axes de ce couple de paraboles mobiles.*

Les axes sont indiqués : ce sont les droites Ox et Oy. Soient alors a et b les coordonnées du point A et $u(x - a) + v(y - b) = 0$, $v(x - a) - u(y - b) = 0$ les équations des deux droites rectangulaires se croisant en ce point; les équations des deux paraboles de l'énoncé sont

$$(ux + vy - ua - vb)^2 - 4uvxy = 0,$$
$$(vx - uy - va + ub)^2 + 4uvxy = 0.$$

Les coefficients angulaires des axes sont $+\frac{u}{v}$, $-\frac{v}{u}$; ceux des cordes principales : $-\frac{v}{u}$, $+\frac{u}{v}$; par suite, les équations symboliques des axes sont $f' - \frac{v}{u} f'' = 0$, $\varphi' + \frac{u}{v}\varphi'' = 0$; ces deux équations, réduites et ordonnées par rapport aux puissances décroissantes de u, s'écrivent

$$E_1 = (x - au^2 - (y + b)uv + (x + au)v^2 - (y - b)v^2 = 0,$$
$$E_2 = (y - bu^2 + (x + a)u^2v + (y + b)uv^2 + (x - a)v^3 = 0,$$

et en éliminant entre elles le rapport $\frac{u}{v}$ ou $\frac{v}{u}$, on aura l'équation du lieu. Cette élimination se fait simplement par la méthode de proche en proche, en multipliant E_1 et E_2 par $y - b$ et $x - a$, et retranchant; puis, par $x - a$ et $y - b$, et ajoutant. On a ainsi les deux équations du second degré

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)u^2 + 2(bx - ay)uv + (x - a)^2 + (y - b)^2 v^2 = 0,$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 u^2 + 2(ay - bx)uv + (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)v^2 = 0,$$

ou

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0,$$
$$Cu^2 - 2Buv + Av^2 = 0,$$

dont le résultant est

$$(A^2 - C^2)^2 + 4B^2(A + C)^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$A + C = 0 \qquad \text{et} \qquad (A - C)^2 + 4B^2 = 0.$$

Cette dernière se réduit à $(4a^2 + b^2)(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$, et il est facile de voir que ce lieu a été introduit par l'élimination défectueuse que nous avons faite. En effet nous avons remplacé le premier système $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, par le système

$$(y - b)E_1 - (x - a)E_2 = 0,$$
$$(x - a)E_1 + (y - b)E_2 = 0,$$

et les équations de ce nouveau système ont une racine commune dans deux cas : d'abord quand $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ ont une racine commune, puis quand le déterminant $(x - a)^2 + (y - b)^2$ est nul ; leur résultant doit donc se composer de deux facteurs : le résultant du premier système et ce déterminant.

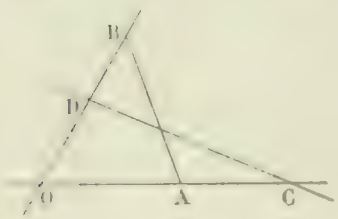
Le second lieu est donc un lieu étranger ; le premier est le vrai lieu :

$$A + C = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 - ax - by = 0.$$

C'est un cercle.

On peut introduire encore autrement des lieux étrangers : par une façon particulière de mettre un problème en équation. Un exemple fera bien comprendre ce que nous entendons par là.

SECOND EXEMPLE. — *On donne un triangle fixe* OAB, *et on coupe ce triangle par une droite qui rencontre les deux côtés,* OA *et* OB, *en* C *et* D ; *puis on considère les deux cercles circonscrits aux triangles* OCD *et* ACB. *Trouver le lieu du point de rencontre de ces cercles, autre que le point* O, *quand la droite* CD *se déplace parallèlement à elle-même.*



Prenons pour axes les deux côtés OA et OB du triangle donné, et désignons par a et b les longueurs OA et OB, par $\alpha x + \beta y = 0$ la parallèle à l'origine qui fixe la direction de CD, et par θ l'angle des axes. L'équation de la droite CD est $\alpha x + \beta y - \lambda = 0$ et les valeurs algébriques de OC et OD sont $\frac{\lambda}{\alpha}$, $\frac{\lambda}{\beta}$; par suite, l'équation du cercle circonscrit au triangle OCD est

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - \lambda\frac{x}{\alpha} - \lambda\frac{y}{\beta} = 0.$$

Soit

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2ux - 2vy + w = 0$$

celle du cercle circonscrit au triangle ACB ; les abscisses des points de rencontre de ce cercle avec Ox sont a et $\frac{\lambda}{\alpha}$; d'ailleurs elles sont données par $x^2 - 2ux + w = 0$; on a donc $2u = a + \frac{\lambda}{\alpha}$, $w = \frac{a\lambda}{\alpha}$; en exprimant ensuite que le cercle passe au point O, b, on obtient $b^2 - 2vb + w = 0$, et l'on déduit de là $v = b + \frac{a\lambda}{b\alpha}$. Le second cercle a donc pour équation

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - \left(a + \frac{\lambda}{\alpha}\right)x - \left(b + \frac{a\lambda}{b\alpha}\right)y + \frac{a\lambda}{\alpha} = 0$$

Il n'y a plus qu'à éliminer λ entre les équations des deux cercles. Pour cela on retranche ces deux équations l'une de l'autre et l'on obtient d'abord λ par l'équation

$$\lambda\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - \frac{a}{b\alpha}\right) = ax + by;$$

on porte ensuite cette valeur de λ dans la première équation et l'on a l'équation du lieu :

$$\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-\frac{ay}{b\alpha}\right)(x^2+2xy\cos\theta+y^2)-(ax+by)\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)=0.$$

Cette équation se décompose en deux autres :

$$y=0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\beta}-\frac{a}{b\alpha}\right)(x^2+2xy\cos\theta+y^2)+\frac{a}{\alpha}(2x\cos\theta+y)-b\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)-\frac{ax}{\beta}=0.$$

La première représente le lieu du point C, que notre manière de calculer ne distingue pas de l'autre point de rencontre, et la seconde représente le vrai lieu. C'est un cercle.

Enfin il y a une autre raison à la présence de lieux étrangers, raison très importante au point de vue théorique et qui se présente dans certains cas ; c'est en quelque sorte une raison de même nature que la précédente, mais plus générale. Elle consiste en ce que, dans la recherche d'un lieu, on substitue à la propriété géométrique énoncée une autre plus étendue, comprenant la propriété donnée comme cas principal et convenant en outre à d'autres éléments géométriques que ceux qui sont imposés. Ces nouveaux éléments donneront un lieu étranger qui viendra s'adjoindre au vrai lieu.

Septième exemple. — *Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine des coordonnées sur les tangentes à la courbe* $ay^2-(x-a)^3=0$ (axes rect.).

Pour traiter cette question, nous appellerons *tangente* une droite qui rencontre la courbe en deux points confondus. Désignons alors par $y=mx+p$ l'équation d'une tangente. Cette droite coupe la courbe proposée en trois points dont les abscisses sont racines de l'équation

$$a(mx+p)^2-(x-a)^3=0,$$

et nous devons exprimer que cette équation a une racine double. Posons à cet effet $\frac{mx+p}{x-a}=u$; l'équation devient

$$au^3-amu^2-(p+am)=0;$$

la dérivée de cette équation a pour racines $u=0$ et $u=\frac{2m}{3}$. En exprimant que la première vérifie l'équation proposée on a d'abord

$$(1) \qquad p+am=0;$$

la seconde donne

$$(2) \qquad 4am^3+27(p+am)=0.$$

On obtient donc ainsi deux conditions. Chacune d'elles conduit à un lieu, que l'on obtient en éliminant m et p entre les équations des deux courbes mobiles et la condition envisagée. Or les courbes mobiles sont : la tangente, $y=mx+p$, et la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite, $y=-\frac{1}{m}x$. De ces deux équations on déduit $m=-\frac{x}{y}$ et $p=\frac{x^2+y^2}{y}$. Il n'y a plus qu'à remplacer m et p par ces valeurs, successivement dans les relations (1) et (2) ; on obtient ainsi les deux lieux

$$x^2+y^2-ax=0, \qquad 27y^2(x^2+y^2-ax)-4ax^3=0.$$

La première équation représente un cercle passant à l'origine, au point $(a, 0)$, et ayant ce segment pour diamètre. Il provient de la condition $p+am=0$, qui exprime que la droite $y=mx+p$ passe au point $(a, 0)$; toutes ces droites rencontrent la courbe en deux points confondus avec ce point, ainsi qu'il est aisé de le vérifier ; mais deux d'entre elles seulement sont de véritables tangentes, et encore sont-elles confondues dans le cas actuel avec Ox. Ce lieu est donc un lieu étranger. Il a été introduit en substituant à l'idée de tangente une autre idée, presque équivalente, mais plus étendue, celle de droite qui rencontre une courbe en deux points confondus.

L'exemple suivant dont nous nous bornons à donner l'énoncé présenterait encore une extension de ce genre

D'un point M *d'une parabole, on abaisse sur cette courbe les deux normales autres que celle qui a son pied en* M. *Trouver le lieu du pôle de la droite qui joint les deux pieds de ces normales quand le point* M *décrit la parabole donnée.*

On peut traiter le problème ainsi : chercher le lieu des pôles des droites AB qui rencontrent la parabole en deux points A et B, tels que les normales en ces points se coupent sur la courbe. En procédant de cette façon, on introduit un lieu étranger, le lieu des pôles des normales à la parabole, comme il est aisé de s'en rendre compte.

De toutes les observations que nous venons de faire, il résulte qu'on peut à l'avance prévoir les facteurs étrangers ou exceptionnels qui entreront dans le résultant correct ou incorrect que l'on trouve

en éliminant les paramètres, le plus simplement qu'on le peut, entre les équations du système obtenu par la *mise en équations* du problème proposé. Le vrai lieu sera obtenu en égalant à 0 ce résultant débarrassé des facteurs exceptionnels et étrangers. Mais ce vrai lieu peut aussi se décomposer en plusieurs autres ; ce fait ne pourra être aperçu que par des considérations géométriques spéciales à chaque cas particulier, en cherchant, par exemple, à voir si l'énoncé général ne peut pas se diviser en plusieurs autres, plus précis, distincts, et équivalant par leur ensemble à l'énoncé primitif.

Enfin il est facile d'étendre la plupart des résultats précédents aux cas où les équations ne contiennent pas les paramètres d'une façon algébrique et entière : seulement il n'y aura alors pas d'élimination correcte à espérer, au moins sûrement, et l'absence de facteurs étrangers dépendra de l'habileté ou du bonheur de l'opérateur.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1901).

Mathématiques.

1040. — *On considère l'hyperboloïde* (H) *représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et les deux systèmes de génératrices rectilignes définis par les équations

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = u\left(1 + \dfrac{z}{c}\right), \\[2ex] \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{u}\left(1 - \dfrac{z}{c}\right). \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = v\left(1 - \dfrac{z}{c}\right), \\[2ex] \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{v}\left(1 + \dfrac{z}{c}\right). \end{cases}$$

A chaque système de valeurs attribuées aux paramètres u et v correspond un point de l'hyperboloïde (H), *intersection des génératrices* (I) *et* (II) ; *réciproquement, à chaque point de l'hyperboloïde correspond un système de valeurs pour u et v.*

Former la relation qui doit exister entre les paramètres u et v pour que le point de l'hyperboloïde qui correspond au système de valeurs (u, v) appartienne à l'un des conoïdes (C) *représentés par l'équation*

$$z = \frac{2abcxy}{(1 + m^2b^2)x^2 + (1 - m^2a^2)y^2},$$

où m désigne un paramètre variable. De quoi se compose l'intersection complète de l'un de ces conoïdes et de l'hyperboloïde quand $m^2 - 1$ est différent de zéro et quand $m^2 - 1$ est nul ?

Déterminer les points où la courbe (Q), *commune à* (H) *et à l'un des conoïdes, coupe les génératrices du système* (II) ; *exprimer les coordonnées des points de cette courbe en fonction du paramètre v.*

En combien de points la courbe (Q) *rencontre-t-elle chaque génératrice du système* (I) ? *Déterminer le lieu décrit par le centre des moyennes distances des points situés sur une de ces génératrices, lorsque celle-ci se déplace sur l'hyperboloïde.*

Démontrer qu'il existe un conoïde (C) *pour lequel le plan tangent à l'hyperboloïde en chaque point de la courbe* (Q) *est perpendiculaire au plan déterminé par la génératrice du système* (II) *qui passe en ce point et par la génératrice parallèle de* (H).

Distinguer, suivant la valeur du paramètre m, ceux des conoïdes (C) *pour lesquels les points d'intersection d'une génératrice du système* (I) *et de la courbe* (Q) *sont tous réels, ceux pour lesquels un seul point d'intersection est toujours réel, ceux enfin pour lesquels le nombre des points réels varie avec la génératrice.*

Les équations (I) et (II) représentent deux systèmes de droites situées tout entières sur l'hyperboloïde, comme il est facile de s'en assurer en remarquant que l'équation de cet hyperboloïde provient de l'élimination de u entre les équations (I) et de l'élimination de v entre les équations (II).

Par chaque point de la surface il passe une génératrice de chaque système et une seule, car si on considère un point (x, y, z) vérifiant l'équation $H = 0$ et qu'on exprime que la droite passe en ce point, les deux valeurs de u fournies par les équations (I) sont égales et cette valeur commune définit une droite du premier système qui passe au point choisi ; le même raisonnement s'applique au second système.

Retranchons maintenant les deux premières équations des deux groupes ; nous aurons

$$u\left(1+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{z}{c}\right),$$

et, par suite,

$$\frac{z}{c}=\frac{v-u}{v+u};$$

en portant cette valeur dans les équations (I), elles deviennent

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2uv}{v+u},$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{2}{v+u};$$

$\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$ s'en déduisent immédiatement par addition et soustraction, et nous avons finalement les expressions des coordonnées d'un point quelconque de la surface en fonction des paramètres u et v des deux génératrices qui passent en ce point ; ce sont :

$$(1)\qquad \frac{x}{a}=\frac{1+uv}{v+u},\qquad \frac{y}{b}=\frac{1-uv}{v+u},\qquad \frac{z}{c}=\frac{v-u}{v+u}.$$

Elles sont rationnelles en u et v ; par conséquent à tout système de valeurs de u et v correspond un point de la surface et un seul.

Si, dans ces équations, on fait $u = c^{te}$, on obtient des expressions rationnelles et du premier ordre en v ; ce sont donc les équations d'une droite ; elles représentent la droite du système (I) qui correspond à la valeur choisie pour u. De même, pour $v = c^{te}$, les équations (1) représentent une droite, la droite du second système qui correspond à cette valeur de v.

Toute relation entre u et v définit une ligne de la surface, car alors les équations (1) ne dépendent plus que d'un seul paramètre, u ou v. Ainsi pour $v = u$, on a $z = 0$, et l'on peut considérer cette relation comme étant l'équation de la section faite dans la surface par le plan des xy ; de même $uv - 1 = 0$ est l'équation de la section par le plan des zx, $uv + 1 = 0$, celle de la section par le plan des yz, et $u + v = 0$, celle de la conique à l'infini. On verrait aisément, en considérant l'équation d'un plan quelconque, que l'équation d'une section plane est une relation homographique entre u et v,

$$Auv + Bu + Cv + D = 0.$$

Cela posé, l'équation du conoïde peut s'écrire

$$\frac{z}{c}=\frac{2\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}}{(1+m)\frac{x^2}{a^2}+(1-m)\frac{y^2}{b^2}},$$

et, en exprimant que le point (1) est sur cette surface, nous avons entre u et v la relation

$$\frac{v-u}{v+u}=\frac{1-u^2v^2}{1+u^2v^2+2muv};$$

c'est une équation du troisième degré en u et v qui définit la ligne d'intersection de l'hyperboloïde et du conoïde ; en la développant, elle devient

$$2u^2v^2-2u+2muv(v-u)=0;$$

elle admet les deux solutions particulières, $u = 0$ et $u = \infty$, et se réduit ensuite à

$$(2)\qquad uv^3+mv^2-muv-1=0.$$

Aux deux solutions $u = 0$ et $u = \infty$ correspondent deux génératrices du premier système, les droites

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \qquad 1 - \frac{z}{c} = 0,$$

et

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \qquad 1 + \frac{z}{c} = 0;$$

à la relation (2) correspond une ligne du quatrième ordre dont on aura les équations en tirant u de cette relation et portant dans les équations (1); nous avons ainsi $u = \dfrac{1 - mv^2}{v^4 - mv}$, puis

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{(1 - mv)v(1 + v^2)}{v^4 - 2mv^2 + 1}, \\ \frac{y}{b} &= \frac{(1 + mv)(v^2 - 1)}{v^4 - 2mv^2 + 1}, \\ \frac{z}{c} &= \frac{v^4 - 1}{v^4 - 2mv^2 + 1}. \end{aligned} \right.$$

Ces équations définissent, à l'aide du paramètre v, une ligne du quatrième ordre qui complète l'intersection des deux surfaces.

Si $m = 1$, la relation (2) devient

$$(uv + 1)(v^2 - 1) = 0;$$

elle donne $v = \pm 1$, valeurs auxquelles correspondent deux génératrices du second système, et $uv + 1 = 0$ qui donne $x = 0$, et qui, par suite, représente la section faite dans l'hyperboloïde par le plan principal $x = 0$. L'intersection complète se compose donc de deux droites du premier système, deux du second système, et de l'hyperbole $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ située dans le plan principal $x = 0$. D'ailleurs ces résultats peuvent s'obtenir directement, car pour $m = 1$, le conoïde se décompose en le plan $x = 0$ et le paraboloïde $bxz - acy = 0$, et il est facile de vérifier que ce paraboloïde coupe l'hyperboloïde suivant les quatre droites signalées; quant au plan $x = 0$, il fournit l'hyperbole que nous avons indiquée plus haut.

Si $m = -1$, la relation (2) devient

$$(uv - 1)(v^2 + 1) = 0;$$

elle donne d'abord $v = \pm i$, valeurs auxquelles correspondent deux génératrices imaginaires conjuguées du second système et $uv - 1 = 0$, qui donne elle-même $y = 0$, et qui représente par conséquent l'hyperbole principale du plan des zx. L'intersection complète se compose donc de deux droites du premier système, celles qui se trouvent dans tous les cas, de deux droites imaginaires du second et de l'hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ du plan principal $y = 0$. Au surplus, ces résultats peuvent se voir autrement; il suffit de remarquer en effet que pour $m = -1$ le conoïde se décompose en le plan $y = 0$ et le paraboloïde $ayz - bcx = 0$, et il est facile de vérifier que le paraboloïde coupe l'hyperboloïde suivant les quatre droites signalées; quant au plan $y = 0$, il fournit l'hyperbole indiquée antérieurement.

On pourrait encore traiter ces questions en faisant $m = 1$ ou $m = -1$ dans les équations (3) et cherchant d'une part les facteurs qui rendent les coordonnées indéterminées, d'autre part, les équations qui restent, une fois ces facteurs supprimés.

Il est facile maintenant de voir comment chaque génératrice de H coupe la ligne (3). Chaque droite de H rencontre en effet le conoïde en trois points; or, si on prend une droite du second système, elle rencontre chacune des génératrices du premier, par conséquent deux de ses points de rencontre avec le conoïde sont sur les génératrices qu'il a en commun avec l'hyperboloïde ($u = 0$, $u = \infty$); elle n'a

donc qu'un point commun avec la ligne (3); c'est ce qu'il est facile de vérifier d'ailleurs, puisque la relation (2) est linéaire en u et ne fournit qu'une valeur de u quand v est donné. Pour une génératrice du premier système, au contraire, les trois points de rencontre avec le conoïde sont sur la courbe (3), car elle ne rencontre aucune des deux droites communes aux deux surfaces : c'est d'ailleurs ce que montre l'équation (2), puisqu'elle est du troisième degré en v et, par suite, donne trois valeurs de v pour chaque valeur de u.

Proposons-nous alors de trouver le lieu du centre des moyennes distances de ces trois points, quand la génératrice envisagée se meut dans le premier système, c'est-à-dire quand u, envisagé comme étant un paramètre, varie. Pour cela, nous formerons l'équation aux z des points de rencontre de la génératrice u avec la courbe (3), en éliminant v entre la relation (2) et l'équation $\frac{z}{c} = \frac{v-u}{v+u}$; celle-ci donne $v = \frac{u(c+z)}{c-z}$, et, en portant cette valeur dans la relation (2), nous obtenons

$$u^4(c+z)^3 - mu^2(c+z)^2(c-z) - mu^2(c+z)(c-z)^2 - (c-z)^3 = 0,$$

puis

$$(u^4 - 2mu^2 + 1)z^3 - 3c(u^4 - 1)z^2 + \ldots = 0;$$

cette équation donne $\Sigma z = \frac{3c(1-u^4)}{u^4 - 2mu^2 + 1}$; donc le z du centre des moyennes distances est fourni par l'équation

$$\frac{z}{c} = \frac{1-u^4}{u^4 - 2mu^2 + 1}.$$

En portant cette valeur dans l'équation $v = \frac{u(c+z)}{c-z}$, nous aurons la coordonnée v de ce point en fonction de u,

$$v = \frac{1-mu^2}{u^3 - mu};$$

dès lors, il n'y a plus qu'à remplacer dans les équations (1) pour avoir les équations du lieu à l'aide du paramètre u; nous trouvons ainsi

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{(1-m)u(1+u^2)}{u^4 - 2mu^2 + 1}, \\ \frac{y}{b} = \frac{(1+mu)(u^2-1)}{u^4 - 2mu^2 + 1}, \\ \frac{z}{c} = \frac{1-u^4}{u^4 - 2mu^2 + 1}. \end{cases}$$

Cette ligne ne diffère de la ligne (3) que par le changement de z en $-z$; elle est donc symétrique de celle-ci par rapport au plan des xy.

Le plan mené par une génératrice du système (II) et par la génératrice parallèle est un plan asymptote de l'hyperboloïde; il passe par le centre de (II) et son équation s'obtient en menant par la génératrice (II) un plan qui passe à l'origine, c'est-à-dire en éliminant le terme constant entre ses deux équations. Ce calcul très simple donne

$$\frac{x}{a}(1-v^4) - \frac{y}{b}(1+v^2) + 2v\frac{z}{c} = 0.$$

D'autre part, le plan tangent en un point (1) de la surface a pour équation

$$\frac{x}{a}(1+uv) - \frac{y}{b}(1-uv) + \frac{z}{c}(v-u) - (v+u) = 0,$$

et la condition pour qu'il soit orthogonal au précédent est

$$\frac{(1-v^2)(1+uv)}{a^2} - \frac{(1+v^2)(1-uv)}{b^2} + \frac{2v(v-u)}{c^2} = 0,$$

cette relation s'écrit

$$uv\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+v\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right)+mu\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right)-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=0,$$

et nous voyons qu'elle est identique à la relation (2) pour $m=\dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{2}{c^2}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}$.

Le plan tangent à l'hyperboloïde le long de la ligne d'intersection avec ce conoïde particulier est donc toujours perpendiculaire au plan asymptote mené par la génératrice du système (1) qui passe au point de contact.

Pour étudier la réalité des points de rencontre d'une génératrice u avec la courbe (3), il suffit de discuter l'équation du troisième degré en v fournie par la relation (2) quand on se donne u. Cette équation a trois racines réelles et distinctes quand son discriminant est négatif, une racine réelle et deux imaginaires quand son discriminant est positif et une racine double quand son discriminant est nul. Le discriminant est le résultant des deux dérivées partielles, écrit sous la forme ordinaire

$$(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb');$$

ici les deux dérivées sont

$$3uv^2+2mv-mu=0,$$
$$mv^2-2muv-3=0,$$

et le résultant est

$$\Delta=(m^2u-9u)^2-4m^2u^2+3m(m^2-3mu^2),$$

ou

$$\Delta=-12m^3u^4-(3m^4+54m^2-81)u^2-12m^3.$$

La condition pour que les trois racines soient réelles et distinctes est donc

$$12m^3u^4+(3m^4+54m^2-81)u^2+12m^3>0,$$

et nous sommes ramenés à l'étude des signes d'un trinome bicarré.

A cet effet, observons d'abord que si l'on regarde u^2 comme variable, le produit des racines est toujours positif, et que la somme change de signe pour $m=0$ et pour les deux valeurs de m qui annulent $3m^4+54m^2-81$, c'est-à-dire pour $-\alpha$ et $+\alpha$, en posant $\alpha^2=3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$; nous retiendrons surtout ce fait que α est compris entre 1 et 2, ce qui est évident sur le trinome bicarré en m, sans même chercher les racines de ce trinome. La quantité sous le radical est

$$(m^4+18m^2-27)^2-64m^6,$$

ou

$$(m^4-8m^3+18m^2-27)(m^4+8m^3+18m^2-27);$$

elle peut s'écrire

$$(m+3)^2(m+1)(m-1)(m-3)^2,$$

et change de signe pour $m=-3,-1,+1,+3$.

De $m=-\infty$ à $m=-3$, le trinome en u^2 a ses racines réelles et positives et peut se mettre sous la forme $12m^3(u^2-u_1^2)(u^2-u_2^2)$. Quand u varie de $-\infty$ à $-u_1$, il est négatif, les génératrices correspondantes ne rencontrent le conoïde envisagé qu'en un point réel ; quand u varie de $-u_1$ à $-u_2$, il est positif et les génératrices correspondantes rencontrent le conoïde en trois points réels, etc ; u_1^2 est supposé plus grand que u_2^2, pour fixer les idées.

De $m=-3$ à $m=-\alpha$, les racines du trinome en u^2 sont imaginaires ; de $-\alpha$ à 0, la somme de ces racines est négative ; par suite, elles sont négatives toutes deux si elles existent. Donc en définitive, de -3 à 0 le polynome bicarré en u n'a aucune racine réelle ; il est donc toujours négatif et toutes les génératrices du système (1) se comportent de la même façon : chacune d'elles rencontre le conoïde envisagé en un seul point réel.

De $m=0$ à $m=1$, les racines du trinome en u^2 sont réelles ; d'ailleurs leur somme est positive, elles sont donc toutes deux positives et le trinome peut s'écrire $12m^3(u^2-u_1^2)(u^2-u_2^2)$; les génératrices du système (1) ne se comportent pas toutes de la même façon ; celles qui correspondent aux valeurs de u comprises entre $-\infty$ et $-u_1$ rencontrent le conoïde, c'est-à-dire la ligne (3), en

trois points réels; celles qui correspondent aux valeurs de u comprises entre $-u_1$ et $-u_2$ le rencontrent seulement en un point réel ; etc.

De $m = 1$ à $m = 3$, les racines du trinome en u^2 sont imaginaires et ce trinome est toujours positif. Toutes les génératrices du premier système rencontrent le conoïde chacune en trois points réels.

De $m = 3$ à $m = +\infty$, le trinome en u^2 a ses racines réelles, mais leur somme est négative, elles sont négatives toutes deux ; le trinome bicarré ne s'annule jamais, il est donc toujours positif. Le résultat est le même que dans le cas précédent.

Très bonne solution de M. J.-D. Dufaut.
Bonne solution de M. Dulimbert, à Grenoble.

Physique.

1041. — *On imagine un œil fictif constitué par une masse d'eau* $\left(n = \frac{4}{3}\right)$ *limitée à sa partie postérieure par la rétine, et à sa partie antérieure par une surface sphérique de 5 millimètres de rayon, au centre de laquelle est placé un écran percé d'une ouverture circulaire de 1 millimètre de rayon concentrique à la sphère. L'axe de cette ouverture est l'axe de l'œil, et l'on considère tous les rayons lumineux utilisés comme très voisins de cet axe.*

On demande tout d'abord : 1° où sont les foyers principaux de ce système optique ; 2° quelle doit être la profondeur de l'œil pour que l'image d'un objet situé à 40 mètres vienne se peindre sur la rétine ; 3° l'œil regardant ainsi à 40 mètres, quelle est la limite de petitesse des détails qu'il peut distinguer, si l'on admet que cette limite est atteinte quand l'image rétinienne n'a plus que 4 microns.

On suppose ensuite que l'œil demeure invariablement accommodé de manière à voir nettement une glace transparente placée à 40 mètres et sur laquelle se trouve une graduation en centimètres. On admet que l'observateur rapporte l'origine des impressions qu'il reçoit à des objets fictifs qu'il croit situés dans le plan de la glace transparente. On demande ce que l'observateur croit voir sur la glace dans les expériences suivantes, et quelles sont, en centimètres, les dimensions de ces objets fictifs.

Première expérience. — *On place un point lumineux à 20 mètres de l'œil.*

Deuxième expérience. — *On place ce point lumineux à 15 centimètres de la surface antérieure de l'œil.*

Troisième expérience. — *On place à 20 mètres de l'œil un carton percé d'un trou de 2 millimètres de rayon à travers lequel on reçoit la lumière provenant d'un astre dont le diamètre apparent est le* $\frac{1}{100}$ *de l'angle au centre qui intercepte sur la circonférence un arc de longueur égale au rayon.*

Quatrième expérience. — *On place ce carton à 15 centimètres.*

Cinquième expérience. — *On place ce carton contre l'œil.*

On pourra ne pas dépasser la précision que comporte la petitesse des détails que l'œil dont il s'agit peut distinguer.

1° Calculons les distances focales en appliquant les formules ordinaires des dioptres :

$$f' = \frac{-r}{n-1} = \frac{5}{\frac{4}{3}-1} = 15, \qquad f = \frac{nr}{n-1} = -\frac{4}{3}f = -20.$$

Le premier foyer principal est donc à 15^{mm} en avant et le second à 20^{mm} en arrière de la surface extérieure de l'œil.

2° La rétine doit coïncider avec le plan conjugué d'un objet placé à 40^m. Appliquons la formule générale

$$\frac{n}{p''} - \frac{1}{p'} = \frac{n-1}{r},$$

en y faisant $p = 40000$: on trouve $p' = -20^{mm},008$. La distance du second foyer à la rétine n'est donc que de 8 microns ; elle est négligeable.

3° Pour avoir la limite inférieure des détails perceptibles sur un objet situé à 40^m, nous n'avons qu'à multiplier $0^{mm},004$ par l'inverse du grossissement linéaire. Cette limite sera donc, en valeur absolue,

$$0,004\,\frac{p'-f}{f} = 0,004\,\frac{40000-15}{15} = 10^{mm},662,$$

soit environ un centimètre. Dans ce qui suivra, il sera donc inutile de pousser l'approximation plus loin que le micron pour évaluer le diamètre des images rétiniennes, ou plus loin que le centimètre pour évaluer celui des objets fictifs situés sur la glace.

Le lecteur est prié de faire les figures, toutes très simples, qui sont nécessaires pour suivre ce qu'on va exposer.

Première expérience. — Les rayons venus du point lumineux et réfractés par l'œil convergent vers un point S, conjugué du premier, et dont l'abscisse p'' est telle que l'on ait

$$\frac{4}{3p} - \frac{1}{20000} = -\frac{1}{15} \qquad \text{d'où} \qquad p'' = -20,015.$$

Le point S est donc situé à $15 - 8 = 7$ microns en arrière de la rétine. Ceux de ces rayons qui sont utilisés sont compris, dans l'œil, à l'intérieur d'un cône qui a pour sommet le point S et pour directrice l'ouverture de l'écran. Ce cône intercepte sur la rétine un cercle dont le diamètre a est tel que l'on ait

$$\frac{a}{2} = \frac{20,015 - 20,008}{15,015}. \qquad \text{d'où} \qquad a = \frac{14}{15015}.$$

Ce diamètre étant inférieur à un micron, la sensation sera celle d'un point lumineux.

Deuxième expérience. — Un calcul analogue au précédent donne pour l'abscisse de la nouvelle image

$$p' = -22^{mm},222;$$

pour le diamètre du cercle rétinien,

$$a = 0^{mm},257,$$

et pour le diamètre du cercle que l'observateur verra sur la glace,

$$0,257\,\frac{40000-15}{15} = 68^{cm},5.$$

Troisième expérience. — Le diamètre apparent de l'astre, $\frac{1}{100}$, surpasse de beaucoup celui du trou, $\frac{4}{20000}$. Le trou se comporte donc comme un objet lumineux dont l'image, située, comme on l'a vu (première expérience), à 7 microns en arrière de la rétine, a un diamètre égal à

$$4\,\frac{15}{20000-15} = 0^{mm},003.$$

Les rayons efficaces forment, entre le diaphragme de l'œil et la rétine, un cône s'appuyant d'une part sur ce diaphragme et d'autre part sur l'image que nous venons de déterminer. Ce cône rencontre la rétine suivant un cercle dont le diamètre x est tel que l'on ait

$$\frac{x - 0,003}{0,007} = \frac{2 - x}{15,008}. \qquad \text{d'où} \qquad x = 0,0039,$$

soit environ 4 microns ; le cercle correspondant sur la glace aurait environ 1 centimètre ; on est à la limite des dimensions appréciables et la sensation sera celle d'un point lumineux.

Quatrième expérience. — Le diamètre apparent du trou, $\frac{4}{155}$, est de beaucoup supérieur à celui de l'astre, et celui-ci sera visible en entier.

L'image de l'astre est située dans le second plan focal et son diamètre est $\frac{20-5}{100} = 0^{mm},15$.

L'image du trou du carton est à $22^{mm},222$ (voir deuxième expérience) de la surface antérieure de l'œil, à $2^{mm},214$, par conséquent, en arrière de la rétine. Son diamètre est $4\,\frac{15}{150-15} = 0^{mm},144$.

Un rayon efficace doit, après sa réfraction, passer à la fois par le diaphragme de l'œil, par l'image de l'astre et par celle du carton. La limite de ces rayons, au-dessus de l'axe par exemple, sera donc soit la droite joignant l'extrémité supérieure de l'image de l'astre au bord inférieur du diaphragme de l'œil, si cette droite rencontre l'image du carton, soit la droite joignant cette même extrémité au bord supérieur de l'image du carton, si cette droite rencontre le diaphragme de l'œil. Celle de ces droites qui rencontrera la rétine le plus près de l'axe marquera, par cette intersection, la limite du cercle lumineux formé sur la rétine. Or la première rencontre la rétine à une distance de l'axe égale à x et telle que

$$\frac{x-0,075}{0,008} = \frac{1+0,075}{15}, \qquad \text{d'où} \qquad x = 0^{mm},07\,557;$$

la seconde à une distance x' telle que

$$\frac{x'-0,075}{0,008} = \frac{0,222-0,075}{2,222}, \qquad \text{d'où} \qquad x' = 0^{mm},07\,553.$$

Au degré d'approximation admis, les deux intersections peuvent être regardées comme confondues ; elles donnent un cercle lumineux dont le diamètre est $0^{mm},151$. L'observateur verra sur la glace un cercle lumineux dont le diamètre sera $0,151\,\frac{40\,000-15}{15} = 40^{cm}$ environ.

Cinquième expérience. — Le trou du carton coïncide cette fois avec son image et la seconde des droites limites définies au paragraphe précédent joint l'extrémité supérieure de l'image de l'astre au bord inférieur du carton ; elle rencontre la rétine à une distance de l'axe x'' telle que

$$\frac{x''-0,075}{0,008} = \frac{2-0,075}{20,008}, \qquad \text{d'où} \qquad x'' = 0^{mm},0758.$$

La limite inférieure est donc maintenant celle que définit la première droite. Le cercle rétinien aura d'ailleurs, au degré d'approximation déjà admis, le même diamètre que dans l'expérience précédente. Il en sera de même de la perspective observée sur la glace.

M. LAURENCE.

Remarque. — Dans la quatrième expérience, le fait que le faisceau efficace est limité par l'ouverture du trou, et non par l'ouverture de la pupille, montre que toute la pupille ne concourt pas à la formation des images des points situés près des bords de l'astre. Si l'on joint le bord inférieur, par exemple, de la pupille au bord supérieur de l'image du carton, les points de l'image de l'astre qui sont situés au-dessous de cette droite correspondront seuls à des faisceaux lumineux couvrant entièrement la pupille. Or cette droite rencontre la rétine à une distance du premier rayon efficace d'environ 11 microns ; à cette zone rétinienne correspond sur le disque lumineux apparent une zone d'environ 3 centimètres de large dont l'éclat sera légèrement dégradé.

On peut encore s'en rendre compte en cherchant l'impression produite par le trou du carton : on constatera que l'observateur voit un trou à contour flou et que ce contour flou empiète légèrement sur la perspective de l'astre.

Dans la cinquième expérience, au contraire, les rayons efficaces sont limités par la pupille et la zone dégradée n'existe pas.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1031. — *On considère la sphère* $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ *et le paraboloïde* $xy - az = 0$. *Trouver la condition pour que les droites conjuguées de la droite*

$$D \qquad x - \alpha z - p = 0, \qquad y - \beta z - q = 0$$

par rapport à ces deux surfaces se rencontrent.

1° *Trouver le lieu de ces droites qui passent par un point* A *donné; le lieu des points* A *pour lesquels ce cône se décompose en deux plans rectangulaires.*

2° *Trouver l'enveloppe des droites de cette espèce situées dans un plan. Cette enveloppe est une hyperbole. Trouver l'enveloppe des plans pour lesquels c'est une hyperbole équilatère.*

Je détermine la conjuguée de D par rapport à la sphère par les plans polaires de deux de ses points, par exemple, du point $x = p$, $y = q$, $z = 0$, où elle rencontre xOy, et du point à l'infini sur cette droite.

Les équations de la conjuguée de D par rapport à la sphère seront alors

$$\Delta \begin{cases} px + qy - a^2 = 0, \\ \alpha x + \beta y + z = 0. \end{cases}$$

En opérant de la même façon pour le paraboloïde, on trouvera pour les équations de la conjuguée de D :

$$\Delta_1 \begin{cases} qx + py - az = 0, \\ \beta x + \alpha y - a = 0. \end{cases}$$

Pour que ces droites se rencontrent, il faut qu'il existe des valeurs de x, y, z vérifiant les quatre équations. On devra donc avoir

$$\begin{vmatrix} p & q & 0 & -a^2 \\ \alpha & \beta & 1 & 0 \\ q & p & -a & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & -a \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(1) \qquad a^2(\alpha^2 - \beta^2) + p^2 - q^2 = 0.$$

Donc pour que Δ et Δ_1 se rencontrent, il faut que D appartienne au complexe du second ordre défini par la relation (1).

Soient $x = rz + \sigma$ et $y = sz + \sigma$ les équations de Δ; en identifiant avec les équations trouvées précédemment, on a

$$\alpha = \frac{-\sigma}{\sigma r - \sigma s}, \qquad \beta = \frac{\sigma}{\sigma r - \sigma s}, \qquad p = \frac{-a^2 s}{\sigma r - \sigma s}, \qquad q = \frac{a^2 r}{\sigma r - \sigma s};$$

portant dans (1) on obtient $\qquad a^2(s^2 - r^2) - \sigma^2 + \sigma^2 = 0.$

La droite Δ appartient donc au même complexe.

De même, on démontrerait que Δ_1 appartient à ce complexe.

Par conséquent, si les droites Δ et Δ_1 se rencontrent, les trois droites D, Δ et Δ_1 appartiennent au complexe défini par la relation (1).

1. Soit l'une de ces droites passant par x_0, y_0, z_0 et soient x, y, z, les coordonnées d'un de ces points; on a

$$\alpha = \frac{x - x_0}{z - z_0}, \qquad \beta = \frac{y - y_0}{z - z_0}, \qquad p = \frac{zx_0 - xz_0}{z - z_0}, \qquad q = \frac{zy_0 - yz_0}{z - z_0},$$

et il suffit de porter ces valeurs dans la relation (1) pour obtenir le lieu des droites qui passent par le point A (x_0, y_0, z_0)

$$yz + zy_0 - zx_0 - xz_0 + a^2(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2 = 0.$$

C'est un cône du second degré.

Transportant l'origine au sommet, son équation devient

$$(yz_0 - zy_0)^2 - (zx_0 - xz_0)^2 + a^2(y^2 - x^2) = 0.$$

Ce cône est réel quel que soit le point A et il contient les parallèles aux bissectrices de l'angle xOy menées par le point A.

Pour qu'il se décompose en deux plans, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} -(a^2+z_0^2) & 0 & x_0z_0 \\ 0 & (a^2+z_0^2) & -y_0z_0 \\ x_0z_0 & -y_0z_0 & y_0^2-x^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$y_0^2 - x_0^2 = 0.$$

Il faudra donc que A soit dans l'un des plans bissecteurs des dièdres formés par les plans des coordonnées qui passent par Oz.

Supposons A dans le plan bissecteur du dièdre antérieur xOy ; nous aurons $y_0 = x_0$, et l'équation du cône deviendra

$$(y-x)[(a^2+z_0^2)(y+x) - 2y_0z_0z] = 0.$$

Il se compose alors du plan bissecteur lui-même et d'un plan perpendiculaire passant par la seconde bissectrice de l'angle xOy.

Si A est dans le second bissecteur, $y_0 = -x_0$, et l'équation du cône devient

$$(y+x)[(a^2+z_0^2)(y-x) - 2y_0z_0z] = 0.$$

Il se compose donc du second plan bissecteur et d'un plan perpendiculaire mené par la première bissectrice de l'angle xOy.

2. Soient deux plans P et Q passant par l'une des droites considérées :

(P) $$ux + vy + wz + t = 0,$$

(Q) $$u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0;$$

on en déduit

$$\alpha = \frac{vw_1 - wv_1}{uv_1 - vu_1}, \qquad \beta = \frac{wu_1 - uw_1}{uv_1 - vu_1}, \qquad p = \frac{vt_1 - tv_1}{uv_1 - vu_1}, \qquad q = \frac{u_1t - t_1u}{uv_1 - vu_1};$$

puis, en portant dans la relation (1),

$$a^2[(vw_1 - wv_1)^2 - (wu_1 - uw_1)^2] + (vt_1 - tv_1)^2 - (ut_1 - tu_1)^2 = 0.$$

Si dans cette équation on regarde u_1, v_1, w_1, t_1 comme des constantes, on a une équation tangentielle de l'enveloppe des droites considérées situées dans le plan Q.

Faisons dans cette équation $u = 0$, nous obtiendrons l'équation de la projection orthogonale de cette courbe sur le plan yOz :

$$a^2[(vw_1 - wv_1)^2 - w^2u_1^2] + (vt_1 - tv_1)^2 - t^2u_1^2 = 0.$$

La courbe est donc une conique. Ses directions asymptotiques sont données par l'équation obtenue en éliminant t entre cette équation et l'équation : $\frac{1}{2}\,ft = t(u_1^2 - v_1^2) + t_1v_1v = 0$.

On trouve ainsi

$$a^2(v_1^2 - u_1^2)^2(vw_1 - wv_1)^2 - w^2u_1^2 + u_1^2t_1^2v^2 - t^2u_1^2v^2 = 0,$$

ou (2) $$a^2(v_1^2 - u_1^2)(vw_1 - wv_1)^2 - w^2u_1^2 - u_1^2t_1^2v^2 = 0.$$

Cette équation est du second degré en $\frac{w}{v}$. La condition de réalité est

$$a^2u_1^2(v_1^2 - u_1^2)^2(a^2w_1^2 + t_1^2) > 0;$$

elle est toujours satisfaite quel que soit le plan Q.

Les directions asymptotiques de la projection sur yOz sont donc toujours réelles ; par suite, celles de la conique du complexe sont aussi réelles. Cette conique est une hyperbole.

Les parallèles à ces directions asymptotiques menées par O sont déterminées par l'intersection des plans

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z = 0, \\ vy + wz = 0, \end{cases}$$

quand on donne à $\frac{w}{v}$ les valeurs racines de l'équation (2).

L'intersection de ces deux plans a pour coefficients directeurs

$$wv_1 - vw_1, \qquad -wv_1, \qquad u_1v.$$

Soient α et β les racines de l'équation en $\frac{w}{v}$: les coefficients directeurs des directions asymptotiques sont

$$\alpha v_1 - w_1, \qquad -\alpha u_1, \qquad u_1 ;$$
$$\beta v_1 - w_1, \qquad -\beta u_1, \qquad u_1.$$

Pour qu'elles soient rectangulaires, il faut que

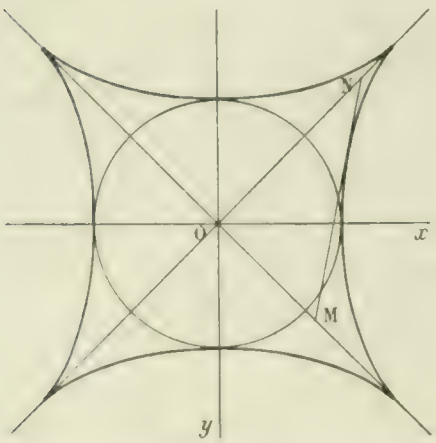
$$(\alpha v_1 - w_1)(\beta v_1 - w_1) + \alpha\beta u_1^2 + u_1^2 = 0,$$

ou

$$\alpha\beta(v_1^2 + u_1^2) - (\alpha + \beta)v_1w_1 + u_1^2 + w_1^2 = 0.$$

L'équation (2) donne

$$\alpha + \beta = \frac{2a^2(v^2 - u_1^2)v_1w_1}{a^2(v^2 - u_1^2)^2}, \qquad \alpha\beta = \frac{a^2(v_1^2 + u_1^2)w_1^2 + u_1^2w_1^2 + u_1^2v_1^2}{a^2(v^2 - u_1^2)^2}.$$



Remplaçant dans la relation précédente et simplifiant on obtient

$$a^2u_1^2(v_1^2 - w_1^2) - u_1^2(v_1^2 + w_1^2) = 0 ;$$

on reconnaîtra facilement que la solution $u_1 = 0$ ne convient pas. Il reste donc pour équation de l'enveloppe des plans :

$$a^2(v_1^2 - w_1^2) - u_1^2(v_1^2 + w_1^2) = 0.$$

Cette équation représente une hypocycloïde à quatre rebroussements située dans le plan xOy. Les tangentes aux points de rebroussements sont les bissectrices des axes Ox et Oy. Elle rencontre les axes à leur point d'intersection avec la sphère. Elle peut être considérée comme l'enveloppe d'une droite de longueur constante égale à $2a$.

Donc pour que l'hyperbole soit équilatère il faut que la portion MN de la trace du plan Q sur xOy, comprise entre les bissectrices des axes Ox et Oy, soit égale à $2a$.

J. MARCHAL.

Remarques sur la note de MM. Cans et G. Lauvernier.

QUESTIONS PROPOSÉES

1096. — Etudier :

1° L'enveloppe des cordes d'une conique qui ont leurs milieux sur une droite donnée ;

2° L'enveloppe des asymptotes d'un faisceau de coniques bitangentes en deux points fixes.

M. Rubaux, élève de l'École normale supérieure.

1097. — Deux coniques U et V se coupent aux quatre points O, A, B, C ; par l'un de ces points, O, on mène une sécante qui rencontre les coniques U et V en P et Q, puis une nouvelle sécante qui les rencontre en P' et Q'.

Démontrer que les droites OP', OP, PP', QQ' et les trois côtés du triangle ABC sont tangents à une même conique.

(Communiqué par M. Tissier.)

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1065. — *Etudier la série dont le terme général est*

$$\log n\left(\frac{1}{n^p}-\frac{1}{(n+1)^p}\right).$$

Si p est nul, tous les termes de la série sont nuls et celle-ci est convergente. Si p est négatif, la série est évidemment divergente ; car, en posant $p=-p'$, le terme général peut s'écrire

$$\log n\, n^{p'}-(n+1)^{p'},$$

ou

$$n^{p'}\log n\left[1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p'}\right];$$

d'ailleurs $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p'}-1$ est l'accroissement de la fonction $(1+x)^{p'}$ quand x part de 0 pour atteindre la valeur $\frac{1}{n}$ et la limite du rapport de ce nombre au nombre $\frac{1}{n}$ est égale à p' : par suite, le terme général peut s'écrire $-\theta_n p' n^{p'-1}\log n$, θ_n tendant vers 1 quand n grandit indéfiniment ; cette série, dont tous les termes sont négatifs, est manifestement divergente, puisque la série positive dont le terme général est $n^{p'-1}$ est elle-même divergente.

Dans le cas où p est positif, la série est convergente. Considérons en effet les trois séries

$$\frac{\log 1}{1^p}+\frac{\log 2}{2^p}+\cdots+\frac{\log n}{n^p}+\cdots,$$

$$\frac{\log 1}{2^p}+\frac{\log 2}{3^p}+\cdots+\frac{\log n}{(n+1)^p}+\cdots,$$

$$\frac{\log 2}{2^p}+\frac{\log 3}{3^p}+\cdots+\frac{\log(n+1)}{(n+1)^p}+\cdots,$$

et désignons par U_n, V_n, W_n les sommes des n premiers termes de ces séries, et par S_n la somme des n premiers termes de la série proposée. Nous avons

$$S_n=U_n-V_n \qquad \text{et} \qquad W_n=U_n-\frac{\log(n+1)}{(n+1)^p};$$

d'autre part

$$W_n-V_n=\frac{\log 2-\log 1}{2^p}+\frac{\log 3-\log 2}{3^p}+\cdots+\frac{\log(n+1)-\log n}{(n+1)^p};$$

puis

$$W_n-V_n=\frac{\log\left(1+\frac{1}{1}\right)}{2^p}+\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}\right)}{3^p}+\cdots+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(n+1)^p}.$$

Si nous appliquons le théorème des accroissements finis à la différence

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log 1,$$

nous obtenons

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{\theta}{n}},$$

θ étant un nombre compris entre 0 et 1 ; nous pouvons donc écrire

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\theta_n}{n},$$

θ_n étant un nombre positif plus petit que 1 et qui tend vers 1 quand n grandit indéfiniment. Il résulte

de là que

$$W_n = \frac{\theta_1}{1.2^p} + \frac{\theta_2}{2.3^p} + \ldots + \frac{\theta_n}{n(n+1)^p} = V_n.$$

donc

$$S_n = \frac{\theta_1}{1.2^p} + \frac{\theta_2}{2.3^p} + \ldots + \frac{\theta_n}{n(n+1)^p} - \frac{\log n+1}{n+1}$$

Quand n grandit indéfiniment, la somme des n premiers termes tend vers une limite, puisque la série

$$\frac{1}{1^{1+p}} + \frac{1}{2^{1+p}} + \ldots + \frac{1}{n^{1+p}} + \ldots$$

est convergente et qu'elle a ses termes plus forts que ceux de la nouvelle série envisagée : quant au dernier terme de S_n il tend vers 0.

Bonne solution de M. Laurence.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1061. — *On considère les triangles inscrits dans une ellipse et tels que leur centre de gravité soit au centre de l'ellipse. Démontrer que les normales aux trois sommets de ce triangle sont concourantes, et trouver le lieu de leur point de concours.*

Rapportons l'ellipse à ses axes, représentons-la par l'équation habituelle $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, et désignons par α, β, γ les anomalies excentriques des trois sommets A, B, C du triangle inscrit ; les coordonnées de ces points sont :

$$A \begin{cases} x = a\cos\alpha, \\ y = b\sin\alpha; \end{cases} \qquad B \begin{cases} x = a\cos\beta, \\ y = b\sin\beta; \end{cases} \qquad C \begin{cases} x = a\cos\gamma, \\ y = b\sin\gamma. \end{cases}$$

En exprimant que le centre des moyennes distances de ce système de points est à l'origine de coordonnées, nous obtenons les deux relations

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0,$$
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0.$$

Elles donnent $\cos\alpha = -\cos\beta - \cos\gamma$ et $\sin\alpha = -\sin\beta - \sin\gamma$: puis, en élevant au carré et en ajoutant, $2\cos(\beta - \gamma) + 1 = 0$. Cela posé, les équations des normales aux points A, B, C sont

$$ax\sin\alpha - by\cos\alpha - c^2\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$
$$ax\sin\beta - by\cos\beta - c^2\sin\beta\cos\beta = 0,$$
$$ax\sin\gamma - by\cos\gamma - c^2\sin\gamma\cos\gamma = 0,$$

et il suffit de les ajouter pour apercevoir que la condition de rencontre de ces trois droites est

$$\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma = 0.$$

Pour vérifier que cette condition est remplie, il suffit d'y remplacer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ par les valeurs que nous avons trouvées plus haut ; ce calcul nous donne

$$\sin 2\beta + \sin 2\gamma + \sin 2(\beta - \gamma) = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$2\sin(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) + \sin 2(\beta - \gamma) = 0,$$

ou

$$\sin(\beta + \gamma)[2\cos(\beta - \gamma) + 1] = 0,$$

forme sous laquelle la relation est évidente, d'après ce qui précède.

Nous aurons le lieu du point de rencontre de ces trois normales en exprimant que l'hyperbole d'Apollonius de ce point rencontre l'ellipse en quatre points dont trois sont tels que la somme de leurs abscisses et la somme de leurs ordonnées soient nulles. Désignons alors par x_0, y_0 les coordonnées du point envisagé ; l'hyperbole d'Apollonius qui lui correspond est

$$c^2xy - b^2y_0x - a^2x_0y = 0.$$

elle coupe l'ellipse en quatre points dont les abscisses sont racines de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 y_0^2 x^2}{(a^2 x_0 - c^2 x)^2} - 1 = 0;$$

la somme des racines de cette équation est $\frac{2a^2 x_0}{c^2}$; par conséquent le quatrième point de rencontre avec l'ellipse a pour coordonnées $x = \frac{2a^2 x_0}{c^2}$, $y = -\frac{2b^2 y_0}{c^2}$, et il suffit d'écrire que ce point est sur l'ellipse pour avoir l'équation du lieu. Nous trouvons ainsi l'ellipse $a^2 x^2 + b^2 y_0^2 - \frac{c^2}{4} = 0$.

Bonne solution : M. E.-N. Barisien. M. LAURENCE.

Solution géométrique. — Si l'on considère l'ellipse donnée (E), d'axes Ox, Oy, comme la projection de son cercle homographique (C), aux triangles de l'énoncé correspondent les triangles équilatéraux inscrits à (C). Les hyperboles équilatères circonscrites à l'un d'eux, ABC, passent par son orthocentre O. L'une d'elles (H) a ses asymptotes parallèles à Ox, Oy. Elle se projette suivant une hyperbole d'Apollonius de (E), ce qui démontre la proposition énoncée. L'hyperbole (H) rencontre le cercle en un quatrième point D tel que AD, BC forment des angles égaux avec les axes de (H), parallèles aux bissectrices de $\widehat{xOy}$, ou ce qui revient au même, tel que AD et OA (perpendiculaire à BC) sont également inclinés sur les asymptotes de (H). AD et OA sont donc deux cordes supplémentaires, et le centre de (H) est le milieu de OD. On en conclut que le centre ω de l'hyperbole d'Apollonius, projection de (H), décrit l'ellipse coaxiale à (E), et ayant pour demi-axes $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$. Ayant le lieu de ω, il est aisé de trouver celui du point de concours P des normales. Soit (K) l'hyperbole équilatère coaxiale à (E) et passant par ses quatre foyers. Le point P est le pôle par rapport à (K) de la polaire du point ω par rapport à (E). On en conclut par la théorie des polaires réciproques, que le lieu du point P est une ellipse coaxiale à (E), et ayant pour demi-axes $\frac{c^2}{2a}$, $\frac{c^2}{2b}$. VASNIER.

La solution géométrique de la première partie donnée par M. M. Laurence est plus simple : l'auteur remarque que chacune des médianes passant au centre de l'ellipse est le diamètre conjugué du côté correspondant; par conséquent la tangente en chacun des sommets est parallèle au côté opposé, et les normales en A, B, C sont les hauteurs du triangle ABC. Elles sont donc concourantes.

MM. Fauvernier et R. Bouvaist ont donné la solution géométrique de M. Laurence, puis ils ont achevé analytiquement comme dans la solution précédente.

Bonnes solutions analogues : MM. J. Marchal ; Cans.

1062. — *Lieu des foyers des coniques normales aux quatre côtés d'un rectangle.*

Si nous prenons pour axes les parallèles aux côtés du rectangle menées par le centre de cette figure, les équations des côtés seront représentées par $x \pm a = 0$, $y \pm b = 0$. Or il est évident *a priori* que toutes les coniques de l'énoncé ont leur centre à l'origine des coordonnées ; nous pouvons donc représenter leur équation générale par $Ax^2 + 2Bxy - Cy^2 - 1 = 0$, et il suffit alors d'exprimer que les deux côtés $x - a = 0$, $y - b = 0$, sont normaux à la conique ainsi représentée ; d'ailleurs, en partant de l'équation générale et en exprimant que la conique est orthogonale aux quatre côtés, on arriverait de suite à mettre en évidence cette simplification.

Pour exprimer que la droite $x = a$ est normale à la conique, nous écrirons qu'au point (a, β) de cette ligne la tangente est parallèle à Ox, c'est-à-dire que $f'_\beta(a, \beta) = 0$, puis nous éliminerons β entre cette relation et celle qui exprime que le point (a, β) est sur la courbe ; ce calcul facile nous donne

$$Aa^2(AC - B^2) = B^2.$$

De même, en exprimant que le côté $y = b$ est normal à la conique, nous avons la condition analogue :

$$Cb^2(AC - B^2) = B^2.$$

Ces deux relations nous donnent de suite $Aa^2 = Cb^2$; nous posons alors $Aa^2 = Cb^2 = \lambda$, et nous obtenons $B^2 = \frac{\lambda^2}{a^2 b^2 (1 + \lambda)}$; il nous suffit ensuite de poser $\frac{\lambda}{1 + \lambda} = t^2$ pour que B soit rationnel,

et nous trouvons finalement $B = \pm \frac{\lambda t}{ab} = \frac{\pm t}{ab\sqrt{1-t^2}}$. Il suffit de prendre l'un des signes pour avoir le système entier des coniques qui satisfont aux conditions exigées, car, en changeant t en $-t$, les deux valeurs de B s'échangent l'une dans l'autre : l'équation générale cherchée est donc

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{2txy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{t^2-1}{t^2} = 0.$$

Cela posé, pour exprimer que le point (x, y) est foyer, nous formerons le faisceau de deux tangentes issues de ce point ou plutôt des parallèles à ces tangentes menées par l'origine et nous écrirons qu'elles coïncident avec les droites isotropes ; ceci nous donne immédiatement les deux équations

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)f(x, y) - \left(\frac{x}{a^2} + \frac{ty}{ab}\right)^2 - \left(\frac{tx}{ab} + \frac{y}{b^2}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{t}{ab}f(x, y) - \left(\frac{x}{a^2} + \frac{ty}{ab}\right)\left(\frac{tx}{ab} + \frac{y}{b^2}\right) = 0.$$

Après simplifications et suppression du facteur $t^2 - 1$, ces deux équations deviennent

$$x^2 - y^2 + \frac{a^2 - b^2}{t^2} = 0,$$

$$xy + \frac{ab}{t} = 0 :$$

l'élimination de t entre elles se fait immédiatement, et le lieu cherché est représenté par l'équation

$$(a^2 - b^2)x^2y^2 + a^2b^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Nous ne nous arrêterons pas à la construction de cette courbe, qui ne présente aucune difficulté.

Pour $t = \pm 1$, la conique se réduit à un couple de droites confondues ; c'est ce qui explique que pour ces valeurs les équations qui déterminent les foyers soient indéterminées.

M. LAURENCE.

Solution analogue de M. E.-N. Barisien avec deux remarques donnant en outre les équations des lieux des sommets et les points de rencontre des tangentes aux points où les coniques sont normales aux côtés du rectangle.

Bonnes solutions : MM. P. Thonet ; J. Marchal ; Cans ; R. Bouvaist.

QUESTIONS PROPOSÉES

1098. — On considère deux ellipses homofocales et on les coupe par une hyperbole variable homofocale ; on appelle *points correspondants* les points ainsi obtenus sur les deux ellipses et on demande de démontrer :

1° Que les coordonnées de deux points correspondants sont proportionnelles aux axes des deux ellipses fixes ;

2° Que les carrés des diamètres qui aboutissent à deux points correspondants ont leur différence constante ;

3° Que les cordes qui joignent diagonalement deux couples de points correspondants ont des longueurs égales.

Th. Soules, à Condom.

1099. — On considère les déterminants de la forme

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

a désigne un nombre entier quelconque et n l'ordre du déterminant ; démontrer que l'on a

$$\Delta_{n+1} = (a-1)\Delta_n + (a-1)^n.$$

Application au cas de $a = 2$.

P. Thiffer.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Imprimerie Vuibert et Nony (Procédé Lahure).

12e Année. N° 6 Mars 1902.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LES INVARIANTS PONCTUELS ET TANGENTIELS

par M. **J. Sire**, à Belverne.

Invariants ponctuels.

Étant donnés six points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, situés dans un plan, je dirai que l'expression

$$\frac{(A_1A_2A_5)}{(A_3A_4A_5)} : \frac{(A_1A_2A_6)}{(A_3A_4A_6)}$$

est un des *invariants ponctuels* de ces points, en convenant de désigner par $(A_pA_qA_r)$ l'aire du triangle qui a pour sommets les points A_p, A_q, A_r.

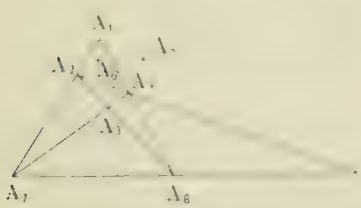
Je représenterai cet invariant par la notation $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$ et je dirai que les points A_5 et A_6 sont conjugués par rapport aux quatre points A_1, A_2, A_3, A_4.

Sans insister davantage sur cette question, je ferai remarquer que le nombre des invariants ponctuels de ces six points est égal au nombre de permutations de six objets, c'est-à-dire égal à 720 ; plusieurs d'entre eux sont égaux.

Si (x_1, y_1, z_1), ..., (x_6, y_6, z_6) sont les coordonnées homogènes des six points, on a

$$(A_1A_2A_3A_4A_5A_6) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix}}.$$

1. — *Expression des invariants* $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$, $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$, $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$ *en fonction des coordonnées normales des points* A_5 *et* A_6, *le triangle de référence étant le triangle formé par les trois diagonales du quadrilatère* $A_1A_2A_3A_4$.



Si A_1A_2, A_3A_4, A_2A_4 sont représentées par les équations $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, les quatre côtés du quadrilatère auront pour équations

$$(A_1A_2) \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0,$$
$$(A_3A_4) \qquad \alpha + \beta - \gamma = 0,$$
$$(A_1A_4) \qquad \alpha - \beta + \gamma = 0,$$
$$(A_2A_3) \qquad -\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

et les points A_1, A_2, A_3, A_4 auront respectivement pour coordonnées

$$(0, 1, -1) \quad (1, -1, 0) \quad (0, 1, 1) \quad (1, 1, 0).$$

et si on désigne par $(\alpha_5, \beta_5, \gamma_5)$, $(\alpha_6, \beta_6, \gamma_6)$ les coordonnées normales des points A_5 et A_6, on aura

$$(A_1A_2A_3A_4A_5A_6) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix}} = \frac{(\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5)}{(\alpha_5 - \beta_5 - \gamma_5)} : \frac{(\alpha_6 + \beta_6 - \gamma_6)}{(\alpha_6 - \beta_6 + \gamma_6)}.$$

De même
$$(A_1A_3A_2A_4A_5A_6) = \frac{\alpha_5}{\gamma_5} : \frac{\alpha_6}{\gamma_6},$$

$$(A_1A_4A_2A_3A_5A_6) = \frac{-\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5}{\alpha_5 + \beta_5 - \gamma_5} : \frac{-\alpha_6 + \beta_6 + \gamma_6}{\alpha_6 + \beta_6 - \gamma_6}.$$

II. — *Si* P *et* Q *sont les points de rencontre respectifs de* A_1A_6 *avec* A_2A_5, A_3A_4, *on a*

$$\frac{PA_5}{QA_5} : \frac{PA_6}{QA_6} = (A_1A_2A_3A_4A_5A_6).$$

Si on désigne par (x_5, y_5, z_5), (x_6, y_6, z_6) les coordonnées homogènes des six points, on aura

$$\frac{PA_5}{PA_6} = \frac{z_6}{z_5} \frac{\begin{vmatrix} x & y_2 & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_5 & y_5 & z_5 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}} = \frac{z_6}{z_5} \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix}}; \quad \text{de même} \quad \frac{QA_5}{QA_6} = \frac{z_6}{z_5} \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_3 & z_1 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix}};$$

d'où

$$\frac{PA_5}{PA_6} : \frac{QA_5}{QA_6} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y_2 & z \\ x & y_5 & z_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_6 & z_6 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x & y & z_1 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_5 & y_5 & z_5 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix}}, \quad \text{ce qui peut s'écrire} \quad \frac{PA_5}{QA_5} : \frac{PA_6}{QA_6} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_5 & y_5 & z_5 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_6 & y_6 & z_6 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}.$$

Cette propriété nous montre qu'on doit considérer l'invariant $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$ comme positif si les points conjugués A_5 et A_6 sont tous deux dans le même angle ou l'un dans un angle et l'autre dans son opposé par le sommet, on doit le considérer comme négatif si les points A_5, A_6 se trouvent dans des angles différents, les angles considérés n'étant autres que ceux des droites A_1A_2, A_3A_4.

III. — *Nombre de conditions pour déterminer le point* A_6 *lorsque les points* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *sont donnés.*

Je dis que le point A_6 est déterminé lorsqu'on connaît deux invariants $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$ et $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$ par exemple; si p et q sont les valeurs respectives de ces deux invariants, on a

$$\frac{PA_5}{PA_6} : \frac{QA_5}{QA_6} = p, \qquad \frac{RA_5}{RA_6} : \frac{SA_5}{SA_6} = q.$$

P, Q, R, S étant les points de rencontre respectifs de $A_5 A_6$ avec les droites A_1A_2, A_3A_4, A_1A_3, A_2A_4.

On voit par là que le point A_6 se trouve d'une part sur une droite D_1 passant par le point de rencontre des droites A_1A_2, A_3A_4, et d'autre part sur une droite D_2 passant par le point de rencontre des droites A_1A_3, A_2A_4. Il se trouve donc à l'intersection de ces deux droites.

Définition. — Je dirai que les points A_5 et A_6 sont conjugués harmoniques par rapport aux quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, si deux quelconques des invariants ponctuels $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$, $(A_1A_3A_2A_4A_5A_6)$, $(A_1A_4A_2A_3A_5A_6)$ sont égaux à -1.

IV. — *Si deux quelconques des invariants ponctuels* $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$, $(A_1A_3A_2A_4A_5A_6)$, $(A_1A_4A_2A_3A_5A_6)$ *sont égaux à* -1, *il en est de même du troisième.*

Démonstration analytique. — Si $(A_1A_3A_2A_4A_5A_6) = -1$, $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6) = -1$, on a, d'après I,

$$\frac{\alpha_5}{\gamma_5} : \frac{\alpha_6}{\gamma_6} = -1,$$

$$\frac{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5}{\alpha_5 - \beta_5 + \gamma_5} : \frac{\alpha_6 + \beta_6 + \gamma_6}{\alpha_6 - \beta_6 + \gamma_6} = -1.$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \alpha_5\gamma_6 + \gamma_5\alpha_6 = 0,$$

$$(2) \qquad \alpha_5\alpha_6 - \beta_5\beta_6 + \gamma_5\gamma_6 = 0.$$

D'autre part,

$$(A_1A_4A_2A_3A_5A_6) = \frac{(-\alpha_5+\beta_5+\gamma_5)}{(\alpha_5+\beta_5-\gamma_5)} : \frac{(-\alpha_6+\beta_6+\gamma_6)}{(\alpha_6-\beta_6-\gamma_6)} = \frac{-\alpha_5\alpha_6+\beta_5\beta_6-\gamma_5\gamma_6+\alpha_6\beta_5+\alpha_6\gamma_5-\beta_6\alpha_5+\beta_6\gamma_5+\gamma_6\alpha_5-\gamma_6\beta_5}{-\alpha_5\alpha_6+\beta_5\beta_6-\gamma_5\gamma_6-\alpha_6\beta_5+\alpha_6\gamma_5+\beta_6\alpha_5-\beta_6\gamma_5+\gamma_6\alpha_5+\gamma_6\beta_5};$$

tenant compte de (1) et (2),

$$(A_1A_4A_2A_3A_5A_6) = \frac{\alpha_6\beta_5 - \beta_6\alpha_5 + \beta_6\gamma_5 - \gamma_6\beta_5}{-\alpha_6\beta_5 + \beta_6\alpha_5 - \beta_6\gamma_5 + \gamma_6\beta_5} = -1.$$

Démonstration géométrique. — $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$ étant égal à -1, le point A_6 est sur la polaire D_1 du point A_5 par rapport au système des deux droites A_1A_2, A_3A_4; $(A_1A_3A_2A_4A_5A_6)$ étant égal à -1, il est sur la polaire D_2 du point A_5 par rapport au système des deux droites A_1A_3, A_2A_4. Or le système des deux droites (A_1A_4, A_2A_3) étant une conique passant par les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, la polaire du point A_5 par rapport à cette conique passe par A_6 et on aura

$$(A_1A_4A_2A_3A_5A_6) = -1.$$

Remarque. — Quelle que soit la conique passant par les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, le point A_6 se trouve sur la polaire du point A_5 par rapport à cette conique, de sorte que A_6 peut être déterminé par les points de rencontre des polaires de A_5 par rapport à deux coniques quelconques du faisceau ayant pour sommets les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4.

V. — *Si* A_5 et A_6 *sont conjugués harmoniques par rapport aux quatre points* A_1, A_2, A_3, A_4, *ces deux points sont les points doubles d'une involution déterminée sur la droite* A_5A_6 *par le faisceau de coniques ayant pour sommets les quatre points* A_1, A_2, A_3, A_4.

Si M, M′ sont les points de rencontre de la droite A_5A_6 avec une conique C du faisceau, la division (A_5A_6MM') est harmonique et par suite ..., etc.

La réciproque est évidente.

VI. — *Si le point* A_5 *décrit une droite, son conjugué harmonique* A_6 *par rapport aux quatre points* A_1, A_2, A_3, A_4 *décrira une conique.*

Cette propriété bien connue des faisceaux de coniques pourrait s'établir aisément à l'aide des résultats précédents.

Invariants tangentiels.

VII. — *L'invariant ponctuel des pôles de six droites du plan par rapport à une conique quelconque est constant.*

Soient (1) $F(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2\,bvw + 2\,b'uw + 2\,b''uv = 0$

l'équation tangentielle d'une conique et $(u_1, v_1, w_1), \ldots, (u_6, v_6, w_6)$ les coordonnées tangentielles de six droites du plan ; leurs pôles par rapport à la conique (1) auront respectivement pour coordonnées ponctuelles

$$F'_{u_1}, F'_{v_1}, F'_{w_1}; \ldots; F'_{u_6}, F'_{v_6}, F'_{w_6}$$

l'invariant ponctuel des six pôles sera donc égal à

$$(2)\qquad \frac{\begin{vmatrix} F'_{u_1} & F'_{v_1} & F'_{w_1} \\ F'_{u_2} & F'_{v_2} & F'_{w_2} \\ F'_{u_5} & F'_{v_5} & F'_{w_5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{u_2} & F'_{v_3} & F'_{w_3} \\ F'_{u_4} & F'_{v_4} & F'_{w_4} \\ F'_{u_5} & F'_{v_5} & F'_{w_5} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} F'_{u_1} & F'_{v_1} & F'_{w_1} \\ F'_{u_2} & F'_{v_2} & F'_{w_2} \\ F'_{u_6} & F'_{v_6} & F'_{w_6} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{u_3} & F'_{v_3} & F'_{w_3} \\ F'_{u_4} & F'_{v_4} & F'_{w_4} \\ F'_{u_6} & F'_{v_6} & F'_{w_6} \end{vmatrix}}.$$

Mais

$$\begin{vmatrix} F'_{u_p} & F'_{v_p} & F'_{w_p} \\ F'_{u_q} & F'_{v_q} & F'_{w_q} \\ F'_{u_r} & F'_{v_r} & F'_{w_r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} au_p + b'v_p + b''w_p & b''u_p + a'v_p + bw_p & b'u_p + bv_p + a''w_p \\ au_q + b'v_q + b''w_q & b''u_q + a'v_q + bw_q & b'u_q + bv_q + a''w_q \\ au_r + b'v_r + b''w_r & b''u_r + a'v_r + bw_r & b'u_r + bv_r + a''w_r \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} u_p & v_p & w_p \\ u_q & v_q & w_q \\ u_r & v_r & w_r \end{vmatrix},$$

Δ désignant le discriminant de la forme $F(u, v, w)$.

Il en résulte que (2) devient

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_5 & v_5 & w_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_3 & v_3 & w_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 \\ u_5 & v_5 & w_5 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_6 & v_6 & w_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_3 & v_3 & w_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 \\ u_6 & v_6 & w_6 \end{vmatrix}}.$$

Je dirai que ce rapport est un des *invariants tangentiels* ou *polaires* des six droites considérées. Je désignerai cet invariant par la notation $(D_1D_2D_3D_4D_5D_6)$, et je dirai que D_5 et D_6 sont conjuguées par rapport aux quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4.

La théorie des invariants tangentiels pourrait se faire indépendamment de la théorie des invariants ponctuels à l'aide des coordonnées tangentielles. Mais par suite de leur définition, elle découle immédiatement de celles des invariants ponctuels de sorte qu'on peut énoncer les propriétés suivantes :

VIII. — *Si a, b, O sont les points de rencontre respectifs des droites D_1, D_2 ; D_3, D_4 ; D_5, D_6, on a*

$$(D_1D_2D_3D_4D_5D_6) = (Oab\,D_5D_6),$$

$Oab\,D_5D_6$ désignant la valeur du rapport anharmonique du faisceau formé par les droites Oa, Ob, D_5, D_6.

IX. — *Si l'on se donne les droites D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, la droite D_6 conjuguée de D_5 sera déterminée si l'on connaît deux quelconques des invariants*

$$(D_1D_2D_3D_4D_5D_6), \quad (D_1D_2D_3D_4D_5D_6), \quad (D_1D_2D_3D_4D_5D_6).$$

Définition. — Les droites D_5 et D_6 seront conjuguées harmoniques par rapport aux quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4, si deux quelconques des invariants $(D_1D_2D_3D_4D_5D_6)$; $(D_1D_2D_3D_4D_5D_6)$; $(D_1D_2D_3D_4D_5D_6)$ sont égaux à -1.

X. — *Si deux quelconques des invariants* $(D_1D_2D_3D_4D_5D_6)$, $(D_1D_3D_2D_4D_5D_6)$, $(D_1D_4D_2D_3D_5D_6)$ *sont égaux à* -1, *il en est de même du troisième.*

XI. — *Si la droite* D_5 *tourne autour d'un point fixe, sa conjuguée harmonique* D_6 *par rapport à quatre droites* D_1, D_2, D_3, D_4 *enveloppe une conique.*

XII. — *Si deux droites* D_5, D_6 *sont conjuguées harmoniques par rapport aux quatre droites* D_1, D_2, D_3, D_4, *ces deux droites sont les rayons doubles du faisceau involutif formé par les tangentes issues du point de concours des droites* D_5 *et* D_6 *à toutes les coniques du faisceau déterminé par les quatre droites* D_1, D_2, D_3, D_4.

Réseaux ponctuels et tangentiels de coniques.

XIII. — *L'invariant tangentiel des polaires d'un point par rapport à six coniques d'un réseau ponctuel est indépendant de la position du point.*

Soient

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 f_1 + \mu_1 f_2 + \nu_1 f_3 = 0,\\
&\lambda_2 f_1 + \mu_2 f_2 + \nu_2 f_3 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_6 f_1 + \mu_6 f_2 + \nu_6 f_3 = 0
\end{aligned}$$

les équations de six coniques d'un réseau, et (x_0, y_0, z_0) les coordonnées d'un point quelconque du plan. Les polaires de ce point par rapport aux six coniques du réseau auront respectivement pour équations

$$\begin{aligned}
&\Sigma x\left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \mu_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_0} + \nu_1 \frac{\partial f_3}{\partial x_0}\right) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Sigma x\left(\lambda_6 \frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \mu_6 \frac{\partial f_2}{\partial x_0} + \nu_6 \frac{\partial f_3}{\partial x_0}\right) = 0,
\end{aligned}$$

le signe Σ s'étendant aux variables y et z.

Remarquant que

$$\begin{vmatrix}
\lambda_p \frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \mu_p \frac{\partial f_2}{\partial x_0} + \nu_p \frac{\partial f_3}{\partial x_0}, & \lambda_p \frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \mu_p \frac{\partial f_2}{\partial y_0} + \nu_p \frac{\partial f_3}{\partial y_0}, & \lambda_p \frac{\partial f_1}{\partial z_0} + \mu_p \frac{\partial f_2}{\partial z_0} + \nu_p \frac{\partial f_3}{\partial z_0}\\
\lambda_q \frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \mu_q \frac{\partial f_2}{\partial x_0} + \nu_q \frac{\partial f_3}{\partial x_0}, & \lambda_q \frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \mu_q \frac{\partial f_2}{\partial y_0} + \nu_q \frac{\partial f_3}{\partial y_0}, & \lambda_q \frac{\partial f_1}{\partial z_0} + \mu_q \frac{\partial f_2}{\partial z_0} + \nu_q \frac{\partial f_3}{\partial z_0}\\
\lambda_r \frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \mu_r \frac{\partial f_2}{\partial x_0} + \nu_r \frac{\partial f_3}{\partial x_0}, & \lambda_r \frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \mu_r \frac{\partial f_2}{\partial y_0} + \nu_r \frac{\partial f_3}{\partial y_0}, & \lambda_r \frac{\partial f_1}{\partial z_0} + \mu_r \frac{\partial f_2}{\partial z_0} + \nu_r \frac{\partial f_3}{\partial z_0}
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} \lambda_p & \mu_p & \nu_p\\ \lambda_q & \mu_q & \nu_q\\ \lambda_r & \mu_r & \nu_r \end{vmatrix} \cdot \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_0, y_0, z_0)},$$

on déduit que l'invariant tangentiel des polaires considérées est égal à

$$\frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2\\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4\\ \lambda_5 & \mu_5 & \nu_5\\ \lambda_6 & \mu_6 & \nu_6 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2\\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4\\ \lambda_5 & \mu_5 & \nu_5\\ \lambda_6 & \mu_6 & \nu_6 \end{vmatrix}}.$$

Cette valeur constante portera le nom d'invariant ponctuel des six coniques considérées.

XIV. — *L'invariant ponctuel des pôles d'une droite par rapport à six coniques d'un réseau tangentiel est indépendant de la position de la droite (Invariant ponctuel des six coniques du réseau).*

Si on ne considère que les coniques proprement dites des réseaux tangentiels et ponctuels, on peut énoncer les deux propriétés suivantes :

XV. — *L'invariant ponctuel des pôles d'une droite par rapport à six coniques d'un réseau ponctuel est indépendant de la position de la droite (invariant ponctuel des six coniques).* Démonstration analogue à XIII.

XVI. — *L'invariant tangentiel des polaires d'un point par rapport à six coniques d'un réseau tangentiel est indépendant de la position du point (invariant tangentiel des six coniques).*

XVII. — *A toutes les droites du plan correspondent toutes les coniques d'un réseau ponctuel et l'invariant tangentiel de six droites est égal à celui des six coniques correspondantes.*

J'ai démontré plus haut qu'à la droite ayant pour équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

correspond la conique représentée par l'équation

$$uf_1 + vf_2 + wf_3 = 0.$$

Si on fait varier u, v, w, on obtiendra d'une part toutes les droites du plan et d'autre part toutes les coniques d'un réseau.

Si six droites ont respectivement pour coefficients $(u_1, v_1, w_1), \ldots (u_6, v_6, w_6)$ leurs coniques correspondantes auront pour équations

$$u_1 f_1 + v_1 f_2 + w_1 f_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_6 f_1 + v_6 f_2 + w_6 f_3 = 0,$$

et on voit que l'invariant tangentiel est le même dans les deux cas.

XVIII. — *A tous les points du plan correspondent toutes les coniques d'un réseau ponctuel et l'invariant ponctuel de six points est égal à l'invariant ponctuel des six coniques correspondantes.*

XIX. — *A toutes les droites passant par un point fixe, correspondent toutes les coniques d'un faisceau et le rapport anharmonique de quatre droites est égal au rapport anharmonique des quatre coniques correspondantes.*

Je prends pour origine des coordonnées le point de concours des droites. Si $y + mx = 0$ est l'équation d'une de ces droites, sa conique correspondante sera représentée par l'équation $mf_1 + f_2 = 0$.

Si on fait varier m, on obtiendra d'une part toutes les droites passant par l'origine et d'autre part toutes les coniques d'un faisceau.

Si

$$y + m_1 x = 0, \qquad y + m_2 x = 0, \qquad y + m_3 x = 0, \qquad y + m_4 x = 0$$

sont les équations de quatre droites, leurs coniques conjuguées seront représentées par les équations

$$m_1 f_1 + f_2 = 0, \qquad m_2 f_1 + f_2 = 0, \qquad m_3 f_1 + f_2 = 0, \qquad m_4 f_1 + f_2 = 0,$$

et on voit que le rapport anharmonique est le même dans les deux cas.

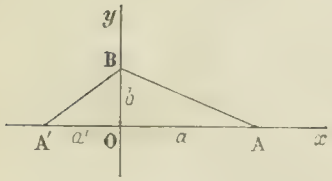
XX. — *A tous les points situés sur une droite correspondent toutes les coniques d'un faisceau tangentiel et le rapport anharmonique des quatre points est égal au rapport anharmonique des quatre coniques correspondantes.*

(*A suivre.*)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Concours de 1901)

Géométrie analytique.

1038. — *Soient* Ox, Oy *deux axes de coordonnées rectangulaires ; soient* a *et* a' *les abscisses de deux points* A *et* A′ *de l'axe* Ox, *et* b *l'ordonnée d'un point* B *de l'axe* Oy. *On considère toutes les hyperboles équilatères* (H_λ) *circonscrites au triangle* AA′B.



I. — *Calculer les coordonnées* x_1, y_1 *du quatrième point* M *de rencontre de la circonférence circonscrite au triangle* AA′B *avec l'hyperbole* (H_λ). *Montrer qu'en désignant par* λ *un paramètre variable, ces coordonnées peuvent être mises sous la forme*

$$x_1 = \frac{A + B\lambda}{1 + \lambda^2}, \qquad y_1 = \lambda x_1 + b,$$

et donner les valeurs des constantes A *et* B.

II. — *Vérifier par le calcul que le diamètre de l'hyperbole qui est mené par le point* M *passe par un point fixe, quel que soit* λ.

Le démontrer géométriquement.

III. — *Trouver le lieu géométrique des points de contact des tangentes menées aux hyperboles* (H_λ) *parallèlement à une direction donnée, et examiner en particulier les cas où cette direction est celle des axes de coordonnées.*

I. — Les hyperboles équilatères circonscrites au triangle AA′B devant rencontrer l'axe des x aux points d'abscisses a et a', nous apercevons de suite que leur équation générale est de la forme

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - (a + a')x + 2\mu y + aa' = 0.$$

Il nous reste à exprimer que cette équation est vérifiée par les nombres $x = 0$, $y = b$, ce qui nous donne $-b^2 - 2\mu b + aa' = 0$, puis, $2\mu = b - \frac{aa'}{b}$.

Posons, pour abréger, $h = -\frac{aa'}{b}$ et remplaçons 2μ par $b + h$, nous aurons l'équation générale demandée :

$$(1) \qquad x^2 + 2\lambda xy - y^2 - (a + a')x - (b + h)y + aa' = 0.$$

Elle montre que l'ensemble des hyperboles équilatères circonscrites au triangle forme un faisceau linéaire et que le quatrième point de base de ce faisceau est le point de Oy dont l'ordonnée est égale à $h = -\frac{aa'}{b}$, c'est-à-dire, comme on le vérifie aisément, coïncide avec l'orthocentre du triangle ; toutes ces propriétés sont bien connues et nous ne les rappelons en passant que parce que la vérification est immédiate.

Un calcul analogue au précédent donne de suite l'équation du cercle circonscrit au triangle AA′B :

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - (a + a')x - (b - h)y + aa' = 0.$$

Celle-ci montre que le cercle circonscrit coupe la hauteur Oy au point d'ordonnée $-h$, symétrique de l'orthocentre par rapport à la base du triangle ; cette propriété élémentaire du triangle est aussi très connue et nous la rappelons uniquement pour la même raison.

Cela posé, retranchons l'équation (2) de l'équation (1) ; nous obtiendrons

$$2\lambda xy - 2y^2 + 2hy = 0,$$

équation qui se décompose en deux : $y = 0$, qui est l'équation de la sécante commune AA′, et $y = \lambda x + h$, qui représente la sécante associée à celle-ci. Cette seconde droite passe au point B et rencontre le cercle au quatrième point de rencontre des coniques (1) et (2), au point M de l'énoncé.

Nous aurons les coordonnées de ce point en remplaçant y par $\lambda x + b$ dans l'équation du cercle, puis en supprimant la solution évidente $x = 0$, qui correspond au point B ; nous trouvons ainsi

$$x_1 = \frac{a + a' - \lambda(b + b')}{1 + \lambda^2}.$$

Les coordonnées du point M sont donc bien fournies par les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{A + B\lambda}{1 + \lambda^2}, \\ y_1 = \lambda x_1 + b, \end{cases}$$

en désignant par A et B les constantes $a + a'$ et $-b - b'$.

II. — Tous les diamètres de la conique $f(x, y) = 0$ sont donnés par l'équation $f'_x + mf'_y = 0$: nous déterminerons celui qui passe au point M en prenant pour $f(x, y)$ le premier membre de l'équation (1) et en exprimant que son équation est vérifiée par les nombres x_1 et y_1. Ce calcul facile nous donne

$$m = \frac{a + a' - 2\lambda b}{b - b'},$$

et, en portant cette valeur dans l'équation $f'_x + mf'_y = 0$, nous avons l'équation du diamètre indiqué :

$$(4) \qquad 2\lambda^2 b(x - y) + (a + a')(x + b + b')y - b(b + b')x + \lambda(b - b')x - (a + a')(y - b) = 0.$$

Pour qu'il passe par un point fixe, il faut que le trinome en λ que nous venons d'écrire soit identiquement nul pour des valeurs fixes de x et de y ; or ceci se vérifie aisément et nous trouvons le point $(0, b)$, c'est-à-dire l'orthocentre du triangle.

III. — Soit m le coefficient angulaire de la direction donnée : les points de contact avec l'hyperbole des tangentes parallèles à cette direction sont à l'intersection de cette hyperbole $f(x, y) = 0$ avec le diamètre conjugué de la direction m, $f'_x + mf'_y = 0$; nous aurons donc le lieu demandé en éliminant λ entre ces deux équations. De la seconde nous tirons

$$\lambda = \frac{2(my - x)(a + a' - m(b + b'))}{2(y + mx)},$$

et il suffit de porter cette valeur dans la première pour avoir l'équation du lieu demandé :

$$(5) \qquad x^2 - y^2 - (a - a')x + (b - b')y + aa'(y - mx) + xy(2my - x)(a + a' - m(b + b')) = 0.$$

Sous cette forme, nous voyons immédiatement que le lieu passe aux quatre points de base du faisceau des hyperboles équilatères, A, A', B et H, qu'il passe à l'origine O et admet pour tangente en ce point la droite $y + mx = 0$, symétrique de la droite $y - mx = 0$ par rapport à la base du triangle. Il passe donc également aux pieds des deux autres hauteurs et admet pour tangentes en ces points des droites déterminées de façon semblable à l'aide de la direction m.

En développant et simplifiant l'équation (5), elle prend la forme

$$(6) \qquad (mx - y)(x^2 + y^2) + (b - b')y^2 - m(a + a')(x^2 + aa'(y + mx)) = 0,$$

et nous voyons qu'elle représente une cubique circulaire ayant pour direction aymptotique réelle la direction donnée.

La construction de cette courbe n'est pas demandée ; mais il serait facile de la tracer, pour une forme déterminée de la figure donnée, en procédant d'abord à une décomposition du plan en régions, à l'aide de la forme (5), en trouvant et construisant l'asymptote à l'aide de la forme (6), et en discutant sommairement cette équation.

Si dans l'équation (6) on fait $m = 0$, on voit que le lieu se décompose en $y = 0$, qui représente la base AA', et $x^2 + y^2 + (b - b')y - aa' = 0$, qui représente le cercle décrit sur BH comme diamètre.

Pour m infini, le lieu se décompose en $x = 0$, qui représente la hauteur correspondant au côté AA', et en $x^2 + y^2 - (a + a')x + aa' = 0$, qui représente le cercle décrit sur AA' comme diamètre.

Solution géométrique. — Nous nous appuierons ici sur les propriétés les plus simples d'un faisceau linéaire de coniques ; il nous suffira de rappeler ces propriétés quand nous en aurons besoin.

Les hyperboles équilatères du plan tracent sur la droite de l'infini une involution dont les points doubles sont les points I et J. D'après le théorème de Desargues, toutes les coniques du faisceau déterminé par deux d'entre elles tracent sur cette droite la même involution. Il en résulte, d'une part, que toutes les coniques d'un tel faisceau sont des hyperboles équilatères, d'autre part, que si on choisit pour coniques de base deux hyperboles équilatères circonscrites au triangle AA'B, les coniques du faisceau ainsi déterminé coïncident avec l'ensemble des hyperboles équilatères circonscrites au triangle. Or parmi celles-ci se trouvent les coniques impropres formées par les côtés du triangle et les hauteurs correspondantes. Toutes ces hyperboles passent donc aussi par le point de concours des hauteurs H.

Dans un faisceau linéaire, les polaires d'un point passent toutes par un même point conjugué du premier par rapport à toutes les coniques du faisceau ; le point de rencontre des polaires de deux points fixes décrit une conique qui passe aux deux points conjugués et aux trois sommets du triangle conjugué commun aux coniques du faisceau ; par conséquent le pôle d'une droite décrit une conique circonscrite à ce triangle et passant par les deux points doubles de l'involution déterminée sur cette droite.

Dans le cas actuel, le triangle conjugué commun a pour sommets les pieds des trois hauteurs. Si donc nous cherchons le lieu des centres, c'est-à-dire le lieu des pôles de la droite de l'infini, nous trouverons une conique passant aux pieds des hauteurs et aux points I et J ; c'est le cercle des neuf points du triangle donné. Ce cercle est homothétique du cercle circonscrit par rapport au point H et dans le rapport $\frac{1}{2}$. Si donc nous appelons ω un des points de ce cercle, c'est-à-dire un centre de l'une des hyperboles du faisceau, en prolongeant $H\omega$ d'une longueur $\omega M = H\omega$, le point M sera à la fois sur l'hyperbole et sur le cercle circonscrit.

Ce raisonnement donne la position du quatrième point de rencontre de l'hyperbole avec le cercle et prouve en même temps que le diamètre de ce point passe au point fixe H.

Considérons alors un point P, quelconque, fixe dans le plan, et étudions le lieu des points de contact des tangentes menées de ce point aux coniques du faisceau. Sur chaque droite Δ passant par le point P, il y a deux points ordinaires du lieu, les points doubles de l'involution déterminée sur cette droite par les coniques du faisceau ; en outre le point P fait une fois partie du lieu, car il y a une conique et une seule du faisceau qui passe en P. Donc le lieu est une cubique passant par le point P. Menons alors PA ; sur cette droite les deux points doubles de l'involution sont confondus avec A ; la cubique passe donc au point A et y admet pour tangente la droite PA ; elle passe de même en A', B et H et y admet pour tangentes PA', PB et PH. Les points doubles des coniques impropres du faisceau sont aussi des positions particulières du point de contact. La cubique passe aussi en ces points. Enfin elle admet pour tangente en P la tangente à la conique du faisceau qui y passe, car, pour cette droite, l'un des points doubles de l'involution est venu coïncider avec le point P.

Revenons au problème proposé et supposons que le point P soit à l'infini dans la direction $y = mx$. Nous aurons pour lieu une cubique passant aux points A, A', B, H, aux pieds des trois hauteurs, ayant pour direction asymptotique la direction $y - mx = 0$ et pour asymptote correspondante celle de l'hyperbole du faisceau qui admet cette direction asymptotique. Les tangentes aux points A, A', B et H sont parallèles à la direction $y - mx = 0$. Celles des pieds des hauteurs sont les conjuguées des parallèles à la direction m menées par chacun de ces points par rapport aux deux droites qui forment la conique réciproque correspondante ; ce sont donc les symétriques de la direction m par rapport aux hauteurs.

Enfin cette cubique est circulaire, car elle contient les points doubles de l'involution déterminée sur la droite de l'infini, qui, dans le cas actuel, passe par le point P.

Dans le cas où la direction m coïncide avec celle d'un côté ou bien d'une hauteur du triangle, cette droite fait partie du lieu, car elle le rencontre en quatre points, trois à distance finie et un à l'infini ; l'autre partie du lieu est alors un cercle passant par les points qui restent et que nous avons signalés.

R. ELGHOZI, élève au lycée de Marseille.

Bonnes solutions : MM. M. Laurence ; J. Franceschini, à Corbura ; L. Odou, pensionnat Valbenoite ; Souls, à Condom ; T. Lemoyne, à Troyes.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1030. — *Deux paraboles de sommets fixes et de paramètres constants varient de façon que leurs quatre points communs soient sur un même cercle. Trouver le lieu du centre de ce cercle.*

Soient A et B les sommets ; prenons pour axe des x la droite AB et pour axe des y la perpendi-

culaire au milieu de AB, et appelons a l'abscisse du point A, $-a$ celle du point B; désignons en outre par p et q les paramètres des deux paraboles. Leurs équations seront

$$(x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 = 2\varepsilon p\,(x-a)\sin\varphi - y\cos\varphi),$$
$$(x+a)\sin\varphi - y\cos\varphi)^2 = 2\varepsilon' q\,(x+a)\cos\varphi + y\sin\varphi),$$

ε et ε' étant égaux à ± 1.

La première de ces équations représente l'équation générale des paraboles de paramètre p ayant le point A pour sommet; la seconde, l'équation générale des paraboles de paramètre q ayant le point B pour sommet. Pour justifier la simultanéité de ces deux équations, il suffit de montrer que les deux paraboles indiquées doivent avoir leurs axes rectangulaires. Or on sait que si les quatre points de rencontre des deux coniques sont sur un cercle, les directions principales de ces deux coniques sont parallèles. Ici cela peut se produire de deux façons : ou bien parce que les deux paraboles ont leurs axes parallèles, ou bien parce qu'elles ont leurs axes perpendiculaires. Dans le premier cas, les deux paraboles sont homothétiques, elles se coupent en deux points confondus à l'infini et deux points à distance finie ; ces quatre points ne sont pas sur un cercle proprement dit. Le second cas est donc seul acceptable.

Le système des deux équations écrites étant justifié, on voit qu'il suffit de les ajouter pour obtenir l'équation du cercle qui passe aux quatre points de rencontre des deux paraboles. On obtient ainsi

$$x^2 + y^2 - 2a\cos\varphi(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + 2a\sin\varphi(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + a^2$$
$$= 2\varepsilon p\,(x-a)\sin\varphi - y\cos\varphi] + 2\varepsilon' q\,(x+a)\cos\varphi + y\sin\varphi).$$

En dérivant cette équation par rapport à x et à y, nous aurons les deux équations qui donnent le centre de ce cercle :

$$x - a\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi - \varepsilon p\sin\varphi - \varepsilon' q\cos\varphi = 0,$$
$$y - 2a\sin\varphi\cos\varphi + \varepsilon p\cos\varphi - \varepsilon' q\sin\varphi = 0.$$

Ce sont les équations paramétriques du lieu, en fonction de φ.

Multiplions la première par $\cos\varphi$, la seconde par $\sin\varphi$ et ajoutons, puis recommençons la même opération avec les multiplicateurs $\sin\varphi$ et $-\cos\varphi$, nous aurons les deux équations

$$(x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi - \varepsilon' q = 0,$$
$$(x-a)\sin\varphi - y\cos\varphi - \varepsilon p = 0,$$

et l'équation du lieu s'obtiendra aisément en les résolvant par rapport à $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ et portant dans la relation $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Nous trouvons de cette manière

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = (\varepsilon pq - \varepsilon' qx - \varepsilon' qa)^2 + (\varepsilon' qy - \varepsilon px - \varepsilon pa)^2,$$

ou bien

$$(1)\qquad (x^2 + y^2 - a^2)^2 = (p^2 + q^2)(x^2 + y^2 + a^2) - 2a(p^2 - q^2)x \pm 4apqy.$$

Le lieu se compose donc de deux quartiques bicirculaires. Il est facile de montrer que ce sont deux limaçons de Pascal. En effet les deux droites qui engendrent le lieu,

$$(x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi - \varepsilon' q = 0,$$
$$(x+a)\sin\varphi - y\cos\varphi - \varepsilon p = 0,$$

restent respectivement à des distances constantes, q et p, des deux points A et B ; elles enveloppent donc des cercles décrits de A et B comme centres avec q et p pour rayons. En outre, elles restent rectangulaires. La propriété est dès lors évidente.

Le calcul montre d'ailleurs immédiatement que chacune des deux courbes représentées par l'équation (1) a un point double : car les deux droites rectangulaires $\varepsilon py - \varepsilon' q(x+a) = 0$ et $\varepsilon' qy + \varepsilon p(x-a) = 0$ se coupent sur le cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

En mettant en évidence les coordonnées de ce point et y portant les axes, on montre aisément que les deux courbes sont des limaçons de Pascal.

J. MARCHAL et E.-N. BARISIEN.

Solutions satisfaisantes : MM. G. Fauvernier, P. Thonet.

Solution géométrique. — Nous avons déjà montré que les deux paraboles doivent avoir leurs axes rectangulaires. Partons de ce point et considérons le faisceau linéaire de coniques défini par les deux paraboles. Nous savons que toutes les polaires d'un point par rapport aux coniques du faisceau passent par un même point. Appliquons cette propriété aux points I et J ; la polaire du point I par rapport à une parabole est parallèle à l'axe de cette parabole et passe au point de la directrice dont l'ordonnée relative à l'axe est égale à pi ; elle est donc tangente au cercle ayant pour centre le sommet de cette parabole et pour rayon pi ; de même la polaire par rapport à la seconde parabole est parallèle à l'axe de cette parabole et tangente à un cercle ayant pour centre le sommet de cette droite et pour rayon qi. Ces deux droites se coupent en un point A où passe la polaire de I par rapport au cercle, c'est-à-dire l'une des asymptotes du cercle ; le centre du cercle est donc sur la droite AI. Il est aussi sur la droite A'J qu'on obtient de même en partant du point J ; c'est donc l'un des points de Poncelet relatif au couple A, A'. Or ces points sont sur une droite perpendiculaire à AA' en son milieu et à une distance de ce point égale à $\frac{AA'}{2i}$. Les deux points A et A' ont pour coordonnées par rapport aux axes des deux paraboles $(\pm pi, \pm qi)$ et $(\mp pi, \mp qi)$; les points de Poncelet qui leur correspondent ont pour coordonnées dans le même système $(\pm q, \pm p)$ et $(\mp q, \mp p)$; on les obtient donc en décrivant des sommets des deux paraboles comme centres des cercles ayant pour rayons respectifs q et p, et en menant à ces deux cercles des tangentes parallèles aux axes des deux paraboles, c'est-à-dire rectangulaires entre elles. On forme ainsi un rectangle variable dont les quatre sommets décrivent deux limaçons de Pascal.

LENOIR, élève du lycée Louis-le-Grand.

Bonne solution : M. M. Rebeix.

Remarques géométriques. — La question a déjà été proposée et résolue dans la *Revue* (*). Si l'on se reporte à la solution géométrique, on voit que les distances du centre ω du cercle aux axes O_1X_1, O_2X_2 des deux paraboles sont respectivement égales à leurs paramètres p_2, p_1. Cette remarque permet de résoudre le problème général suivant :

Deux paraboles de grandeurs constantes tournent autour de deux points de leur plan, de façon que leurs quatre points communs soient sur un même cercle. Trouver le lieu du centre de ce cercle.

Soient en effet P_1, P_2 les points fixes, et d_2, d_1 leurs distances aux axes O_1X_1, O_2X_2 des paraboles (comptées positivement dans les sens O_2X_2, O_1X_1, négativement dans les sens opposés). Le point ω est à l'intersection des parallèles à O_1X_1, O_2X_2 menées à des distances $q_2 = p_2 - d_2$, $q_1 = p_1 - d_1$. Il se confond donc avec le centre du cercle passant aux quatre points communs de deux paraboles de sommets P_1, P_2 et de paramètres q_1, q_2. On est ainsi ramené à la question primitive. Il a été démontré que le lieu du centre du cercle se composait de deux limaçons de Pascal.

VASNIER.

QUESTIONS PROPOSÉES

1100. — Soit ABC un triangle inscrit dans une conique sur laquelle on prend quatre points quelconques. Par ces quatre points passent deux coniques tangentes à chacun des côtés du triangle ABC. Démontrer que les six points de contact ainsi obtenus sont trois à trois en ligne droite.

M. d'Ocagne.

1101. — On donne deux droites fixes, D et D', et on considère une droite mobile Δ qui s'appuie sur ces deux droites.

1° Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée d'un point fixe A sur la droite Δ.

2° Ce lieu est une surface cubique qui contient les droites D et D'. Montrer que tout plan passant par D ou par D' coupe cette surface suivant un cercle. Faire voir qu'il y a d'autres séries de sections circulaires.

3° Trouver le lieu des axes des cercles dont les plans passent par la droite D.

(*) Question 623 (numéro de Novembre 1897 de la *Revue*).

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE (1901, 1re session).

Géométrie analytique.

1055. — *On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et on demande :*

1° *Démontrer que les coniques du faisceau Δ représenté par l'équation*

$$(m^2 - 1)y^2 - 2mxy - 2py - 2mpx - p^2 = 0,$$

où m est variable, ont un foyer commun, une asymptote commune et que la directrice correspondante au foyer commun passe par un point fixe.

2° *Déterminer les points par lesquels passent deux hyperboles équilatères du faisceau et ceux par lesquels n'en passe qu'une ; puis prenant un point (α, β) sur le lieu de ces derniers, exprimer en fonction de α et β les coordonnées des centres des deux coniques qui passent par le point (α, β).*

3° *Trouver le lieu des foyers réels des coniques Δ et celui des pieds des directrices correspondantes sur l'axe focal (le lieu se compose de deux courbes distinctes). Donner une construction géométrique de la tangente en un point quelconque.*

4° *Trouver le lieu des symétriques des foyers réels par rapport aux asymptotes des coniques Δ (le lieu se compose de deux courbes distinctes) et celui de leurs sommets réels. On construira géométriquement la tangente au point $x = 0$, $y = -p$ de ce dernier.*

1. L'équation donnée peut s'écrire

$$(\Delta) \qquad m^2y^2 - 2mx(y + p) - (y + p)^2 = 0 ;$$

elle contient le paramètre m au second degré. En écrivant que cette equation admet une racine double en m, on aura l'équation de l'enveloppe des coniques Δ, savoir :

$$x^2(y + p)^2 + y^2(y + p)^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux :

1° $x^2 + y^2 = 0$ représente le système des droites isotropes menées par l'origine ; toutes les coniques Δ sont tangentes à ces droites, donc l'origine est foyer pour toutes ces coniques. On constate en effet que l'équation (Δ) peut se mettre sous la forme

$$m^2(x^2 + y^2) - 2(y + mx + p)^2.$$

La directrice relative au foyer O a pour équation :

$$y + mx + p = 0,$$

elle passe par le point fixe $P(x = 0, \quad y = -p)$.

2° $y + p = 0$. Toutes les coniques Δ sont tangentes à la droite $y + p = 0$. Pour avoir le point de contact, il suffit de faire $y = -p$ dans l'équation (Δ) ; elle se réduit à $m^2p^2 = 0$, ce qui indique que le point de contact est rejeté à l'infini, sauf dans le cas de $m = 0$ où il serait indéterminé ; Δ se réduit alors à une droite double $(y + p)^2 = 0$.

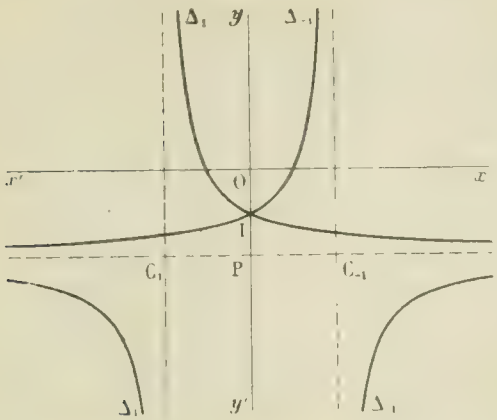
Toutes les coniques Δ admettent donc la droite $y + p = 0$ comme asymptote.

En résumé les coniques Δ ont un foyer commun à l'origine, une asymptote commune $y + p = 0$, et la directrice relative au foyer commun passe par un point fixe, qui est la projection du foyer O sur l'asymptote.

2. L'équation donnée ne peut représenter une hyperbole équilatère que pour $m = \pm 1$. Il y a donc deux hyperboles équilatères Δ, savoir

$$(\Delta_1) \qquad 2xy - 2py + 2px + p^2 = 0,$$

$$(\Delta_2) \qquad 2xy - 2py - 2px - p^2 = 0 :$$



On peut passer d'une équation à l'autre en changeant x en $-x$; ces deux hyperboles équilatères sont donc symétriques par rapport à l'axe des y. Elles ont une asymptote commune : $y + p = 0$, ce qui équivaut à deux points communs rejetés à l'infini sur cette droite ; elles ont un autre point commun rejeté à l'infini dans la direction de l'axe des y et un seul point commun à distance finie, le point I

$$\left(x = 0, \quad y = -\frac{p}{2}\right);$$

la condition nécessaire et suffisante pour que par un point du plan passent deux hyperboles équilatères Δ, c'est que ce point soit commun aux deux hyperboles Δ_1 et Δ_{-1} ; il n'y a à distance finie que le point I qui satisfasse à ces conditions. La condition pour qu'il n'en passe qu'une, c'est que le point soit situé sur l'une ou l'autre des deux hyperboles Δ_1 et Δ_{-1}.

Soient α, β les coordonnées d'un point quelconque du plan ; les valeurs de m qui correspondent aux deux coniques Δ qui passent par ce point sont données par l'équation

$$m^2\beta^2 - 2m\alpha(\beta + p) - (\beta + p)^2 = 0.$$

Si le point (α, β) est situé sur Δ_1 ou sur Δ_{-1}, cette équation admet comme racine $m = +1$ ou $m = -1$. Le produit des racines étant égal à $-\frac{(\beta + p)^2}{\beta^2}$, on en déduit immédiatement la valeur de la seconde racine :

$$m = \mp \frac{(\beta + p)^2}{\beta^2}.$$

A cette valeur correspond une hyperbole non équilatère dont le centre est à l'intersection de l'asymptote commune $y + p = 0$, avec l'axe focal, qui est la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la directrice, et dont l'équation est $x = my$. On a donc pour coordonnées des centres des deux coniques qui passent par le point (α, β) :

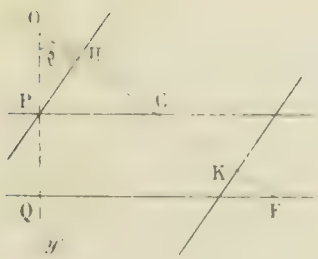
1° centre de l'hyperbole équilatère Δ_1 ou Δ_{-1} :

$$x = \mp p, \qquad y = -p;$$

2° centre de la seconde hyperbole, non équilatère :

$$x = \pm \frac{p(\beta + p)^2}{\beta^2}, \qquad y = -p.$$

3. Les coniques Δ ayant un premier foyer réel à l'origine, le second foyer F est le symétrique de l'origine par rapport au centre C, variable sur l'asymptote $y + p = 0$. Le lieu du foyer F est la parallèle à l'asymptote menée par le point Q ($x = 0$, $y = -2p$); c'est la droite $y + 2p = 0$.



La directrice relative au foyer O est la perpendiculaire abaissée du point P sur l'axe focal OC; le lieu du point H, pied de cette directrice sur l'axe focal, est donc le cercle décrit sur OP comme diamètre. Il est aisé d'en déduire le lieu du point K, pied de la directrice relative au foyer F sur l'axe focal.

Prenons Oy' comme axe polaire et soient θ l'angle de OF avec Oy', r le rayon vecteur du point K. On a

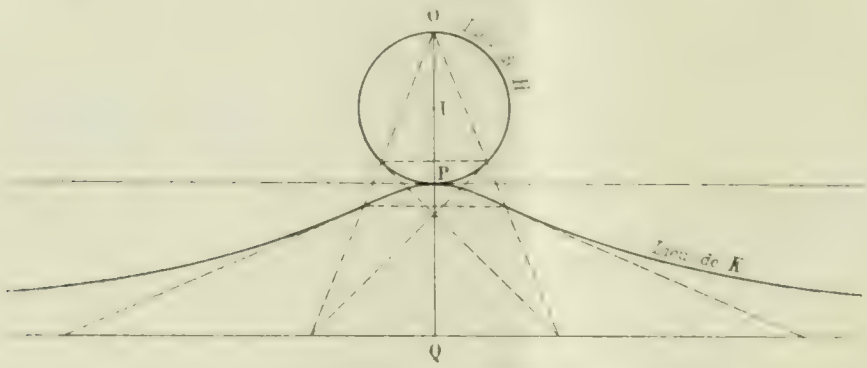
$$r = OK = OC + CK = OC + CH = 2OC - OH.$$

Or $$OC = \frac{p}{\cos\theta}, \qquad OH = p\cos\theta$$

Par suite $$r = \frac{2p}{\cos\theta} - p\cos\theta = \frac{p(2-\cos^2\theta)}{\cos\theta} = \frac{p(1+\sin^2\theta)}{\cos\theta}.$$

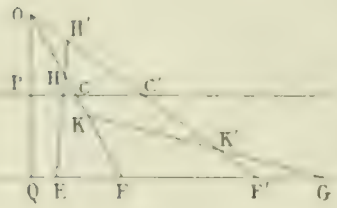
Les formules, pour revenir aux axes de coordonnées de l'énoncé, seront $r\cos\theta = -y$, $r\sin\theta = x$, d'où l'équation : $$y(x^2+y^2) + p(2x^2+y^2) = 0.$$

La courbe est facile à construire soit en coordonnées polaires, soit en coordonnées cartésiennes. Elle a la disposition ci-contre.



Elle est tout entière comprise entre la droite $y + p = 0$, tangente en P, et la droite $y + 2p = 0$, qui lui est asymptote. Elle admet l'axe des y comme axe de symétrie. Enfin elle a deux points d'inflexion à distance finie, dont les coordonnées sont $$x = \pm\frac{8p}{7\sqrt{6}}, \qquad y = -\frac{8p}{7}.$$

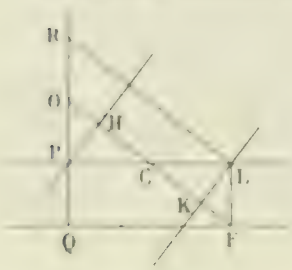
La construction géométrique de la tangente en un point quelconque K de cette courbe est des plus simples. — Soient OF, OF′ deux positions voisines de l'axe focal, H et H′ les projections du point P sur ces deux droites. Aux points H et H′ du premier lieu (cercle OP) correspondent les points K et K′ du second. Dans le triangle OFF′ coupé par les transversales EHH′ et GK′K, on a



$$\frac{EF}{EF'} \times \frac{H'F'}{H'O} \times \frac{HO}{HF} = 1, \qquad \frac{GF'}{GF} \times \frac{KF}{KO} \times \frac{K'O}{K'F'} = 1.$$

On reconnait sans peine que $\frac{KF}{KO} = \frac{HO}{HF}$, $\frac{K'O}{K'F} = \frac{H'F'}{H'O}$; par suite $\frac{EF}{EF'} = \frac{GF'}{GF}$. On en déduit que E et G sont symétriques l'un de l'autre par rapport au milieu de FF′. Si F′ vient se confondre avec F, les sécantes HH′ et KK′ ont respectivement pour limites les tangentes en H et K aux deux lieux précédents ; les points de rencontre de ces deux tangentes avec la droite OF sont symétriques l'un de l'autre par rapport au point F. Or on sait construire la tangente en H au premier lieu qui est le cercle décrit sur OP comme diamètre ; on en déduira la tangente en K au second lieu.

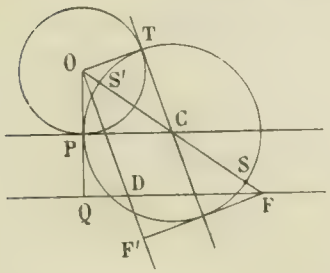
On pourrait encore obtenir la tangente en K en ramenant à la construction connue des tangentes aux podaires. Soit OF une position de l'axe focal. Prenons le point R, symétrique du point P par rapport à l'origine ($x = 0$, $y = p$) et menons RL parallèle à OF ; le point L est symétrique du point P par rapport au centre C de la conique Δ, il est donc situé sur la directrice qui correspond au foyer F. Cette directrice n'est autre que la perpendiculaire LK à l'axe OF et par suite à sa parallèle RL. Le point L décrivant la droite $y + p = 0$, KL enveloppe une parabole dont le foyer est R ($x = 0$, $y = p$) et la tangente au sommet la droite $y + p = 0$. Le lieu du point K n'est autre que la podaire de cette parabole par rapport au point O



4 Le symétrique du foyer O par rapport à l'asymptote $y + p = 0$ est le point Q $(x = 0,$ $y = -2p)$; le lieu du symétrique du foyer F par rapport à la même asymptote est l'axe des x.

La seconde asymptote étant symétrique de la première par rapport à OF, le lieu du symétrique du foyer O par rapport à cette seconde asymptote est le cercle décrit de O comme centre avec OQ comme rayon.

Construisons, pour une position donnée de OF, le symétrique du foyer F par rapport à la seconde asymptote de la conique Δ. Cette seconde asymptote est la tangente CT menée du point C au cercle OP; le point F′ est le pied de la perpendiculaire abaissée du point F sur la droite OD, parallèle à TC menée par le point O. Le triangle rectangle FF′D est égal au triangle OQD (FF′ = OQ) et par suite DF′ = DQ. Le lieu du point F′ est donc une strophoïde droite ayant le point Q pour point double, le point O pour sommet et la droite $y = -4p$ pour asymptote.



Enfin on sait que dans une hyperbole le demi-axe transverse a est égal à la projection sur l'une des asymptotes de la droite qui joint le centre à l'un des foyers. Sur la figure, CP donne la longueur du demi-axe transverse a. Les sommets S et S′ sont donc à l'intersection de l'axe focal OF avec le cercle décrit de C comme centre avec CP comme rayon. Le lieu des points S et S′ sera donc une autre strophoïde droite ayant le point P pour point double, le point O pour sommet et la droite $y = -2p$ pour asymptote. Les tangentes au point P $(x = 0,\ y = -p)$ sont comme on sait parallèles aux bissectrices des angles des axes.

P. L.

Bonnes solutions : MM. M. Laurence, J. Marchal.

Trigonométrie.

CALCUL

1059. — *Calculer les arcs positifs, inférieurs à 360° qui vérifient la formule*

$$\cos^3 \frac{2x}{5} = \frac{\sqrt[3]{a}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\sin\beta\,\cot^2\gamma},$$

où $a = 0{,}0878143$, $\alpha = 23^\circ 42' 53'',5$, $\beta = 131^\circ 13' 45'',7$, $\gamma = 125^\circ 26' 38'',5$.

L'équation donnée peut s'écrire

$$\cos^3 \frac{2x}{5} = \frac{\sqrt[3]{a}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\sin(\pi - \beta)\,.\,-\mathrm{cotg}(\pi - \gamma)^2} = -\frac{\sqrt[3]{a}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\sin(\pi - \beta)\,.\,\mathrm{cotg}^2(\pi - \gamma)}.$$

Posant

$$\cos^3\varphi = \frac{\sqrt[3]{a}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\sin(\pi - \beta)\,.\,\mathrm{cotg}^2(\pi - \gamma)},$$

on est ramené à résoudre l'équation

$$\cos^3\left(\frac{2x}{5}\right) = -\cos^3\varphi = \cos^3(\pi - \varphi),$$

d'où

$$\cos\frac{2x}{5} = \cos(\pi - \varphi),$$

$$\frac{2x}{5} = 2k\pi \pm (\pi - \varphi).$$

On en tire

$$x = 5k\pi \pm \frac{5}{2}(\pi - \varphi).$$

Le calcul de l'angle φ donne $\varphi = 47^\circ 3\ 24'.7$,
et on trouve une seule valeur de x, comprise entre 0 et 360°,

$$x = 332\ 21\ 28''.2.$$

P. L.

PROBLÈME.

1060. — 1° *Calculer les angles* B, C *d'un triangle* ABC *connaissant l'angle* A *ainsi que le rayon* R *du cercle circonscrit et le rayon* r *du cercle inscrit.*

2° *Condition de grandeur entre les données* A, R, r *pour que le problème soit possible.*

3° *Résolution graphique du triangle* ABC; *discussion de la construction.*

4° *Dans le cas particulier où le triangle* ABC *est isocèle* (AB = AC), *calculer, en fonction de* R *et de* r, *la distance du centre du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit.*

Déduire du résultat la construction d'un triangle isocèle connaissant les rayons des cercles inscrit et circonscrit.

1. Des relations $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$, on déduit

$$p - b = r \operatorname{cotg}\frac{B}{2}, \qquad p - c = r \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

et, en ajoutant membre à membre,

$$r\left(\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right) = r\,\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = r\,\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

D'autre part, $a = 2R\sin A = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$; d'où l'équation

$$2R\sin\frac{A}{2} = \frac{r}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{r}{\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}} = \frac{r}{\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}}.$$

On en déduit

$$\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2} + \frac{r}{2R\sin\frac{A}{2}}.$$

La valeur trouvée pour $\cos\frac{B-C}{2}$ est positive; elle doit être plus petite que 1; d'où la condition

$$\sin\frac{A}{2} + \frac{r}{2R\sin\frac{A}{2}} < 1, \qquad r < 2R\sin\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right).$$

Cette condition remplie, on trouvera pour $\frac{B-C}{2}$ un angle aigu φ et on calculera B et C au moyen des deux relations

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}, \qquad \frac{B-C}{2} = \varphi \quad \text{en supposant pour fixer les idées } B > C,$$

d'où

$$B = 90^\circ - \frac{A}{2} + \varphi, \qquad C = 90^\circ - \frac{A}{2} - \varphi.$$

Ces valeurs pour être acceptables doivent être comprises entre 0 et 180°, ce qui exige que l'on ait

$$\varphi < 90^\circ - \frac{A}{2},$$

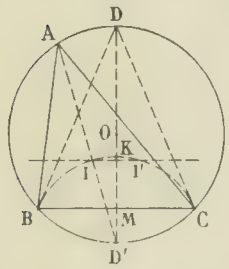
c'est-à-dire $$\cos\varphi = \sin\frac{A}{2} + \frac{r}{2R\sin\frac{A}{2}} > \cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}.$$

Cette condition est toujours remplie. La seule condition de possibilité du problème est donc

$$r < 2R\sin\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right).$$

Pour $r = 2R\sin\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)$, on a $\cos\frac{B-C}{2} = 1$, par suite $B = C$; le triangle est isocèle.

La construction graphique du triangle va nous donner les mêmes résultats. Sur $DD' = 2R$ comme diamètre, décrivons le cercle O, et de part et d'autre de DD', menons DB et DC, faisant avec DD' un angle égal à $\frac{A}{2}$: BC est la base a du triangle cherché. Soit I le centre du cercle inscrit dans ce triangle; l'angle $BIC = 180^\circ - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 90^\circ + \frac{A}{2}$, par suite le point I est sur le segment de cercle décrit sur BC comme corde et capable de l'angle $90^\circ + \frac{A}{2}$; ce cercle a pour centre le point D', et D'B pour rayon. Un second lieu du point I est la parallèle à BC menée au-dessus de BC, à la distance r; le point I est donné par l'intersection de ces deux lieux. Connaissant le point I, on le joindra au point D'; la droite D'I est la bissectrice de l'angle A du triangle; son second point de rencontre avec le cercle O est le sommet A du triangle.



La condition de possibilité du problème est évidemment

$$r \leqslant MK = D'B - D'M.$$

Or $D'B = 2R\sin\frac{A}{2}$, $\quad D'M = D'B\sin\frac{A}{2} = 2R\sin^2\frac{A}{2}$.

On retrouve la condition précédente :

$$r < 2R\sin\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right).$$

La construction donnera en général deux points I et I', symétriques par rapport à DD' et auxquels correspondent deux triangles ABC $(B > C)$, A'BC $(B < C)$ symétriques l'un de l'autre par rapport à DD' et par suite égaux. Pour $r = MK$, les points I et I' seraient confondus et on aurait un triangle isocèle, qui n'est autre que le triangle DBC de la figure.

2. Le triangle ABC étant supposé isocèle, calculons la distance $OI = d$ du centre O du cercle circonscrit au centre I du cercle inscrit. Rien n'empêche de considérer OI comme un segment dont la direction positive serait OD; on aura ainsi

$$\overline{OI} = \overline{OD} - \overline{ID} = R - 2R\sin\frac{A}{2} = R\left(1 - 2\sin\frac{A}{2}\right).$$

Pour $\sin\frac{A}{2} < \frac{1}{2}$ $(A < 60^\circ)$, le point I est au-dessous du point O : c'est le cas de la figure. Pour $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ $(A = 60^\circ$, triangle équilatéral), le point I coïncide avec le point O. Enfin, pour $\sin\frac{A}{2} > \frac{1}{2}$, le point I est au-dessus du point O.

Reste à calculer $\sin\frac{A}{2}$ en fonction de R et r dans le cas où le triangle ABC est isocèle, c'est-à-dire sachant que l'on a

$$r = 2R\sin\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right),$$

ou encore

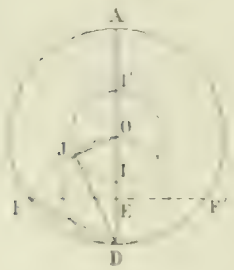
$$2R\sin^2\frac{A}{2} - 2R\sin\frac{A}{2} + r = 0;$$

on déduit de là pour $\sin\frac{A}{2}$ deux valeurs : $\sin\frac{A}{2} = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 2Rr}}{2R}$, réelles pourvu que l'on ait $R \geq 2r$, acceptables toutes les deux, l'une plus petite et l'autre plus grande que $\frac{1}{2}$. On en déduit

$$OI = R\left(1 - 2\sin\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Ce n'est pas autre chose que la formule d'Euler : $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Cela étant, connaissant R et r, on pourra construire la longueur $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$: en portant cette longueur, à partir du point O sur OD et sur OA, on obtiendra les centres des cercles inscrits pour les deux triangles répondant à la question. Soit I l'un des points ainsi obtenus ; en prenant $\overline{IM} = r$, on aura le point M, milieu de BC, et le triangle ABC sera déterminé.



Tout revient donc à construire $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$. Le cercle O étant décrit sur $AD = 2R$ comme diamètre, prenons d'abord $DE = r$ et menons par le point E la corde FF' perpendiculaire à AD :

$$\overline{DF}^2 = DA \times DE = 2Rr$$

Nous avons à construire

$$d = \sqrt{R^2 - \overline{DF}^2}.$$

Sur OD comme diamètre, nous décrirons un cercle, et nous prendrons sur ce cercle une corde $DJ = DF$; OJ sera la longueur cherchée. On rabattra OJ par un arc de cercle soit en OI, soit en OI'. A chacun des points I et I' correspond un triangle répondant à la question et qu'on obtiendra comme il a été dit plus haut.

P. L.

Bonne solution : MM. Laurence.
Assez bonnes solutions : MM. R. Manen, petit séminaire de Massals ; R. Bouvaist.

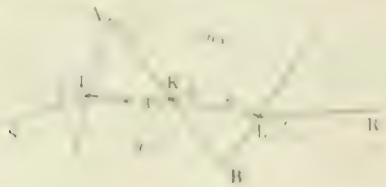
Physique.

1056.— *Deux prismes d'angles A et B, d'indices n_1 et n_2, dont les arêtes sont parallèles et opposées, se touchent par une face.*

Écrire les équations qui règlent la marche, à travers ce système, d'un rayon de lumière homogène situé dans un plan perpendiculaire aux arêtes.

A quoi se réduisent ces équations si les angles A et B sont très petits, ainsi que l'angle d'incidence ; écrire, dans ce cas, la condition à laquelle doivent satisfaire les angles A et B pour que le système se comporte comme une lame à faces parallèles.

Soit SIKLR le rayon considéré. Désignons par i, α, β, γ, δ, e, les angles que ce rayon forme successivement avec les normales aux surfaces réfringentes.



La loi de Descartes donne d'abord

$$(1)\quad \begin{cases} \sin i = n_1 \sin\alpha, \\ n_1 \sin\beta = n_2 \sin\gamma, \\ n_2 \sin\delta = \quad \sin e. \end{cases}$$

Une relation géométrique connue donne ensuite

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha + \beta = A, \\ \gamma + \delta = B, \end{cases}$$

et ces deux groupes d'équations définissent complètement la marche du rayon.

D'autre part, la déviation totale, somme des déviations partielles aux points I, K et L, et comptée, par exemple, dans le sens des aiguilles d'une montre, est donnée par la formule

$$D = (i - \alpha) + (\gamma - \beta) - (e - \delta),$$

qu'on peut écrire, en tenant compte des relations (2),

$$D = i - e - A + B.$$

Si les angles sont petits, les équations (1) deviennent

$$i = n_1\alpha, \qquad n_1\beta = n_2\gamma, \qquad n_2\delta = e,$$

et donnent, par combinaison avec (2),

$$i - e = n_1A - n_2B, \quad \text{d'où} \quad D = (n_1 - 1)A - (n_2 - 1)B.$$

Cette déviation est nulle et le système se comporte comme une lame à faces parallèles si l'on a

$$(n_1 - 1)A = (n_1 - 1)B.$$

Bonnes solutions de MM. M. Laurence, P. Saintin et P. Thonet.

Chimie.

1057. — *Soit une chambre close ayant 80 mètres cubes de capacité renfermant de l'air formé de 20,8 volumes d'oxygène et 79,2 volumes d'azote, mesurés à 0° et 760^{mm} de pression. Elle est éclairée par deux becs de gaz brûlant chacun 192 litres de gaz de houille à l'heure, et une personne l'habite pendant 5 heures.*

1° *Quelle sera, après ces 5 heures, la composition de l'air confiné ?*

2° *Pour rendre à cet air sa composition initiale, quel poids de bioxyde de baryum pur et sec faudra-t-il décomposer ?*

3° *Avec la baryte résultant de cette opération, on absorbera le gaz carbonique et la vapeur d'eau. Quel poids de baryte faudra-t-il employer pour chacune de ces opérations ?*

4° *On se débarrassera de l'excès d'azote avec un appareil à étincelles analogue à celui de Cavendish, dans lequel on aura placé une certaine quantité de baryte en dissolution. Quelle sera l'augmentation de poids de ce produit ?*

Le gaz de houille contient les corps principaux suivants, mesurés en volume :

Méthane (formène, ou protocarbure d'hydrogène)	50	*Azote*	3
Hydrogène	35	*Autres produits dont on ne tiendra pas compte.*	4
Oxyde de carbone	8		

On rappelle qu'en moyenne un homme consomme par heure 25 litres d'oxygène et exhale 20 litres d'anhydride carbonique et 30 grammes de vapeur d'eau.

Pour simplifier, on supposera que la température et la pression n'ont pas varié.

(Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques).

L'air initial comprend $\frac{20,8}{100} \times 80000 = 16640^{lit}$ d'oxygène et $\frac{79,2}{100} \times 80000 = 63360^{lit}$ d'azote.

Les deux becs de gaz brûlent, en 5 heures, 1920^{lit}. Si on laisse de côté les 4 % de produits négligeables, ce gaz renferme $\frac{50}{96}$ de méthane, $\frac{35}{96}$ d'hydrogène, etc.

Les 1920^{lit} brûlés renferment donc

Méthane : $\frac{50}{96} \times 1920 = 20 \times 50 = 1000^{lit}$. Oxyde de carbone : $20 \times 8 = 160$.

Hydrogène : $20 \times 35 = 700$, Azote : $20 \times 3 = 60$

Or les équations de la combustion sont

$$CH^4 + 2O^2 = CO^2 + 2H^2O, \quad H^2 + O = H^2O, \quad CO + O = CO^2.$$

Elles montrent que la combustion de

1 000^{lit} de méthane	consomme	2 000^{lit}	d'oxygène	et produit	1 000^{lit}	de gaz carbonique	et	2 000^{lit}	de vap.	d'eau
700 d'hydrogène	—	350	—	—	. . . . .			700	—	—
160 d'oxyde de carbone		80	—	—	160	—	—			

Prenons 22^{lit}.3 comme volume moléculaire ; ces 2 700^{lit} de vapeur d'eau représentent $\frac{2\,700}{22.3} = 121$ molécules et, par conséquent, un poids égal à $121 \times 18 = 2\,178^{gr}$.

D'autre part, la respiration d'une personne pendant 5 heures consomme 125^{lit} d'oxygène et produit 100^{lit} de gaz carbonique et 150^{gr} de vapeur d'eau.

1° L'air final aura la composition suivante :

Oxygène :	$16\,640 - (2\,000 + 350 + 80 + 125) = 16\,640 - 2\,555 =$	$14\,085^{lit}$.
Azote :	$63\,360 + 60 =$	63 420 ,
Gaz carbonique :	$1\,000 + 160 + 100 =$	1 260 ,
Vapeur d'eau :	$2\,178 + 150 =$	$2\,328^{gr}$.

2° Les 2 555^{lit} d'oxygène manquant représentent $\frac{2\,555}{22.3} = 114.5$ molécules.

Or, pour avoir 1 molécule d'oxygène, il faut décomposer 2 molécules de bioxyde ; pour en avoir 114.5, il faut décomposer 229 molécules de bioxyde, c'est-à-dire un poids $229 \times 169 = 38\,700^{gr}$.

3° Les 1 260^{lit} de gaz carbonique représentent $\frac{1\,260}{22.3} = 56,45$ molécules ; pour les absorber, il faut 56,45 molécules de baryte, c'est-à-dire $56,45 \times 153 = 8\,637^{gr}$.

Les 2 328^{gr} de vapeur d'eau représentent $\frac{2\,328}{18} = 129,3$ molécules ; pour les absorber, il faut 129,3 molécules de baryte, c'est-à-dire $129,3 \times 153 = 19\,783^{gr}$.

4° Admettons que l'appareil à étincelles transforme l'azote en azotate. Les 60^{lit} d'azote en excès représentent $\frac{60}{22.3} = 2.7$ molécules et produiront 2.7 molécules d'anhydride azotique, soit 2.7×108^{gr}.

Remarque. — En réalité, si la température restait à 0°, toute l'eau ne pourrait rester à l'état de vapeur : le calcul montre en effet que 80 mètres cubes sont saturés à 0° par un poids de vapeur d'eau égal à 391 grammes environ.

(Assez bonne solution de M. M. Laurence.)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1066. — *Lieu des foyers des hyperboles équilatères qui passent par un point fixe* A *et admettent comme axe non transverse une droite donnée* D.

Prenons pour axe des x la droite D et pour axe des y la perpendiculaire abaissée de A sur D et désignons OA par a. L'équation

$$x^2 - y^2 + 2\lambda x - a^2 = 0,$$

que l'on peut écrire immédiatement, représente le faisceau des hyperboles équilatères indiquées dans l'énoncé. L'axe transverse de cette hyperbole a pour équation $x + \lambda = 0$, et l'ordonnée du sommet est donnée par $y^2 = a^2 - \lambda^2$, par conséquent l'ordonnée du foyer, qui s'obtient en multipliant la précédente par $\sqrt{2}$, est fournie par $y^2 = 2a^2 - \lambda^2$. Le lieu de ce point a donc pour équation

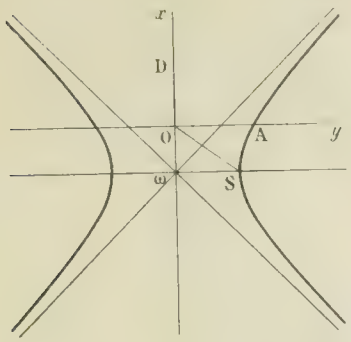
$$2x^2 + y^2 - 2a^2 = 0.$$

Le lieu des sommets est le cercle

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

ce qui montre que OS = OA.

E.-N. BARISIEN.



Solution géométrique. — L'équation réduite de l'hyperbole équilatère est

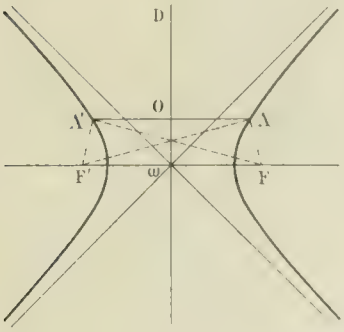
$$y^2 - x^2 = \alpha^2.$$

Pour le point A, $x = O\omega$ $y = OA = a$; d'ailleurs $\alpha = \omega S$. On a donc

$$a^2 = \overline{\omega O}^2 + \overline{\omega S}^2 = \overline{OS}^2 ;$$

par conséquent le lieu du point S est le cercle de centre O et de rayon OA. Le lieu du foyer s'obtient en multipliant les ordonnées du cercle par $\sqrt{2}$; c'est donc une ellipse aisée à placer.

J. HAAG, à Nancy.



Autre solution géométrique. — D'après des formules connues, on a

$$AF = \frac{cx}{a} - a = x\sqrt{2} - a = OA\sqrt{2} - a,$$

$$AF' = \frac{cx}{a} + a = x\sqrt{2} + a = OA\sqrt{2} + a,$$

$$AF + AF' = AF + A'F = 2OA\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}.$$

Le lieu cherché est par suite une ellipse de foyers A et A'.

R. BOUVAIST.

Très bonnes solutions : MM. J. Marchal ; Fauvernier ; J. Haag ; M. Laurence ; L. Odou, (pensionnat Valbenoîte).

Bonnes solutions : MM. Lemoyne, Dumail, à Bordeaux, Y. Collin, à Laval ; Vial, à Châlons.

Bonnes solutions géométriques : MM. Vasnier ; T. Lemoyne.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ECOLE CENTRALE (1901)

Arithmétique (M. Combette).

1803. — Reste de la division par 9 de 6917, de 6917^{45}.

1804. — Reste de la division par 11 de 48517, de 48517^{42}.

1805. — Ecrire le nombre 4538 dans le système de base 6. — Se servir du résultat pour chercher le reste de la division de ce nombre par 7.

1806. — Le plus grand commun diviseur entre deux nombres A et B est de la forme $A\alpha + B\beta$, α et β étant des nombres entiers ; montrer qu'il est le plus petit nombre de cette forme.

1807. — Montrer que le quotient $\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$ se réduit à un nombre entier.

1808. — Si m est un nombre premier, C_m^p $(p < m)$ est divisible par m.

1809. — a désignant un nombre entier, $a^{m+4} - a^m$ est divisible par 30.

1810. — Démontrer que toute puissance a^n d'un nombre premier est une différence de carrés de deux nombres entiers, de la forme $x^2 - y^2$. — Montrer que 7^5 est égal à une somme de nombres consécutifs et trouver ces nombres.

1811. — Convertir en fraction décimale la fraction $\dfrac{1}{3^3 \times 5^4}$. — De quelle nature est la fraction décimale obtenue ?

1812. — Condition pour qu'une fraction irréductible $\dfrac{a}{b}$ soit égale à une fraction ayant pour dénominateur une puissance de 12.

1813. — Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir l'ordre des facteurs. La propriété est-elle vraie pour les facteurs fractionnaires et pour les facteurs incommensurables ? — Raisonner sur l'exemple $\pi\sqrt{3}$.

1814. — Calculer $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ à 0,01 près.

1815. — Calculer $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ à 0,01 près. Limite de l'expression $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ quand le nombre des radicaux augmente indéfiniment.

1816. — Calculer $\sqrt{3+\sqrt{2}}$, $\sqrt{\pi-\sqrt{2}}$ à 0,01 près.

1817. — Calculer $\sin\frac{\pi}{8}$ à 0.001 près.

1818. — On a mesuré les côtés d'un rectangle $a = 4^m,7$, $b = 3^m,8$ à $0^m,1$ près. Avec quelle approximation peut-on connaître la surface ?

1819. — On a mesuré les trois dimensions d'un parallélépipède rectangle ; on a trouvé à $0^m,1$ près $4^m,3$, $23^m,5$, $19^m,4$. Avec quelle approximation peut-on avoir le volume ?

Algèbre (M. Combette).

1820. — Rendre rationnel le dénominateur de la fraction $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

1821. — Transformer $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ en une somme de deux radicaux simples $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

1822. — Somme des cubes des termes d'une progresion arithmétique.

1823. — En combien de temps un capital A, placé à intérêts composés, devient-il égal à 3A ?

1824. — Déterminer λ de façon que le système

$$3x+4y-1=0,\qquad 5x+8y+\lambda=0,\qquad 4x-3y-2=0$$

soit possible.

1825. — Résoudre le système

$$3x+2y-z=0,\qquad 5x-y+2z=0,\qquad 8x+y-z=0.$$

1826. — Avec m lettres $a, b, c, \ldots, l$, combien peut-on former de termes de la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$?

1827. — Étudier les séries :

$$\frac{1}{e}+\frac{1}{e+1}+\frac{1}{e+2}+\cdots+\frac{1}{e+n}+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$$

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\cdots,$$

1828. — Étudier la série dont le terme général est $u_n=\frac{n^3-1}{n^5+1}$.

1829. — Étudier les séries

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}+\cdots$$

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\cdots,$$

$$1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}+\cdots.$$

1830. — Étudier la série

$$\frac{1}{1}+\frac{\cos a}{2!}+\frac{\cos 2a}{3!}+\cdots+\frac{\cos(n-1)a}{n!}+\cdots.$$

Une série peut-elle être convergente sans que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait une limite ?

1831. — Si la série $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ est convergente pour $x=\alpha$, elle est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

1832. — Limite de $\left(1+\frac{1}{m}+\frac{2}{m^2}+\frac{3}{m^3}\right)$ pour m infini.

1833. — Limite de $(1+4\sin 3x)^{\cot 2x}$ pour $x=0$, de $(1+5\cot g^2 x)^{\tan x}$ pour $x=\frac{\pi}{2}$.

1834. — Limite pour $x=0$ de $\frac{x-\sin^3 3x}{\operatorname{tg} 2x.\sin 5x}$, $\frac{x-\sin^3 3x}{\operatorname{tg}^3 x}$.

1835. — Limite de $\sqrt[n]{n}$ pour n infini.

1836. — Dérivées des fonctions

$y=\sqrt{x}$.	$y=\sqrt{x^2}$.	$y=\sqrt{x^3}$.	$y=\sqrt{3x^2+1}$.	$y=\operatorname{tg}^2 x$.
$y=\operatorname{tg}\sqrt{x}$.	$y=\cos(x^2+1)$.	$y=\cos(5x^3)$.	$y=\sqrt[3]{\cos 8x^2}$.	$y=\sqrt[3]{\cos^2(5x^4)}$.
$y=\arcsin 5x^2$.	$y=3\arccos 5x^3$.	$y=\arccos 3x^2$.	$y=\sqrt{5\operatorname{arc\,tg} x^2}$.	$y=\sqrt{\operatorname{arc\,tg} x^2}$.
$y=\mathrm{L}\cos(5x^2)$.	$y=\mathrm{L}\cos^3(5x^2)$.	$y=\mathrm{L}\operatorname{arc\,tg} x^3$.	$y=\mathrm{L}\arcsin 4x^3$.	$y=35x^4\times\sin^3(8x^2)$.
$y=\cos^2(5x^3)\times\sqrt[3]{7}$.	$y=4^{x^2}\times\sqrt{\cos 3x}$.	$y=5^{x^2}\times\sin^3 5x$.	$y=7^{5x}\times\operatorname{tg}^3(4x^3)$.	$y=\frac{\sin(5x^3)}{\cos^2(4x^3)}$.
$y=\frac{\cos 5x}{4\sin 5x}$.	$y=\frac{\cot g(4x^2)}{x^3}$.	$y=\frac{5^{x^2}}{\cos(3x^2)}$.	$y=\frac{\mathrm{L}.4x^2-4x}{2^{x^2}}$.	$y=\frac{3^{x^2}}{\mathrm{L}.8x^3-1}$.

1837. — Dérivée d'ordre n d'un produit uv. Appliquer à $y = 3^{x}.\sin 4x$.

1838. — Calculer y'_x sachant que l'on a

$$5^{y}\sin^2 3y + \cos^4 x^2 y = \lambda.$$

1839. — Dérivées de $y = (x^2-5)^{x^2+1}$, $y = (\sin x)^{x}$, $y = (\sin x)^{\frac{1}{x}}$, $y = x^{x^x}$.

1840. — Fonctions primitives de

$$y' = \frac{x+1}{(x-1)^2+2}, \qquad y' = \frac{x-2}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y' = \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}, \qquad y' = \frac{x+3}{(x^2+1)^3},$$

$$y' = \cos^m x.\sin x, \qquad y' = \sin^3 x.\cos^4 x, \qquad y' = \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$y' = \operatorname{tg} x, \qquad y' = \operatorname{tg}^2 x, \qquad y' = \operatorname{tg}^3 x, \qquad y' = \frac{1}{\sin x}.$$

1841. — Trouver la fonction y telle que l'on ait : 1° $y'' + 9y = 0$; 2° $y'' = y$.

1842. — Etudier les variations des fonctions

$$y = x^2(a-x)^2, \qquad y = x^2 + \frac{1}{x^2}, \qquad y = \frac{x^3-1}{x+2}, \qquad y = \frac{x^3+2}{x^2-1},$$

$$y = \frac{x+2}{x^3-1}, \qquad y = \frac{2x-1}{x^3+1}, \qquad y = \frac{x^2-3x}{x^3+1}, \qquad y = \frac{x^2-1}{x^3-8},$$

$$y = \frac{x^3+1}{x^3-8}, \qquad y = \frac{x^2-3x}{x^3+8}, \qquad y = \sin^4 x.\cos x, \qquad y = \frac{\sin^3 x - \cos x}{\cos^3 x - \sin x}.$$

1843. — Maximum ou minimum du polynome $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + ey + f$. — Application aux polynomes :

$$(2x-y+1)^2 + (x-3y)^2 + 1, \qquad x^2 + 3y^2 + 2x - 4y.$$

1844. — Sachant que l'on a $2x^4 + 5y^2 - 4 = 0$, trouver le maximum du produit x^4y^2.

1845. — y étant une fonction de x définie par l'équation $f(x, y) = 0$, comment peut-on trouver les maxima ou minima de y ? — Application à l'exemple suivant :

$$4x^3 - 7y^3 + 3x^2y - 1 = 0.$$

Comment distinguer si on a affaire à un maximum ou à un minimum ?

1846. — Trouver algébriquement les racines quatrièmes de -1.

1847. — Ordonner le polynome $f(x)$ suivant les puissances de $x-1$.

1848. — Condition pour que le quotient

$$\frac{x^m - x^{m-1} + x^{m-2} - x^{m-3} + \ldots}{x^p - x^{p-1} + x^{p-2} - x^{p-3} + \ldots}$$

soit entier.

1849. — Reste de la division par $x-a$. On veut chercher le reste de la division $f(x)$ par x^3-a : pour cela on pose

$$f(x) \equiv f_0(x^3) + xf_1(x^3) + x^2f_2(x^3).$$

Trouver alors le reste de la division de $f(x)$ par x^3-a.

1850. — Montrer que l'équation $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = \frac{1+ia}{1-ia}$ (a réel), a m racines réelles.

1851. — Résolution de l'équation binome $x^n - 1 = 0$.

1852. — Condition pour que les deux équations $ax^2+bx+c=0$, $a'x^2+b'x+c'=0$ aient une racine commune.

1853. — On donne la somme S_1 de quatre nombres a, b, c, d, la somme S_2 de leurs carrés, la somme S_3 de leurs cubes et la somme S_4 de leurs quatrièmes puissances. Trouver ces nombres.

1854. — Exprimer que l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$ a deux racines α et β liées par la relation $\beta = 2\alpha$.

1855. — Exprimer que $x^3+px^2+qx+2=0$ a deux racines α et β, telles que $2\alpha = 3\beta$.

1856. — Condition pour que l'équation $x^3+px+q=0$ ait deux racines dont l'une soit le carré de l'autre. — Même question pour l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$.

1857. — Déterminer λ pour que l'équation $x^4+4x^3+5x^2+\lambda=0$ ait une racine double non nulle.

1858. — Comment reconnaître que l'équation $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ a une racine triple ?

1859. — Condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit une puissance m^e exacte.

1860. — Exprimer que l'équation entière $f(x)=0$ a une racine triple. — Si a est racine de cette équation montrer que $\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}$, quand x tend vers a, tend vers une limite égale au degré de multiplicité de la racine a.

1861. — $f(x)$ étant un polynome admettant le facteur $x-a$ au degré de multiplicité α, quelle est la limite de $\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}$ pour $x=a$.

1862. — L'équation $f(x)=0$ ayant toutes ses racines réelles, montrer que l'équation

$$2f'(x) + 3f(x) = 0$$

a aussi toutes ses racines réelles.

1863. — Exprimer que l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$ a ses trois racines réelles. — Montrer que la condition $p^2-3q>0$, pour la réalité des racines α, β de l'équation dérivée, est comprise dans l'inégalité $f(\alpha).f(\beta)<0$.

1864. — Conditions pour que l'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + 1 = 0$ ait toutes ses racines réelles.

1865. — Trouver les racines commensurables d'une équation $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, à coefficients entiers. — Quels moyens a-t-on de limiter les essais ? Démontrer que si aucun des résultats de substitution $f(p)$, $f(p+1)$, $f(p+2)$ de trois nombres entiers consécutifs n'est divisible par 3, on n'aura pas de racines entières.

1866. — Étudier les équations

$$x^3 - 5x - 1 = 0, \qquad x^4 - 7x - 1 = 0, \qquad x^4 - 2x^2 - 3 = 0,$$
$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 1 = 0, \qquad x^4 - 3x^3 + x - 1 = 0, \qquad x^4 - 5x^3 - x + 1 = 0,$$
$$x^4 + 5x^3 - 2x + 1 = 0, \qquad x^5 - x^3 - 1 = 0, \qquad x^5 - 7x^3 - 2 = 0,$$
$$x^6 - 4x^3 - 1 = 0, \qquad x^6 - 8x^2 + 1 = 0, \qquad x^6 + 5x^4 - 7x - 2 = 0.$$

1867. — Résoudre l'équation $x(x+1)(x+2)(x+3) = 100$. — Montrer d'abord que $x(x+r)(x+2r)(x+3r) + r^4$ est un carré parfait.

1868. — Résoudre les inégalités

$$\frac{x-1}{x^2-1} < \frac{x+1}{x^2-1}, \qquad \frac{x^3-1}{x^2+1} > \frac{x-1}{x+1}.$$

1869. — On considère la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{[(x-a)^2+b^2]\varphi(x)}$, $f(x)$ étant premier avec le dénominateur et de degré inférieur ; montrer que l'expression peut se mettre sous la forme $\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2} + \frac{f_1(x)}{\varphi(x)}$. Comment trouver les coefficients M et N ?

1870. — Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-3)}, \qquad \frac{x^2+1}{(x-3)(x-1)^2}, \qquad \frac{x-1}{(x+2)^3}, \qquad \frac{3x^3}{(x^2+1)(x-3)},$$
$$\frac{4x^2}{(x-1)^2(x+2)}, \qquad \frac{x^2-1}{x^4+1}, \qquad \frac{x-2}{(x-1)^3}.$$

En déduire les fonctions primitives.

Trigonométrie (M. Combette).

1871. — Calculer $\sin 18^\circ$ et $\cos 18^\circ$. En déduire $\sin 36^\circ$ et $\cos 36^\circ$; $\sin 9^\circ$ et $\cos 9^\circ$.

1872. — Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{4}$, connaissant $\operatorname{tg} a$; $\operatorname{tg} 3a$, connaissant $\operatorname{tg} 2a$; $\cos\frac{3a}{2}$ connaissant $\cos a$; $\operatorname{tg}\frac{a}{5}$ connaissant $\operatorname{tg} a$.

1873. — Transformer en monome l'expression

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c.$$

1874. — Calculer la racine positive de l'équation $53x^2 - 96x - 28 = 0$ au moyen des tables.

1875. — Résoudre l'équation $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

1876. — Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\sqrt{1 - 2\sin x} = 2 - 3\sin x, \qquad \sqrt{4\cos^2 x - 1} > 3\sin x - 1, \qquad \sqrt{1 - \sin^2 x - 1} = 3\cos x + 1,$$
$$\sqrt{9\cos^2 x - 1} < 3\sin x - 1, \qquad \sqrt{4\sin^2 x - 1} = 3\sin x - 2, \qquad \sqrt{3\sin^2 x - 1} < 3\cos x + 1.$$

1877. — Résoudre un triangle, connaissant A, a, $b - c$.

QUESTIONS PROPOSÉES

1102. — Discuter la fonction

$$y = x^2 + 1 - x - \frac{1}{x}.$$

1103. — On considère une conique variable qui touche une droite fixe (D) en un point fixe A et qui admet un foyer fixe F. On demande :

1° Le lieu de l'autre foyer, le lieu du centre et le lieu du point de contact de la seconde tangente parallèle à la droite (D) ;

2° Le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur l'axe non focal de la conique et le lieu du point de contact d'une tangente perpendiculaire à la droite (D) ;

3° L'enveloppe de l'axe radical du cercle qui passe aux foyers et au point A et du cercle directeur ayant pour centre le point F.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC, IMP. COMTE-JACQUET.

12e Année. N° 7 Avril 1902.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES CENTÉSIMALES

par M. **P. Barbarin**, professeur au lycée de Bordeaux.

Les lecteurs de la *Revue* ont pu remarquer sur la couverture des numéros de septembre et octobre 1901 l'importante communication officielle qui suit :

La composition de calcul trigonométrique se fera à l'avenir au concours d'admission à l'École Polytechnique avec des tables à 5 décimales.

Les candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr et à l'École Polytechnique sont autorisés, à partir de 1902, pour la composition de calcul logarithmique, à faire usage dans l'emploi des fonctions circulaires, soit des tables établies dans le système de la division centésimale du quart de la circonférence, soit des tables établies dans le système de la division sexagésimale. A partir des examens de 1905 l'usage des tables du système centésimal sera obligatoire, mais les candidats pourront contrôler le calcul avec les tables du système sexagésimal.

Le moment nous paraît donc bien choisi de donner aux futurs candidats, relativement à la composition de calcul qu'ils pourront avoir à faire dès le prochain concours, quelques conseils utiles.

Jusqu'à ce jour, l'usage des tables sexagésimales a seul été répandu dans les établissements d'instruction et prescrit aux examens de toute catégorie; aussi toutes les tables que les jeunes gens ont entre les mains sont-elles construites exclusivement d'après la division du quadrant en degrés, minutes et secondes. Il y a peu d'années même, les tables à sept décimales étaient les seules dont on fût autorisé à se servir. Or, dans la pratique, les angles ne pouvant être évalués avec les meilleurs instruments qu'à la seconde près, les sixième et septième décimales sont illusoires. Il convient donc de s'en tenir aux cinq premières, et c'est pourquoi les commissions des examens aux écoles ont sagement décidé qu'à l'avenir les tables à 5 décimales seraient obligatoires.

Dans la division *sexagésimale* du quart de la circonférence, ou *quadrant*, le *degré* est le $\frac{1}{90}$ du quadrant, la *minute* est le $\frac{1}{60}$ du degré, et la *seconde* est le $\frac{1}{60}$ de la minute. La nouvelle division du quadrant, appelée *centésimale*, consiste à partager le quadrant en 100 parties égales nommées *grades*, et à fractionner le grade en dixièmes, centièmes, millièmes, etc. Si elle paraît inférieure à l'ancienne division en ce que les arcs simples égaux au $\frac{1}{6}$, au $\frac{1}{3}$ ou aux $\frac{2}{3}$ du quadrant, et qui valent respectivement 15 degrés, 30 degrés, 60 degrés, ne sont plus des multiples exacts du grade, elle offre en revanche l'avantage considérable de faire rentrer la circonférence dans le système métrique, et d'exprimer exactement en multiples ou sous-multiples décimaux du mètre toutes les subdivisions géographiques du méridien terrestre.

Ainsi : le méridien terrestre valant 40 millions de mètres,
le quadrant — vaut 10 millions de mètres ou 10 mille kilomètres,
le grade — vaut 100 kilomètres,
la lieue géographique de 25 au grade vaut 4 kilomètres, et est ainsi identique à notre lieue routière, ce qui rend de grands services pour la lecture des cartes.

En attendant la publication de nouvelles tables scolaires centésimales, tables que nous préparons pour paraître prochainement, et qui sont destinées à remplacer les tables sexagésimales dans les bibliothèques classiques, nous allons indiquer en quelques mots aux candidats qui, possesseurs des tables sexagésimales, seraient néanmoins désireux de se servir dès cette année de la division centésimale, le moyen de passer aisément d'un système à l'autre.

Nous avons établi à cet effet les trois tableaux ci-dessous; le mécanisme de leur emploi est très simple, et ne demande que cinq minutes d'attention. Les élèves comprendront immédiatement à l'aide des deux exemples numériques traités.

Unités.

Degrés

Dizaines. c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	1,1111	2,2222	3,3333	4,4444	5,5556	6,6667	7,7778	8,8889	10,0000
1	11,1111	12,2222	13,3333	14,4444	15,5556	16,6667	17,7778	18,8889	20,0000	21,1111
2	22,2222	23,3333	24,4444	25,5556	26,6667	27,7778	28,8889	30,0000	31,1111	32,2222
3	33,3333	34,4444	35,5556	36,6667	37,7778	38,8889	40,0000	41,1111	42,2222	43,3333
4	44,4444	45,5556	46,6667	47,7778	48,8889	50,0000	51,1111	52,2222	53,3333	54,4444
5	55,5556	56,6667	57,7778	58,8889	60,0000	61,1111	62,2222	63,3333	64,4444	65,5556
6	66,6667	67,7778	68,8889	70,0000	71,1111	72,2222	73,3333	74,4444	75,5556	76,6667
7	77,7778	78,8889	80,0000	81,1111	82,2222	83,3333	84,4444	85,5556	86,6667	87,7778
8	88,8889	90,0000	91,1111	92,2222	93,3333	94,4444	95,5556	96,6667	97,7778	98,8889

Unités.

Minutes

Dizaines.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0185	0,0370	0,0556	0,0741	0,0926	0,1111	0,1296	0,1481	0,1667
1	0,1852	0,2037	0,2222	0,2407	0,2593	0,2778	0,2963	0,3148	0,3333	0,3519
2	0,3704	0,3889	0,4074	0,4259	0,4444	0,4630	0,4815	0,5000	0,5185	0,5370
3	0,5556	0,5741	0,5926	0,6111	0,6296	0,6481	0,6667	0,6852	0,7037	0,7222
4	0,7407	0,7593	0,7778	0,7963	0,8148	0,8333	0,8519	0,8704	0,8889	0,9074
5	0,9259	0,9444	0,9630	0,9815	1,0000	1,0185	1,0370	1,0556	1,0741	1,0926

Unités.

Secondes

Dizaines.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0003	0,0006	0,0009	0,0012	0,0015	0,0019	0,0022	0,0025	0,0028
1	0,0031	0,0034	0,0037	0,0040	0,0043	0,0046	0,0049	0,0052	0,0056	0,0059
2	0,0062	0,0065	0,0068	0,0071	0,0074	0,0077	0,0080	0,0083	0,0086	0,0090
3	0,0093	0,0096	0,0099	0,0102	0,0105	0,0108	0,0111	0,0114	0,0117	0,0120
4	0,0123	0,0127	0,0130	0,0133	0,0136	0,0139	0,0142	0,0145	0,0148	0,0151
5	0,0154	0,0157	0,0160	0,0164	0,0167	0,0170	0,0173	0,0176	0,0179	0,0182

Premier exemple. — *Transformer* 28° 13′ 47″ *en grades et fractions décimales.*

Dans la première table intitulée *degrés*, notons le chiffre 2 de la colonne à gauche qui représente les dizaines, et suivons la ligne correspondante jusqu'à son intersection avec la colonne en tête de laquelle est inscrit le chiffre 8 qui est celui des unités, nous avons sous le doigt le nombre 31,1111 qui est la valeur de 28° en grades.

Dans la seconde table, intitulée *minutes*, nous trouvons par le même procédé 0,2407 pour valeur de 13′ en grades ; et dans la troisième table, intitulée *secondes*, nous avons aussi 0,0145 pour valeur en grades de 47″. En ajoutant ces trois nombres, nous obtenons 31,3663, qui est, en grades, la valeur de 28° 13′ 47″.

Voici la disposition du calcul :

28°	31gr,1111
13′	0 ,2407
47″	0 ,0145
28° 13′ 47″	31gr,3663

Dans nos tables, il y a certaines quatrièmes décimales soulignées en raison de ce qu'elles sont prises par excès ; les autres accusent des valeurs approchées par défaut ; de cette façon chaque résultat est approché à moins de $\frac{1}{2}$ dix-millième de grade. Aussi le calcul précédent est-il approché par défaut à moins de $\frac{3}{2}$ dix-millièmes parce que nous y avons ajouté trois nombres pour lesquels l'approximation est de même sens. Si nous ajoutions trois nombres différemment approchés, l'erreur pourrait dépasser $\frac{1}{2}$ dix-millième, mais resterait inférieure à 1 dix-millième, son sens étant inconnu.

Deuxième exemple. — *Transformer* 69gr,8747 *en degrés, minutes, secondes.*

Dans la table intitulée *degrés* cherchons le nombre se rapprochant le plus par défaut de 69,8747 ; c'est 68,8889 qui répond à 62° ; en retranchant ce nombre du premier, il reste 0,9858 par défaut. Dans la table intitulée *minutes*, cherchons le nombre qui se rapproche le plus par défaut de 0,9858 ; c'est 0,9815 répondant à 53′ ; en retranchant, il reste 0,0043 par défaut ; enfin dans la table des secondes, nous lisons précisément 0,0043 qui correspond à 14″.

Nous trouvons donc 62° 53′ 14″.

Voici la disposition du calcul :

69,8747			
68,8889	62°		
0,9858			
0,9815		53′	
0,0043			
0,0043			14
0			
	62°	53′	14″

Notons, pour mémoire, que le complément d'un angle en grades s'obtient en le retranchant de 100, et son supplément en le retranchant de 200. Voici, à titre d'exemple, la résolution d'un triangle :

Triangle.

Calculer les angles d'un triangle ABC *dans lequel on donne* (*)

$$a = 23^{m},25, \qquad b + c = 27^{m}, \qquad C - B = 8^{gr},3362.$$

Résultats :

$$\begin{cases} A = 131^{gr},6328, \\ B = 30^{gr},0155, \\ C = 38^{gr},3517. \end{cases}$$

Formules du calcul :

$$\log \sin \frac{A}{2} = \log a + \log \cos \frac{C - B}{2} - \log (b + c),$$

$$\frac{B + C}{2} = 100 - \frac{A}{2}.$$

Calculs auxiliaires :

$$\log a = 1,36642$$
$$\log (b + c) = 1,43136$$
$$-\log (b + c) = \bar{2},56864$$

Calcul de $\log \cos \frac{C - B}{2}$

$$\frac{C - B}{2} = 4^{gr},1681$$

3 ,3333	3°
0 ,8348	
0 ,8333	45′
0 ,0015	
0 ,0015	5″
0	
	3°45′5″

$$\log \cos \frac{C - B}{2} = \bar{1},99907.$$

Calculs définitifs :

$$\begin{array}{r} 1,36642 \\ \bar{1},99907 \\ \bar{2},56864 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},93413$$

$$\frac{A}{2} = 59°\,14'\,5''$$

59°	$65^{gr},5556$
14′	0 ,2593
5″	0 ,0015

$$\frac{A}{2} = 65^{gr},8164$$

$$\frac{C - B}{2} = 4^{gr},1681$$

$$\frac{C + B}{2} = 100 - \frac{A}{2} = 34^{gr},1836$$

$$A = 131^{gr},6328$$
$$B = 30^{gr},0155$$
$$C = 38^{gr},3517$$

Calcul trigonométrique (*École Polytechnique, 1901*).

Résolution trigonométrique de l'équation

$$144x^3 - 958,09x + 847,2 = 0.$$

Cette équation a ses trois racines réelles. Posant pour abréger

$$p = \frac{958,09}{144}, \qquad q = \frac{847,2}{144};$$

les formules du calcul sont les suivantes :

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{p}{3}}, \qquad \sin a = \frac{3q}{p\lambda}$$

donc les racines sont données par les formules (division sexagésimale) (**)

$$x_1 = \lambda \sin \frac{a}{3} = 1,0667$$

$$x_2 = \lambda \sin \left(\frac{a}{3} + 120°\right) = 1,8749$$

$$x_3 = \lambda \sin \left(\frac{a}{3} + 240°\right) = -\lambda \sin \left(\frac{a}{3} + 60°\right) = -2,9416$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

(*) Ces données sont extraites du *Recueil de Calculs Logarithmiques*, Exercice XLI, page 66.
(**) Voir le *Recueil de Calculs Logarithmiques*, Exercice XXII, page 35.

Calculs auxiliaires :

$$\lambda = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{958{,}09}{3}}$$

$$\log 3 = 0{,}47712$$
$$-\log 3 = \bar{1}{,}52288$$
$$\log 6 = 0{,}77815$$
$$-\log 6 = \bar{1}{,}22185$$

Calcul de $\log 958{,}09$.

$$\begin{array}{rr} 9580 & 98137 \\ 9 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\log 958{,}09 = 2{,}98140$$
$$-\log 958{,}09 = \bar{3}{,}01860$$

$$\log 847{,}\ 2 = 2{,}92799$$

Calcul de $\log \sin \frac{a}{3}$

$$\begin{array}{rr} 20^\circ 59' & \bar{1}{,}55400 \\ 9'' & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \sin \frac{a}{3} = \bar{1}{,}55405$$

Calcul de $\log \sin \left(\frac{a}{3} + 120^\circ\right)$.

$$\frac{a}{3} + 120^\circ = 140^\circ 59' 9''$$

$$180^\circ - \left(\frac{a}{3} + 120^\circ\right) = 39^\circ\ 0' 51''$$

$$\begin{array}{rr} 39^\circ\ 0' & 1{,}79887 \\ 51'' & 13 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \sin\left(\frac{a}{3} + 120^\circ\right) = 1{,}79900$$

Calcul de $\log \sin\left(\frac{a}{3} + 60^\circ\right)$.

$$\frac{a}{3} + 60^\circ = 80^\circ 59' 9''$$

$$\begin{array}{rr} 80^\circ\ 59' & 1{,}99460 \\ 9'' & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \sin \left(\frac{a}{3} + 60^\circ\right) = \bar{1}{,}99460$$

Calculs définitifs :

Calcul de λ.

$$\begin{array}{r} 2{,}98140 \\ \bar{1}{,}52288 \\ \hline 2{,}50428 \\ 1{,}25214 \\ \bar{1}{,}22185 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \lambda = 0{,}47399$$
$$-\log \lambda = 1{,}52601$$

Calcul de a.

$$\begin{array}{r} 0{,}47712 \\ 2{,}92799 \\ \bar{3}{,}01860 \\ \bar{1}{,}52601 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \sin a = \bar{1}{,}94972$$

$$\begin{array}{rr} 69 & 62^\circ 57' \\ 3 & 27'' \\ \hline \end{array}$$

$$a = 62^\circ 57' 27''$$

$$\frac{a}{3} = 20^\circ 59'\ 9''$$

Calculs de x_1, x_2, x_3.

$$\begin{array}{r} 0{,}47399 \\ \bar{1}{,}55405 \\ \log x_1 = 0{,}02804 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 776 & 1066 \\ 28 & 7 \\ \hline \end{array}$$

$$x_1 = 1{,}0667$$

$$\begin{array}{r} 0{,}47399 \\ \bar{1}{,}79900 \\ \log x_2 = 0{,}27299 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 77 & 1874 \\ 22 & 9 \\ \hline \end{array}$$

$$x_2 = 1{,}8749$$

$$\begin{array}{r} 0{,}47399 \\ \bar{1}{,}99460 \\ \log(-x_3) = 0{,}46859 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 50 & 2941 \\ 9 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$-x_3 = 2{,}9416$$
$$x_3 = -2{,}9416$$

Vérification : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

NOTE SUR LES INVARIANTS PONCTUELS ET TANGENTIELS

Suite (*)

par M. **J. Sire**, à Belverne.

Espace.

XXI. — *Si six points situés dans un plan ont respectivement pour coordonnées* :

$$\begin{array}{llll}
\lambda_1 x_1 + \mu_1 x_2 + \nu_1 x_3, & \lambda_1 y_1 + \mu_1 y_2 + \nu_1 y_3, & \lambda_1 z_1 + \mu_1 z_2 + \nu_1 z_3, & \lambda_1 t_1 + \mu_1 t_2 + \nu_1 t_3, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\lambda_6 x_1 + \mu_6 x_2 + \nu_6 x_3, & \lambda_6 y_1 + \mu_6 y_2 + \nu_6 y_3, & \lambda_6 z_1 + \mu_6 z_2 + \nu_6 z_3, & \lambda_6 t_1 + \mu_6 t_2 + \nu_6 t_3,
\end{array}$$

leur invariant ponctuel est égal à

$$\frac{(1,2,5)}{(3,4,5)} : \frac{(1,2,6)}{(3,4,6)},$$

en désignant par (p,q,r) *le déterminant* $\begin{vmatrix} \lambda_p & \mu_p & \nu_p \\ \lambda_q & \mu_q & \nu_q \\ \lambda_r & \mu_r & \nu_r \end{vmatrix}$.

Si $\alpha_p, \alpha_q, \alpha_r$; $\beta_p, \beta_q, \beta_r$; $\gamma_p, \gamma_q, \gamma_r$ sont les projections des trois points A_p, A_q, A_r sur chacun des plans de coordonnées, on a

$$(A_p A_q A_r)^2 = (\alpha_p \alpha_q \alpha_r)^2 + (\beta_p \beta_q \beta_r)^2 + (\gamma_p \gamma_q \gamma_r)^2.$$

L'aire du triangle $(\alpha_p \alpha_q \alpha_r)$ est égale à

$$\frac{1}{T_p T_q T_r} \begin{vmatrix} \lambda_p x_1 + \mu_p x_2 + \nu_p x_3, & \lambda_p y_1 + \mu_p y_2 + \nu_p y_3, & \lambda_p t_1 + \mu_p t_2 + \nu_p t_3 \\ \lambda_q x_1 + \mu_q x_2 + \nu_q x_3, & \lambda_q y_1 + \mu_q y_2 + \nu_q y_3, & \lambda_q t_1 + \mu_q t_2 + \nu_q t_3 \\ \lambda_r x_1 + \mu_r x_2 + \nu_r x_3, & \lambda_r y_1 + \mu_r y_2 + \nu_r y_3, & \lambda_r t_1 + \mu_r t_2 + \nu_r t_3 \end{vmatrix};$$

en posant $\qquad T_p = (\lambda_p t_1 + \mu_p t_2 + \nu_p t_3), \quad T_q = (\lambda_q t_1 + \dots), \quad \dots\dots,$

on a

$$\frac{1}{T_p T_q T_r} (p, q, r) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{vmatrix}.$$

De même

$$(\beta_p \beta_q \beta_r) = \frac{1}{T_p T_q T_r} (p, q, r) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix}, \qquad (\gamma_p \gamma_q \gamma_r) = \frac{1}{T_p T_q T_r} (p, q, r) \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & t_1 \\ z_2 & x_2 & t_2 \\ z_3 & x_3 & t_3 \end{vmatrix},$$

d'où

$$(A_p A_q A_r)^2 = \frac{1}{T_p T_q T_r}^2 (p, q, r)^2 \Sigma \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{vmatrix}^2, \qquad (A_p A_q A_r) = \frac{1}{T_p T_q T_r} (p, q, r) \sqrt{\Sigma \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{vmatrix}^2}.$$

Par suite,

$$\frac{(A_1 A_2 A_5)}{(A_3 A_4 A_5)} = \frac{T_1 T_2 (1,2,5)}{T_3 T_4 (3,4,5)}, \qquad \frac{(A_1 A_2 A_6)}{(A_3 A_4 A_6)} = \frac{T_1 T_2 (1,2,6)}{T_3 T_4 (3,4,6)}.$$

(*) Voir le numéro de Mars 1902 de la *Revue*.

d'où

$$\frac{(A_1A_2A_5)}{(A_3A_4A_5)} : \frac{(A_1A_2A_6)}{(A_3A_4A_6)} = \frac{(1,2,5)}{(3,4,5)} : \frac{(1,2,6)}{(3,4,6)}.$$

XXII. — *Si on coupe par un plan un faisceau de six droites issues d'un même point de l'espace, l'invariant ponctuel des points d'intersection est indépendant de la position du plan.*

Soient

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{b_1} = \frac{z - z_0}{c_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x - x_0}{a_6} = \frac{y - y_0}{b_6} = \frac{z - z_0}{c_6},$$

les équations des six droites et

$$ux + vy + wz + r = 0.$$

celle du plan sécant. Je désignerai par $A_1, A_2, \ldots, A_6$ les points de rencontre de ces droites avec le plan sécant. Par une série de calculs analogues à ceux que j'ai faits plus haut, on trouverait

$$(A_pA_qA_r) = \frac{R_0^2}{P_pP_qP_r}(p,q,r)\sqrt{u^2 + v^2 + w^2};$$

en posant

$$R_0 = ux_0 + vy_0 + wz_0 + r, \qquad P_p = ua_p + vb_p + wc_p, \qquad P_q = \cdots\cdots\cdots$$

$$(p, q, r) = \begin{vmatrix} a_p & b_p & c_p \\ a_q & b_q & c_q \\ a_r & b_r & c_r \end{vmatrix};$$

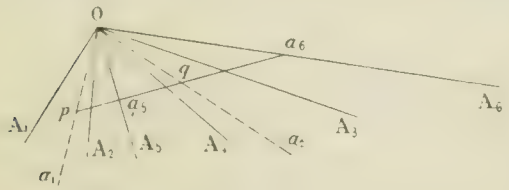
il s'ensuit que

$$\frac{(A_1A_2A_5)}{(A_3A_4A_5)} = \frac{P_1P_2(1,2,5)}{P_3P_4(3,4,5)} \qquad \frac{(A_1A_2A_6)}{(A_3A_4A_6)} = \frac{P_1P_2(1,2,6)}{P_3P_4(3,4,6)},$$

et

$$\frac{(A_1A_2A_5)}{(A_3A_4A_5)} : \frac{(A_1A_2A_6)}{(A_3A_4A_6)} = \frac{(1,2,5)}{(3,4,5)} : \frac{(1,2,6)}{(3,4,6)}.$$

Ce théorème peut être établi géométriquement de deux manières.



1° Le plan déterminé par les droites OA_1 et OA_6 coupe les plans OA_1A_2, OA_3A_4 suivant les droites Oa_1, Oa_2 et le plan sécant suivant la droite pqa_5a_6, et on sait que le rapport anharmonique des quatre points p, q, a_5, a_6 est indépendant de la position de la sécante; donc, d'après (II), il en est de même de l'invariant ponctuel des points d'intersection du plan sécant et des droites considérées.

2° Les deux tétraèdres $OA_1A_2A_5$ et $OA_3A_4A_5$ ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases :

$$\frac{(A_1A_2A_5)}{(A_3A_4A_5)} = \frac{OA_1.OA_2.OA_5 \sin(OA_1, OA_2, OA_5)}{OA_3.OA_4.OA_5 \sin(OA_3, OA_4, OA_5)}, \qquad \frac{(A_1A_2A_6)}{(A_3A_4A_6)} = \frac{OA_1.OA_2.OA_6 \sin(OA_1, OA_2, OA_6)}{OA_3.OA_4.OA_6 \sin(OA_3, OA_4, OA_6)},$$

d'où

$$\frac{(A_1A_2A_5)}{(A_3A_4A_5)} : \frac{(A_1A_2A_6)}{(A_3A_4A_6)} = \frac{\sin(OA_1, OA_2, OA_5)}{\sin(OA_3, OA_4, OA_5)} : \frac{\sin(OA_1, OA_2, OA_6)}{\sin(OA_3, OA_4, OA_6)}.$$

C. Q. F. D.

XXIII. — *Si on joint six points fixes d'une cubique gauche à un point variable de cette cubique, l'invariant ponctuel du faisceau obtenu est constant.*

Je supposerai la cubique définie par les équations (*)

$$x = am^3 + bm^2 + cm + d, \qquad y = a'm^3 + b'm^2 + c'm + d', \qquad z = a''m^3 + b''m^2 + c''m + d''.$$

(*) Ces équations ne conviennent qu'aux cubiques gauches qui ont pour plan osculateur le plan de l'infini.

Soient $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_6, y_6, z_6)$ les coordonnées de six points fixes de la cubique et (x, y, z) les coordonnées d'un point variable de cette cubique.

Les coefficients angulaires des six droites étant proportionnels à

$$x - x_1,\quad y - y_1,\quad z - z_1;\qquad \ldots;\qquad x - x_6,\quad y - y_6,\quad z - z_6,$$

il s'agira de montrer que le rapport

$$\frac{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - x_4 & y - y_4 & z - z_4 \\ x - x_5 & y - y_5 & z - z_5 \\ x - x_6 & y - y_6 & z - z_6 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_6 & y - y_6 & z - z_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - x_4 & y - y_4 & z - z_4 \\ x - x_5 & y - y_5 & z - z_5 \\ x - x_6 & y - y_6 & z - z_6 \end{vmatrix}}$$

est indépendant de x, y, z.

Je considère le déterminant

$$D = | x - x_p \qquad y - y_p \qquad z - z_p | ,$$

dont je n'écris que la première ligne, les deux autres lignes non écrites étant affectées des indices q et r. On a

$$x - x_p = a(m^3 - m_p^3) + b(m^2 - m_p^2) + c(m - m_p),\qquad y - y_p = a'(m^3 - m_p^3) + b'(m^2 - m_p^2) + c'(m - m_p),$$
$$z - z_p = a''(m^3 - m_p^3) + b''(m^2 - m_p^2) + c''(m - m_p);$$

donc

$$D = | a(m - m_p)(m^2 - m_p^2) + b(m^2 - m_p^2) + c(m - m_p) \qquad a'(m - m_p)(m^2 - m_p^2) + b'(m^2 - m_p^2) + c'(m - m_p)$$
$$a''(m^2 - m_p^2) + b''(m^2 - m_p^2) + c''(m - m_p) | ,$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m - m_p & m^2 - m_p^2 & m - m_p \\ m' - m_p & m^2 - m_p^2 & m - m_p \\ m'' - m_p & m^2 - m_p^2 & m - m_p \end{vmatrix} ;$$

or

$$\begin{vmatrix} m' - m_p & m^2 - m_p^2 & m - m_p \\ m'' - m_p & m^2 - m_p^2 & m - m_p \\ m^2 - m_p & m^2 - m_p^2 & m - m_p \end{vmatrix} = (m - m_p)(m - m_q)(m - m_r) \begin{vmatrix} m^2 + mm_p + m_p^2 & m + m_p & 1 \\ m^2 + mm_q + m_q^2 & m + m_q & 1 \\ m^2 + mm_r + m_r^2 & m + m_r & 1 \end{vmatrix},$$

$$= (m - m_p)(m - m_q)(m - m_r) \begin{vmatrix} m_p^2 & m_p & 1 \\ m_q^2 & m_q & 1 \\ m_r^2 & m_r & 1 \end{vmatrix},$$

de sorte que

$$D = (m - m_p)(m - m_q)(m - m_r) \begin{vmatrix} m_p^2 & m_p & 1 \\ m_q^2 & m_q & 1 \\ m_r^2 & m_r & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} .$$

De là on déduit facilement la valeur de l'invariant ponctuel du faisceau qui est égal à

$$\frac{\begin{vmatrix} m_1^2 & m_1 & 1 \\ m_2^2 & m_2 & 1 \\ m_3^2 & m_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_4^2 & m_4 & 1 \\ m_5^2 & m_5 & 1 \\ m_6^2 & m_6 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} m_1^2 & m_1 & 1 \\ m_2^2 & m_2 & 1 \\ m_6^2 & m_6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_4^2 & m_4 & 1 \\ m_5^2 & m_5 & 1 \\ m_6^2 & m_6 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Remarque. — Cette propriété appartient également aux courbes gauches définies par les équations

$$x = am^{3n} + bm^{2n} + cm^{n} + d, \qquad y = a'm^{3n} + b'm^{2n} + c'm^{n} + d', \qquad z = a''m^{3n} + b''m^{2n} + c''m^{n} + d''$$

où n désigne un nombre entier.

XXIV. — *Si* $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ *sont six points situés sur un hyperboloïde à une nappe tels que* A_1 *et* A_2 *soient situés sur une même génératrice de même que* A_3 *et* A_4, *l'invariant ponctuel du faisceau obtenu en joignant ces six points à un point quelconque de la surface est constant.*

Soient $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_6, y_6, z_6)$ les coordonnées des six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et (x, y, z) les coordonnées d'un point variable ; l'invariant du faisceau est

$$\frac{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_5 & y-y_5 & z-z_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x-x_4 & y-y_4 & z-z_4 \\ x-x_5 & y-y_5 & z-z_5 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_6 & y-y_6 & z-z_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x-x_4 & y-y_4 & z-z_4 \\ x-x_6 & y-y_6 & z-z_6 \end{vmatrix}}.$$

Si je désigne par P, Q, R, S les premiers membres des équations des plans déterminés par les points (A_1, A_2, A_5), (A_3, A_4, A_6), (A_1, A_2, A_6), (A_3, A_4, A_5), l'équation de la surface sera

$$PQ = \lambda RS,$$

dans laquelle λ désigne une constante et

$$P = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \quad Q = a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \quad R = a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \quad S = a_4x + b_4y + c_4z + d_4.$$

Je considère le déterminant

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_5 & y-y_5 & z-z_5 \end{vmatrix};$$

il peut s'écrire

$$\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_1(x-x_1) + b_1(y-y_1) + c_1(z-z_1) & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1(x-x_2) + b_1(y-y_2) + c_1(z-z_2) & y-y_2 & z-z_2 \\ a_1(x-x_5) + b_1(y-y_5) + c_1(z-z_5) & y-y_5 & z-z_5 \end{vmatrix}.$$

Mais $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = P$, $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0$ pour $i = 1, 2, 5$; le déterminant précédent est donc égal à

$$\frac{P}{a_1}\begin{vmatrix} 1 & y-y_1 & z-z_1 \\ 1 & y-y_2 & z-z_2 \\ 1 & y-y_5 & z-z_5 \end{vmatrix} = \frac{P}{a_1}\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}.$$

On trouverait de même

$$\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x-x_4 & y-y_4 & z-z_4 \\ x-x_5 & y-y_5 & z-z_5 \end{vmatrix} = \frac{S}{a_3}\begin{vmatrix} 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \\ 1 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_6 & y-y_6 & z-z_6 \end{vmatrix} = \frac{R}{a_3}\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_6 & z_6 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x-x_4 & y-y_4 & z-z_4 \\ x-x_6 & y-y_6 & z-z_6 \end{vmatrix} = \frac{Q}{a_2}\begin{vmatrix} 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \\ 1 & y_6 & z_6 \end{vmatrix},$$

et par suite le rapport (1) devient

$$\frac{a_4 P}{a_1 S} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_4 & z_4 \\ 1 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}} : \frac{a_4 R}{a_1 Q} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_4 & z_4 \\ 1 & y_6 & z_6 \end{vmatrix}},$$

ce qui peut s'écrire, en remarquant que le point est sur la surface,

$$\frac{a_4 a_3}{a_1 a_2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_4 & z_4 \\ 1 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_4 & z_4 \\ 1 & y_6 & z_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}.$$

(A suivre.)

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1901)

Physique (Paris).

Solution de M. **H. G. Pellat** (1er prix), élève au lycée Louis-le-Grand.

1028. — *Sur une bulle de savon ayant la forme d'une sphère de rayon* R, *on fait tomber un faisceau de lumière convergente (fournie par exemple par une lentille recevant de la lumière parallèle et recouverte d'un diaphragme qui ne laisserait passer la lumière que par l'intervalle annulaire compris entre deux circonférences concentriques de rayons presque égaux) formant une nappe conique circulaire dont l'axe coïncide avec un diamètre de la sphère. La nappe conique de sommet* M *est transformée par la réflexion en une nappe conique de sommet* M'.

On demande de suivre les variations de position des sommets M *et* M'.

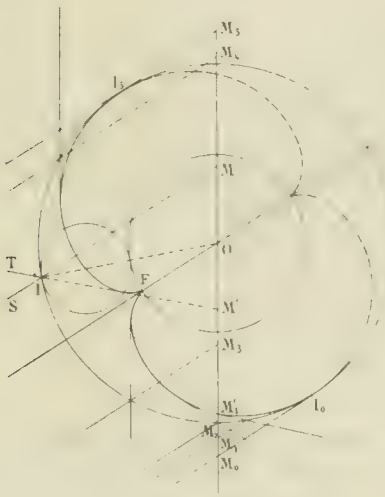
Comme application, on supposera que la bulle est restée adhérente et suspendue au tube qui a servi à la gonfler, que ce tube est vertical, que l'axe du faisceau conique coïncide avec le diamètre vertical de la bulle et que la lumière est dirigée de bas en haut. On demande dans ce cas comment variera la position du sommet M', *la bulle se dégonflant, si on suppose que le sommet* M *coïncide avec l'extrémité supérieure du diamètre vertical et que l'angle au sommet du cône, (2γ), soit égal à 90° ; en particulier, de calculer le déplacement de* M' *dans le cas où la bulle ayant atteint un rayon de 10cm la pression intérieure viendrait à varier d'une quantité égale à 0cm.1 de mercure. On supposera la tension superficielle égale à 75 dynes par centimètre et la densité du mercure égale à 13,56.*

Remarque préliminaire. — La bulle étant donnée, nous la supposerons fixe et de rayon constant. De même, la nappe conique de rayons lumineux étant fournie par une lentille et un diaphragme donnés, nous supposerons aussi constant l'angle γ formé par un rayon quelconque avec l'axe du cône : supposer γ variable, ce serait admettre qu'on ait à sa disposition soit une infinité de lentilles de distances focales différentes, soit une infinité de diaphragmes s'adaptant à la même lentille, ce qui ne

serait pas pratique. Nous ne ferons donc varier que la distance de la bulle à la lentille en déplaçant celle-ci le long de son axe optique.

Pour que l'expérience ait lieu, il faut que la nappe conique rencontre la sphère et que, par conséquent, le point M soit compris entre les deux positions extrêmes M_0 et M_5, sommets des cônes de révolution d'angle générateur γ circonscrits à la sphère.

Méthode. — Prenons pour plan de figure un plan passant par l'axe du cône. Le phénomène étant évidemment de révolution autour de cet axe, il nous suffira d'étudier ce qui se passe dans ce plan. Considérons un des rayons lumineux qui s'y trouvent, soit SIM. Quand on déplace la lentille, il fait toujours le même angle γ avec l'axe; par conséquent le rayon réfléchi M'IT reste constamment tangent à la caustique formée par la réflexion de rayons parallèles à la direction SM sur le miroir sphérique convexe formé par la bulle de savon. On sait que cette caustique a pour méridienne une épicycloïde engendrée par un point d'un cercle de rayon $\frac{R}{4}$ roulant sans glissement sur un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ concentrique au miroir. Cette épicycloïde présente un point de rebroussement en F, sur le diamètre FO parallèle aux rayons incidents. Le point M' est à l'intersection de l'axe MO avec la tangente menée par le point d'incidence I à l'épicycloïde. Dès lors, pour discuter le problème, il n'y a qu'à suivre le déplacement du point M', le point I se déplaçant entre ses positions extrêmes I_0 et I_5, et le point M entre M_0 et M_5.



Résultat de la discussion. — Le point M partant de M_0, le point M' part de la même position et ces deux points se déplacent d'abord dans le même sens, M' plus vite que M. Pour une certaine position M_1, le point de contact du rayon réfléchi avec l'épicycloïde est venu en M'_1, au point où cette épicycloïde rencontre l'axe. A partir de ce moment, le point M' rétrograde, croise le point M sur la sphère en M_2, puis s'éloigne indéfiniment jusqu'à ce que, le point M étant venu en M_3, la tangente à l'épicycloïde soit devenue parallèle à l'axe.

Le point M' reparaît ensuite à la partie supérieure de la figure, redescend en croisant le point M en O et s'éloigne de nouveau indéfiniment jusqu'à ce que, le sommet de la nappe incidente étant en M_4, la tangente soit de nouveau parallèle à l'axe.

Le point M' reparaît une seconde fois à la partie supérieure et redescend jusqu'en M, où il rencontre pour la quatrième fois le point M.

La considération de la seconde nappe de la caustique permettrait de suivre de la même manière le déplacement du sommet du faisceau réfléchi sur le miroir sphérique concave formé par la seconde face de la bulle de savon. Cette recherche est tout aussi légitime que la première, car il n'y a pas, en réalité, de différence notable entre les quantités de lumière réfléchies par les deux faces.

Application. — Le point M étant à l'extrémité supérieure du diamètre vertical de la bulle et l'angle γ étant égal à 45°, le point M' se trouve à l'extrémité inférieure du même diamètre et, par suite, se déplace d'une quantité égale à la variation de ce diamètre.

Soient A la tension superficielle ($A = 75$), R le rayon initial de la bulle ($R = 10$), p l'excès initial de la pression intérieure sur la pression atmosphérique, d la densité du mercure ($d = 13,56$), g l'accélération de la pesanteur ($g = 981$).

Nous avons la formule de capillarité

$$p = \frac{4A}{R}.$$

Soient de même R' le deuxième rayon de la bulle, p' le deuxième excès de pression intérieure.

Nous avons aussi
$$p' = \frac{4A}{R'},$$

d'où nous tirons
$$p' - p = 4A\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right).$$

Or nous avons, en unités C. G. S.

$$p' - p = 0{,}01 \times 13{,}56 \times 981 = 133.$$

d'où
$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{10} - \frac{133}{300} \quad \text{et} \quad R' = 1{,}84.$$

Par suite, le déplacement du point M', qui est égal à $2(R - R')$, est de

$$2 \times 10 - 1{,}84 = 16{,}32.$$

Nous avons supposé une augmentation de pression, ce qui est conforme à l'énoncé ; une diminution de pression de $0^{cm}{,}1$ eût été impossible, puisque cela correspond à 133 C. G. S. et que l'excès de pression initial n'est que de 30 C. G. S.

Chimie.

Solution de M. **P. Thellier de la Neuville** (1er prix), élève au collège Stanislas.

1029. — *Un mélange d'hydrogène protocarboné, d'hydrogène bicarboné, d'acide carbonique et d'hydrogène silicié occupe 20. Après avoir été traité par la potasse, le volume est réduit à 18. On ajoute alors à ces 18 un volume de 50 d'oxygène et on fait détoner le mélange dans un eudiomètre ; après cette détonation, le volume est de 36 ; traités par la potasse, ces 36 se réduisent à 22 qui sont entièrement absorbés ensuite par un bâton de phosphore.*

Tous ces volumes ont été mesurés à la même température et à la même pression et corrigés de la tension de la vapeur d'eau qu'ils contiennent après l'action de la solution de potasse et après la combustion eudiométrique.

On demande : 1° les formules des diverses réactions qui ont eu lieu ;
2° le volume de chacun des gaz du mélange.

1. Lorsque l'on traite le mélange des deux gaz par la potasse, on a les réactions suivantes :

$$1 \qquad CO^2 + 2\,KOH = CO^3K^2 + H^2O,$$

$$2 \qquad SiH^4 + 2\,KOH + H^2O = SiO^3K^2 + 4H^2,$$

et le mélange CH^4, C^2H^4, CO^2 et SiH^4 est remplacé par le mélange CH^4, C^2H^4 et H^2.

Par l'addition d'oxygène en excès il en reste 22 et par l'étincelle on obtient les réactions

$$3 \qquad CH^4 + 2\,O^2 = CO^2 + 2\,H^2O,$$

$$4 \qquad C^2H^4 + 3\,O^2 = 2\,CO^2 + 2\,H^2O,$$

$$5 \qquad H^2 + \frac{1}{2}\,O^2 = H^2O.$$

Le gaz carbonique est absorbé par la potasse, et l'oxygène restant par le phosphore.

2. Soient x, y, z et t les volumes respectifs d'hydrogène protocarboné, d'hydrogène bicarboné, d'acide carbonique et d'hydrogène silicié. Nous avons d'abord la relation

$$x + y + z + t = 20$$

Par l'addition de potasse, les volumes des carbures d'hydrogène ne varient pas, l'acide carbonique est absorbé et l'équation (2) nous montre qu'un volume d'hydrogène silicié en donne quatre d'hydrogène. Nous avons donc la deuxième relation

$$x + y + 4t = 18.$$

D'après l'énoncé, 28^{cc} d'oxygène brûlent complètement les trois gaz restants ; les formules des réactions montrent que CH^4 exige pour cela le double, C^2H^4 le triple et H^2 la moitié de son volume d'oxygène. Les volumes d'oxygène employés sont donc $2x$, $3y$, $2t$ et on a

$$2x + 3y + 2t = 28.$$

Enfin les volumes d'acide carbonique formés dans les réactions (3) et (4) sont, le premier égal au volume de protocarbure, le second double du volume de bicarbure, ce qui fait

$$x + 2y = 14,$$

car 14^{cc} est le volume d'acide carbonique recueilli.

Nous avons donc les quatre équations

$$x + y + z + t = 20, \qquad x + y + 4t = 18, \qquad 2x + 3y + 2t = 28, \qquad x + 2y = 14,$$

d'où l'on tire aisément

$$x = 6, \qquad y = 4, \qquad z = 8, \qquad t = 2.$$

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1901)

Mathématiques spéciales.

1046. — *On considère un système de trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz.

1° *Trouver l'équation générale des paraboloïdes* P *admettant le plan* xOy *pour plan de symétrie, tangents au plan* yOz *au point* O, *et ayant pour trace sur le plan* zOx *une ellipse de grandeur invariable dont le grand axe est dirigé suivant* Ox.

2° *Trouver les équations des focales* F *et* Φ *de l'un de ces paraboloïdes* P.

3° *Trouver l'enveloppe de la focale* F *qui est située dans le plan* xOy, *lorsque le paraboloïde* P *varie.*

4° *Dans la même hypothèse, trouver l'enveloppe de l'axe et le lieu du sommet de la focale* Φ. *Construire cette enveloppe et ce lieu.*

5° *Calculer le paramètre de la focale* Φ *en fonction du coefficient angulaire de son axe (qui est situé dans le plan* xOy), *et étudier la variation de ce paramètre quand ce coefficient angulaire varie.*

6° *En se servant des résultats qui précèdent, donner une idée de la forme de la surface engendrée par la focale* Φ *quand le paraboloïde* P *varie. — En particulier, indiquer quelle est la section de cette surface par le plan* zOx.

N. B. — *On désignera par* a *et* b $(a > b)$ *les demi-axes de l'ellipse donnée dans le plan* zOx.

1. Puisque les paraboloïdes passent par le point O, il en est de même de l'ellipse donnée ; par suite cette courbe a pour équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - \frac{2x}{a} = 0, \qquad y = 0.$$

Et l'équation générale des quadriques qui la contiennent est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - \frac{2x}{a} = y(Ax + By + Cz + D) = 0.$$

Cette quadrique est tangente à l'origine au plan yOz si $D = 0$; elle est symétrique par rapport au plan xOy si $C = 0$. De plus pour que l'équation représente un paraboloïde il faut que l'ensemble

des termes du deuxième degré $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} + y(Ax + By)$ se décompose en une somme de deux carrés, et pour cela il faut que $\frac{x^2}{a^2} + y(Ax + By)$ soit un carré et puisse se mettre sous la forme $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda}\right)^2$.

L'équation générale des paraboloïdes P est donc

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda}\right)^2 + \frac{z^2}{b^2} - \frac{2x}{a} = 0.$$

Pour déterminer facilement les focales de ce paraboloïde, il est utile de former l'équation tangentielle.

Pour cela, considérons le cône ayant pour sommet l'origine et s'appuyant sur la section du paraboloïde par le plan $ux + vy + wz + r = 0$,

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda}\right)^2 + \frac{z^2}{b^2} + \frac{2x}{a} \cdot \frac{ux + vy + wz}{r} = 0,$$

et écrivons que ce cône se réduit à deux plans ; nous trouvons ainsi

$$(P) \qquad \lambda^2 v^2 + b^2 w^2 - 2auv + 2\lambda vr = 0.$$

On peut d'ailleurs obtenir directement cette équation tangentielle. En effet l'équation tangentielle de l'ellipse donnée est

$$b^2 w^2 - 2auv - r^2 = 0,$$

par suite l'équation générale tangentielle des quadriques passant par cette ellipse est

$$b^2 w^2 - 2auv - r^2 + h(Au + Bv + Cw + Dr)^2 = 0.$$

Elle représente un paraboloïde si $hD^2 = 1$: nous pouvons alors supposer $h = 1$, $D = 1$, ce qui nous donne l'équation

$$b^2 w^2 - 2auv - r^2 + (Au + Bv + Cw + r)^2 = 0.$$

Ce paraboloïde est tangent au plan des yz à l'origine si l'on a $A = 0$; et il est symétrique par rapport au plan xOy si l'on a $B = 0$. En remplaçant alors C par λ nous obtenons l'équation (P).

2. Les focales du paraboloïde (P) sont les coniques du faisceau tangentiel

$$\lambda^2 v^2 + b^2 w^2 - 2auv + 2\lambda vr + \mu(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Pour que cette équation représente une conique, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} \mu & 0 & 0 & -a \\ 0 & \mu + \lambda^2 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \mu + b^2 & 0 \\ -a & \lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(\mu + b^2)(\mu(\lambda^2 + a^2) - a^2\lambda^2) = 0;$$

cette équation admet deux racines $\mu = -b^2$ et $\mu = \frac{\lambda^2 a^2}{\lambda^2 + a^2}$.

A la racine $-b^2$ correspond la focale qui a pour équation tangentielle

$$-b^2 u^2 + \lambda^2 v^2 - b^2 w^2 - 2auv + 2\lambda vr = 0;$$

cette équation représente une parabole située dans le plan des xy. On trouve aisément que ses équations ponctuelles sont

$$z = 0, \qquad (x - ay)^2 - 2a(\lambda^2 - b^2) - 2\lambda b^2 y + b^2(\lambda^2 - b^2) = 0.$$

C'est la focale F.

A la racine $-\dfrac{\lambda^2 a^2}{\lambda^2 - a^2}$ correspond la focale Φ_1 qui a pour équation tangentielle

$$f(u, v, w, r) \equiv -a^2\lambda^2u^2 + \lambda^4v^2 + w^2[b^2(\lambda^2 + a^2) - \lambda^2a^2] - 2aur(\lambda^2 + a^2) + 2\lambda vr(\lambda^2 + a^2) = 0.$$

Cherchons ses équations ponctuelles.

Les coordonnées du plan de cette conique sont déterminées par les équations $f'_u = 0$, $f'_v = 0$, $f'_w = 0$, $f'_r = 0$. On en tire aisément $u = \lambda$, $v = a$, $w = 0$, $r = -\dfrac{\lambda^3 a^2}{\lambda^2 + a^2}$, ce qui donne le plan

$$(1) \qquad \lambda x + ay - \frac{a\lambda^3}{\lambda^2 + a^2} = 0.$$

D'autre part le cône qui a pour sommet l'origine et pour directrice la focale Φ a pour équations tangentielles

$$r = 0, \qquad -a^2\lambda^2u^2 + \lambda^4v^2 + w^2[b^2(\lambda^2 + a^2) - \lambda^2a^2] = 0.$$

et par suite pour équation ponctuelle

$$(2) \qquad -\frac{x^2}{a^2\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^4} + \frac{z^2}{a^2b^2 - c^2\lambda^2} = 0 \qquad [c^2 = a^2 - b^2].$$

Les équations (1) et (2) sont les équations ponctuelles de la focale Φ.

L'équation (2) peut s'écrire

$$(-\lambda^2x^2 + a^2y^2)(a^2b^2 - c^2\lambda^2) + a^2\lambda^4z^2 = 0,$$

ou, en y remplaçant $\lambda x + ay$ par $\dfrac{a\lambda^3}{\lambda^2 + a^2}$,

$$-\frac{a\lambda^3}{\lambda^2 + a^2}(\lambda x - ay)(a^2b^2 - c^2\lambda^2) + a^2\lambda^4z^2 = 0,$$

ou enfin

$$a\lambda(\lambda^2 + a^2)z^2 - (\lambda x - ay)(a^2b^2 - c^2\lambda^2) = 0\ ;$$

c'est l'équation d'un cylindre parabolique qui est coupé par le plan (1) suivant la focale Φ.

On peut résumer dans le tableau suivant les résultats qu'on vient d'obtenir :

Focale F	Équation tangentielle :	$-b^2u^2 + (\lambda^2 - b^2)v^2 - 2aur + 2\lambda vr = 0$;
	Équations ponctuelles :	$z = 0$, $\quad (\lambda x + ay)^2 - 2ar(\lambda^2 - b^2) - 2\lambda b^2y + b^2(\lambda^2 - b^2) = 0$.
Focale Φ	Équation tangentielle :	$-a^2\lambda^2u^2 + \lambda^4v^2 + w^2(a^2b^2 - c^2\lambda^2) - 2aur - 2\lambda vr(\lambda^2 + a^2) = 0$;
	Équations ponctuelles	$\lambda x + ay - \dfrac{a\lambda^3}{\lambda^2 + a^2} = 0$, $\quad a\lambda(\lambda^2 + a^2)z^2 - (\lambda x - ay)(a^2b^2 - c^2\lambda^2) = 0$.

3. Ordonnons par rapport à λ l'équation tangentielle de la focale F :

$$\lambda^2v^2 + 2vr - b^2u^2 - b^2v^2 - 2aur = 0,$$

et écrivons que cette équation a une racine double en λ ; nous avons

$$b^2(u^2 + v^2) + 2aur + r^2 = 0\ ;$$

c'est l'équation tangentielle de l'enveloppe.

Elle représente une conique ayant pour centre le point $(a, 0)$; l'un de ses foyers est à l'origine. Pour achever de la déterminer, cherchons les tangentes parallèles à Oy. Soit $x - h = 0$ l'une de ces tangentes, nous devons avoir $b^2 - 2ah + h^2 = 0$, ou $h = a \pm c$.

Il en résulte que l'enveloppe de la focale F est la focale de l'ellipse donnée.

Ce résultat pouvait se prévoir. Désignons en effet par E l'ellipse donnée, et par A le pôle du plan de cette ellipse par rapport au paraboloïde P. Considérons le réseau tangentiel défini par le point double

A, le paraboloïde P et le cercle de l'infini. L'ellipse E appartient à ce réseau, il en est de même de la focale H de l'ellipse E et des focales du paraboloïde.

Or on sait que deux faisceaux qui appartiennent à un même réseau ont une quadrique commune : on en conclut qu'il y a une sphère de centre A dans le faisceau tangentiel défini par les coniques H et F. Mais celles-ci sont dans un même plan, le plan xOy, donc la sphère est de rayon nul, par suite les coniques F et H sont bitangentes. On voit ainsi que l'enveloppe de la focale F est l'hyperbole H.

4. ***Enveloppe de l'axe de la focale*** Φ. — Cet axe a pour équation, dans le plan xOy,

$$\lambda x + ay - \frac{a\lambda^3}{\lambda^2 + a^2} = 0. \tag{2}$$

Pour avoir l'équation tangentielle de l'enveloppe, il suffit d'identifier l'équation (2) avec l'équation d'une droite quelconque $ux + vy + r = 0$ et d'éliminer λ entre les deux équations obtenues. On a ainsi

$$\frac{r}{u} = \frac{a}{v} - \frac{a\lambda^3}{r(\lambda^2 + a^2)};$$

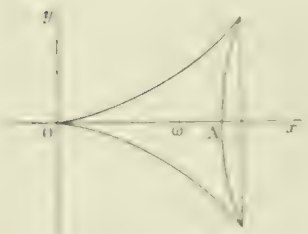
on en déduit $\lambda = \frac{au}{v}$, puis

$$\frac{a}{r} = -\frac{\frac{a^2u}{v}}{\left(\frac{a^2u^2}{v^2} + a^2\right)}$$

ou

$$r(u^2 + v^2) + au^3 = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une hypocycloïde à trois rebroussements symétrique par rapport à l'axe Ox. Cet axe est une tangente de rebroussement ; le point de contact est à l'origine. En outre la même droite rencontre la courbe normalement au point A $(a, 0)$ centre de l'ellipse E ; par suite le centre ω de l'hypocycloïde a pour abscisse $\frac{3a}{4}$.



Lieu du sommet de la focale Φ. — Ce point est déterminé par les équations ponctuelles de Φ dans lesquelle son fait $z = 0$; on a ainsi

$$\lambda x + ay - \frac{a\lambda}{\lambda^2 + a^2} = 0, \qquad \lambda x - ay = 0.$$

Nous aurons le lieu du sommet en éliminant λ entre ces deux équations. Ce calcul ne présente aucune difficulté et conduit à l'équation

$$2x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0,$$

qui représente une cissoïde droite ayant son point de rebroussement à l'origine et admettant comme asymptote la droite $2x - a = 0$.

5. Nous allons prendre maintenant comme variable le coefficient angulaire m de l'axe de la focale Φ, ce qui revient à poser $-\frac{\lambda}{a} = m$ ou $\lambda = -am$. Les équations ponctuelles de la focale sont alors

$$y - mx - \frac{am}{m^2 + 1} = 0, \qquad am(m^2 + 1)z^2 - (y - mx)(b^2 - c^2m^2) = 0.$$

Ces équations ne changent pas si on change m en $-m$ et y en $-y$: on en conclut qu'à deux valeurs de m égales et de signes contraires correspondent deux courbes symétriques par rapport au plan zOx. Il suffira donc de donner à m des valeurs positives.

Désignons alors par φ l'angle *aigu* que fait Ox avec l'axe de la focale ;

nous avons $\operatorname{tg}\varphi = m$, $\sin\varphi = \dfrac{m}{+\sqrt{m^2+1}}$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{+\sqrt{m^2+1}}$.

Faisons une transformation de coordonnées dans le plan des xy en prenant pour nouveaux axes les demi-droites Ox' et Oy' définies par les égalités $(Ox, Ox') = \varphi$, $(Ox, Oy') = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$. Les formules de transformation de coordonnées sont

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \qquad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi,$$

ou

$$x = \frac{x' - my'}{\sqrt{m^2+1}}, \qquad y = \frac{mx' + y'}{\sqrt{m^2+1}}.$$

Les équations de la focale deviennent alors

$$y'\sqrt{1+m^2} + \frac{am^3}{m^2+1} = 0, \qquad am(m^2+1)x^2 - \frac{2mx' + (1-m^2)y'}{\sqrt{1+m^2}}(b^2 - c^2m^2) = 0,$$

et par suite le paramètre de cette parabole est

$$p = \frac{b^2 - c^2m^2}{a(1+m^2)}.$$

Selon que p est positif ou négatif, la concavité de la parabole est tournée du côté des x' positifs ou négatifs.

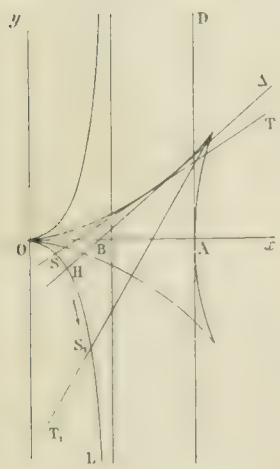
La dérivée de p par rapport à m est

$$\frac{dp}{dm} = \frac{m(c^2m^2 - 2c^2 - 3b^2)}{a(1+m^2)^2};$$

on en déduit aisément le tableau des variations de p :

m	0	croît	$\dfrac{b}{c}$	croît	$\dfrac{\sqrt{2c^2+3b^2}}{c}$	croît	$+\infty$
p	$\dfrac{b^2}{a}$	décroît	0	décroît	$-\dfrac{2c^3}{3a^2\sqrt{3}}$	croît	0

6. Figurons sur le plan des xy l'hypocycloïde enveloppe de l'axe, et la cissoïde lieu du sommet de la focale Φ. Par un point quelconque S de la cissoïde on peut mener une seule tangente réelle ST à l'hypocycloïde. La focale correspondante est bien déterminée. Son sommet est le point S, son axe est la droite ST, son paramètre est donné par la discussion précédente, enfin son plan est perpendiculaire au plan des xy.



Considérons en particulier la tangente Δ à l'hypocycloïde dont le coefficient angulaire est $\dfrac{b}{c}$; son équation est $bx - cy - \dfrac{b^2}{a} = 0$; elle rencontre Ox au point B d'abscisse $\dfrac{b^2}{a}$ et la cissoïde au point H.

Nous allons faire varier le point S sur la branche OL; le coefficient angulaire de ST sera positif et variera de 0 à $+\infty$ quand le point S décrira la branche OL dans le sens de la flèche.

Quand le point S est en O, la focale a pour axe Ox, pour paramètre $\dfrac{b^2}{a}$, et sa concavité est tournée du côté des x positifs. Si le point S se déplace de O à H, le paramètre diminue, et la concavité est tournée vers l'angle yOx. Quand le point S

est au point H, le paramètre est nul, la parabole se réduit à la droite double HΔ. Enfin quand le point S décrit l'arc HL, le sens de la concavité de la parabole change, c'est le sens S_1T_1, et quand le point S s'éloigne indéfiniment, le paramètre a pour limite la valeur 0 et la focale a pour limite la droite double AD.

On a ainsi une idée de la surface engendrée par la focale Φ.

Cherchons la section de cette surface par le plan zOx. Revenons aux équations de cette focale :

$$y - mx + \frac{am^3}{m^2+1} = 0, \qquad am(m^2+1)z^2 - (y+mx)(b^2 - c^2m^2) = 0\,;$$

faisons-y $y = 0$, nous avons

$$m\,am^2 - x(m^2+1) = 0, \qquad m\,a(m^2+1)z^2 - x(b^2 - c^2m^2) = 0,$$

et éliminons m entre ces deux équations. Elles admettent la racine commune $m = 0$, à laquelle correspond la focale dont nous avons déjà parlé et dont le sommet est à l'origine.

Supprimons le facteur m et éliminons m^2 entre les équations qui restent ; nous obtenons sans difficulté l'équation

$$a(x^2 + z^2) - b^2x = 0,$$

qui représente dans le plan zOx le cercle de diamètre OB.

Remarquons en terminant que ce cercle est rencontré par les focales dont les sommets sont situés sur l'arc OH.

Bonnes solutions par MM. Dulimbert à Grenoble et Pierre Sicard.

QUESTIONS PROPOSÉES

1104. — On considère une parabole et un cercle variable passant par le foyer de cette parabole et tangent à la courbe.

1° Trouver le lieu du centre de ce cercle et le lieu du point de rencontre de la tangente commune au point où les deux lignes se touchent avec la droite qui joint leurs deux autres points de rencontre.

2° Trouver le lieu du point de rencontre de cette tangente commune avec la tangente au cercle menée par le foyer.

3° Trouver le lieu du point de concours des deux autres tangentes communes au cercle et à la parabole.

E. H.

***1105.** — Soit O un point fixe et C une courbe quelconque.

1° Les hyperboles équilatères de centre O dont une tangente au sommet touche C, et les lemniscates de Bernoulli de centre O dont un sommet décrit C ont une même enveloppe C'.

2° La courbe qui correspond à C' comme C' correspond à C est la podaire de O par rapport à C.

E. Duporcq.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1069. — *La tangente en un point* M *d'une parabole rencontre la directrice en* T. *Construire les deux cercles qu'on obtient en cherchant le lieu du symétrique de* T *par rapport à* M *et le lieu du symétrique de* M *par rapport à* T.

Prenons pour axes de coordonnées l'axe de la parabole et sa directrice; l'équation de la parabole est

$$y^2 - 2px + p^2 = 0,$$

et celle de la tangente au point $M(x', y')$ est

$$yy' - px - px' + p^2 = 0,$$

avec la condition

$$(2) \qquad y'^2 - 2px' + p^2 = 0.$$

1. *Lieu du symétrique de* T *par rapport à* M. — Le symétrique du point T par rapport au point M a pour abscisse $2x'$, par suite ce point est à l'intersection de la tangente (1) et de la droite

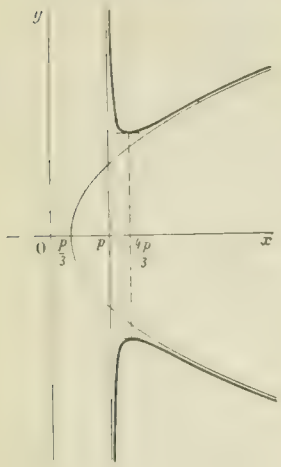
$$(3) \qquad x = 2x'.$$

Nous aurons le lieu demandé en éliminant x' et y' entre les équations (1), (2) et (3). Nous avons d'abord $x' = \frac{x}{2}$, puis, en remplaçant x' par cette valeur dans la relation (1), $y' = \frac{p(3x-2p)}{2y}$, et enfin, en portant ces valeurs dans (2), nous obtenons l'équation

$$4y^2(x-p) - p(3x-2p)^2 = 0,$$

qui est l'équation du lieu.

Cette équation représente une courbe du troisième degré symétrique par rapport à Ox. Pour la construire, résolvons l'équation par rapport à y^2 :



$$y^2 = \frac{p(3x-2p)^2}{4(x-p)}.$$

Pour que y soit réel il faut que $x-p$ soit positif; nous ferons varier x de p à $+\infty$. En prenant la dérivée de y^2 par rapport à x, nous avons

$$(y^2)' = \frac{p(3x-2p)(3x-4p)}{4(x-p)^2}.$$

Quand x croît de p à $\frac{4p}{3}$, y^2 décroît de $+\infty$ à $3p^2$, et quand x croît de $\frac{4p}{3}$ à $+\infty$, y^2 croît de $3p^2$ à $+\infty$.

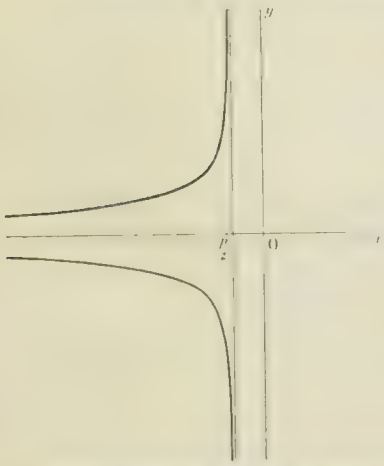
La courbe admet pour asymptote la droite $x = p$ et a des branches paraboliques dans la direction Ox.

D'ailleurs l'équation de la courbe peut aussi s'écrire

$$y^2 = \frac{p}{4}\left[9x - 3p + \frac{p^2}{x-p}\right],$$

ce qui montre que la courbe est asymptote à la parabole $y^2 = \frac{p}{4}(9x-3p)$.

2. *Lieu du symétrique de* M *par rapport à* T. — Le symétrique du point M par rapport au point T a pour abscisse $-x'$; par suite le lieu de ce point s'obtiendra en éliminant x' et y' entre les équations (1), (2) et $x + x' = 0$.



On a ainsi $x' = -x$, $y' = -\frac{p^2}{y}$ et $\frac{p^2}{y^2} + 2px + p^2 = 0$,

ou

$$y^2 = -\frac{p}{2x+p}.$$

Le lieu est une courbe du troisième degré symétrique par rapport à Ox. Pour que y^2 soit réel, il faut que x soit inférieur à $-\frac{p}{2}$, et quand x croît de $-\infty$ à $-\frac{p}{2}$, y^2 croît de 0 à $+\infty$.

On obtient la courbe ci-jointe.

G. FAUVERNIER.

Bonnes solutions par MM. R. Bouvaist ; J. Haag, lycée de Nancy ; M. Laurence ; T. Lemoyne, à Troyes ; J. Marchal ; Soles, à Condom ; P. Thonet, à Gand ; Vial, à Châlons.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1058. - *On demande de déterminer par ses deux projections la courbe d'intersection d'une sphère avec un cône de révolution, les deux surfaces étant définies de la manière suivante :*

1° *Le cône de révolution a pour base le cercle* (C, C') *du plan horizontal et pour sommet le point* (s, s') *de cote donnée.*

2° *La sphère, de rayon* $r = 50^{mm}$, *a pour centre le point* (o, o') *milieu de la génératrice donnée* (sa, s'a') *du cône.*

Dans la mise au net de cette première partie de l'épure qui se fera à l'encre, on supposera les deux corps opaques, et on représentera par un trait pointillé les lignes cachées soit en projection horizontale, soit en projection verticale.

Cela fait, on déterminera en projection horizontale seulement les ombres propres et portées soit des deux corps entre eux soit des deux corps sur le plan horizontal, en les supposant éclairés par des rayons lumineux parallèles à la direction donnée (Δ, Δ'). — *Les courbes d'ombres propres et celles d'ombres portées se traceront au crayon noir. Le trait sera continu pour les courbes qui sont cachées. Enfin les portions des surfaces qui sont dans l'ombre devront être recouvertes de hachures faites à l'encre bleue.*

Cadre de 27^{cm} *sur* 45^{cm}. *Ligne de terre* XY *parallèle aux petits côtés du cadre à* 200^{mm} *du côté supérieur.*

(*École Centrale, 1re Session, 1901.*)

Le rayon du cercle (C, C') de la base du cône étant indéterminé, nous avons pris une longueur arbitraire 65^{mm}.

Intersection du cône et de la sphère. — Il suffit de déterminer les points d'intersection des génératrices du cône avec la surface de la sphère. Nous avons fait cette construction pour obtenir les points situés sur la génératrice (sa, s'a') ; par une rotation autour de la verticale de (s, s'), cette génératrice est venue de front en $sa_1, s'a'_1$. Le grand cercle de la sphère situé dans le plan vertical *sa* vient suivant le cercle de centre o'_1 qui donne b'_1 et d' d'où par une rotation inverse les deux points (b, b') et (d, d') qui sont les points le plus haut et le plus bas de l'intersection. En ces points, la tangente est horizontale.

On peut aussi employer des plans horizontaux auxiliaires ; c'est ce que nous avons fait pour avoir les points (e, e') et (f, f') sur le contour apparent horizontal de la sphère, à l'aide du parallèle $g'o'_1$ du cône.

Pour les points sur le contour apparent vertical du cône, nous avons coupé par le plan de front de (s, s'). Nous avons ensuite représenté l'ensemble des deux corps ; la visibilité est immédiate.

Ombres propres des deux corps. — La séparatrice, sur le cône, se compose des deux génératrices de contact des plans parallèles à (Δ, Δ') ; ce sont, en projection horizontale, *sh* et sh_1.

Sur la sphère la séparatrice est le grand cercle, dont le plan est perpendiculaire à (Δ, Δ'). Sa projection horizontale est l'ellipse $\alpha\alpha'\beta\beta'$, obtenue en prenant pour plan vertical de projection le plan vertical *sa* où cette séparatrice a pour projection verticale $\alpha'\alpha'_1$, perpendiculaire à Δ'_1.

Ombres portées sur le plan horizontal. — L'ombre portée par le cône est la portion $h\hat{b}h_1ah$ du plan horizontal, comprise entre les traces horizontales des plans tangents le long de SH et de SH_1.

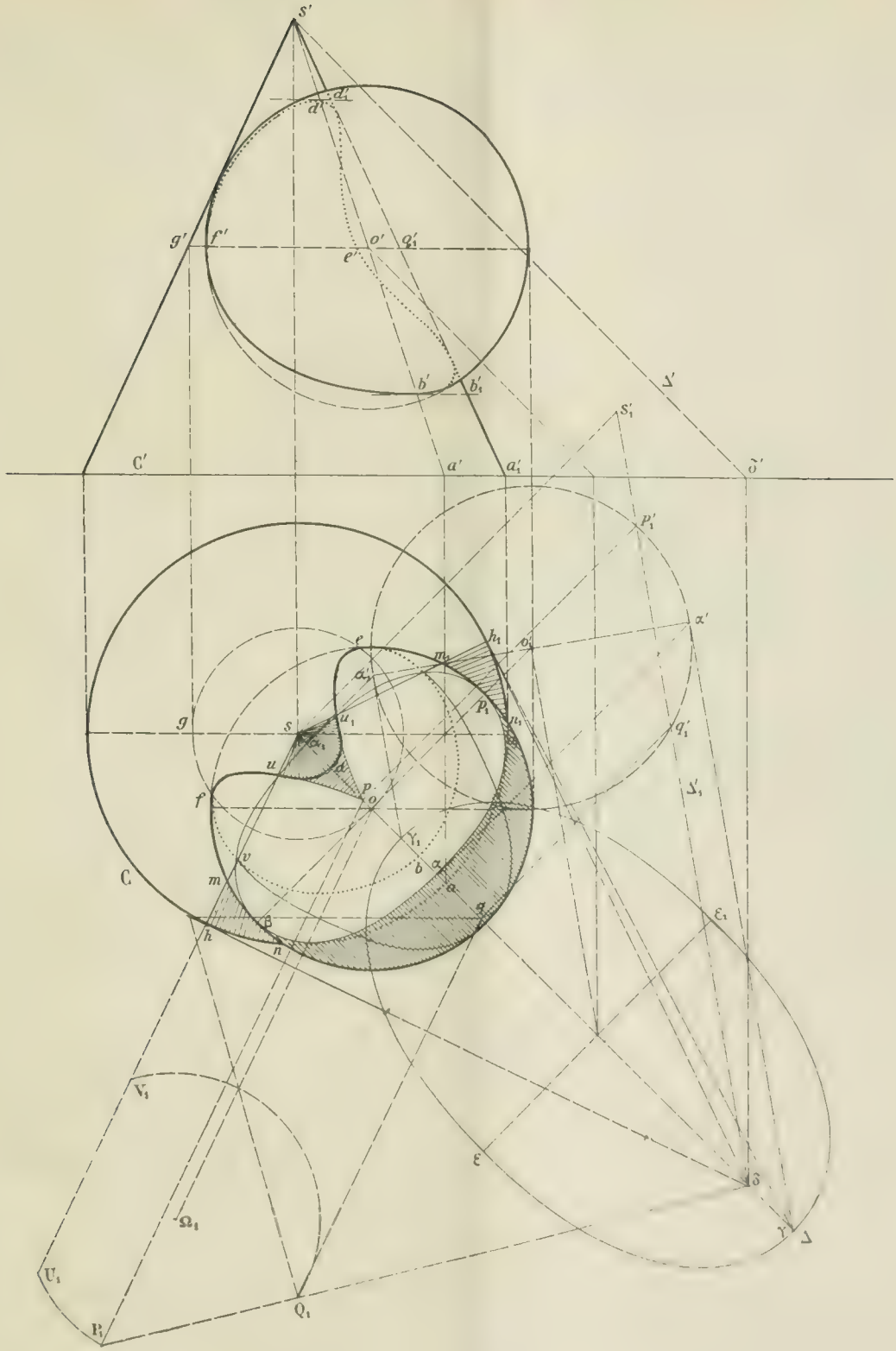
L'ombre portée par la sphère sur le plan horizontal est limitée par l'ellipse $\gamma\gamma'\gamma_1\gamma'_1$, trace horizontale du cylindre circonscrit à la sphère suivant la séparatrice d'ombre et de lumière sur ce corps.

Ombre portée par le cône sur la sphère. — La portion de la sphère comprise entre les plans tangents au cône le long des génératrices séparatrices d'ombre et de lumière, est dans l'ombre. L'intersection de ces plans tangents est $\alpha\alpha_1$, qui coupe la sphère aux deux points projetés horizontalement en *p* et *q* et obtenus en p'_1 et q'_1 sur le plan vertical auxiliaire de projection.

Le plan tangent de trace horizontale $h\hat{b}$ coupe la sphère suivant un petit cercle rabattu en Ω_1 passant par P_1 et Q_1, rabattements de P et Q. Relevant ce cercle, on a la projection des deux arcs utiles *up* et *vq*.

Pour l'autre plan tangent on a la courbe symétrique par rapport à *sa*.

Nous n'avons, selon l'énoncé, pas tenu compte de la visibilité de ces courbes d'ombre.



s'
d'
g'
f'
o'
e'
b'
C'
a'
δ'
s'₁
p'₁
α'
e
h₁
m₁
o'₁
p₁
n₁
g
s
u₁
u
f
p
o
q'₁
C
v
m
b
a
h
n
ε₁
V₁
ε
δ
Ω₁
U₁
P₁
Q₁

Hachures. — Nous avons mis des hachures sur les parties *hmn*, *hmn* et *sudu* du cône où est l'ombre propre visible du cône, puis sur l'ombre propre $\rho\lambda\rho\,mn$ de la sphère, et enfin sur la portion sphérique *udup* où se trouve une ombre portée par le cône sur la sphère.

N. C.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1901)

Géométrie analytique (M. Gouilly).

Géométrie analytique à deux dimensions.

1878. — Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

1879. — Angle de la droite $y = mx + h$, avec l'axe des x, connaissant l'angle θ des axes.

1880. — Construire les coniques

$$y = x + 1 \pm \sqrt{(x-1)(x+2)}, \qquad y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 4x + 5}, \qquad y = x \pm \sqrt{(x-a)(x-b)},$$
$$x^2 + 2xy + 4y^2 + 5x = 0, \qquad xy + x + y = 0.$$

1881. — Construire les courbes

$$y = \frac{x^2}{x^2-1}, \qquad y = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \qquad y = x + \frac{1}{x-1}, \qquad y = x + 1 + \frac{x}{x^2-1}, \qquad y = \frac{x^3}{x^2-1},$$
$$y = x^2 + \frac{1}{x+1}, \qquad y = x^2 + x + \frac{x}{x^2-1}, \qquad y = x^2 + \frac{x^2}{x^2-1}, \qquad y = \sqrt{x^3-1}, \qquad y = \sqrt{x^3-x},$$
$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \qquad y = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \qquad y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}}, \qquad y = x\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-2}}, \qquad y = x \pm \sqrt{x^3-1},$$
$$y = x + 1 \pm \sqrt{x^2-4}, \qquad y = x^2 \pm \sqrt{x^3-1}, \qquad y = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin^2 x}, \qquad y = \sqrt{3\cos x - 1}, \qquad y = \mathrm{L}\sin x,$$
$$y = e^{x^2}, \qquad y^2 = x^3, \qquad y^2 = \frac{x^3}{x^2+1}, \qquad y^2 = \frac{x^3}{x^2-4}, \qquad y^2 = \mathrm{L}x, \qquad y^2 = \log_2 x.$$

1882. — Construire les courbes

$$x^2y + 1 = 0, \qquad y^2x + 1 = 0, \qquad xy^2 = x + y, \qquad x^2 + x^2 + y^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 = y^3, \qquad x(x^2 + y^2) = y^3, \qquad y^2 = x(x^2 + y^2), \qquad xy^2 + xy + x - y = 0.$$

1883. — Trouver les points communs aux courbes

$$y^2(x-1) + \lambda x^2(x-2) = 0;$$

construire la courbe pour $\lambda = 1$.

1884. — Tangente à la courbe $x = \mathrm{R}\sin at$, $y = \mathrm{R}\cos(at + b)$ au point $t = t_0$.

1885. — Construire les courbes

$$\rho = a\cos\omega + b\sin\omega, \qquad \rho = \frac{1}{a\cos\omega + b\sin\omega}, \qquad \rho = p\cos\omega,$$
$$\rho = \frac{p}{\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{1-\omega}, \qquad \rho = \log\omega.$$

1886. — Que représente l'équation $x^2 + 2xy - y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$? Coordonnées du centre.

1887. — Réduction de l'équation $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 1 = 0$.

1888. — Que représente l'équation $(x + y)(x - y) + ax + by + c = 0$?

1889. — Que représente l'équation $AB + \lambda C^2 = 0$, A, B, C étant des polynomes du premier degré en x et y? Peut-on disposer de λ de façon que l'équation représente une parabole?

1890. — On donne un cercle $x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2 = 0$ et un point $\mathrm{P}(a, 0)$. Lieu des points équidistants du cercle et du point.

1891. — Lieu des points à égale distance d'une droite et d'un cercle.

1892. — On donne une parabole $y^2 - 2px = 0$ et une droite $y = mx + h$; équation du faisceau des droites qui joignent les points de rencontre à l'origine. Condition pour que ces deux droites soient rectangulaires.

1893. — Le centre d'un parallélogramme est aussi le centre de toute conique circonscrite.

1894. — On donne une parabole et une corde AB ; équation générale des coniques passant par les points A et B et tangentes à la parabole en son sommet. Etudier leur nature.

1895. — On donne une ellipse rapportée à ses axes et un point M; équation d'un cercle tangent à l'ellipse en ce point.

1896. — On donne l'équation $(y - mx)^2 - am^2x - by = 0$; quel est l'angle des deux paraboles qui passent par un point donné du plan ?

1897. — On donne un cercle, un diamètre fixe AB, une corde parallèle variable CD ; lieu des sommets des hyperboles équilatères qui passent par les quatre points A, B, C, D.

1898. — Mener d'un point (α, β) les normales à la parabole $y^2 - 2px = 0$. Former l'équation du cercle qui passe par les pieds des normales.

1899. — Équation générale des coniques inscrites dans un parallélogramme.

1900. — Équation générale des coniques passant par les points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ et des deux droites $x = a$, $y = b$. Lieu des centres de ces coniques.

1901. — On donne un cercle, un diamètre AB et une droite CD. — Equation générale des coniques passant par les quatre points A, B, C, D. — Démontrer que la polaire d'un point du plan par rapport à toutes ces coniques passe par un point fixe.

1902. — Équation générale des coniques circonscrites à un triangle rectangle OAB et pour lesquelles la polaire du point (a, b) est parallèle à la droite AB.

1903. — Que représente l'équation $x^2 + y^2 = l(x + a)^2$? — Équation de la polaire d'un point (α, β). — Montrer que si l varie, cette polaire passe par un point fixe.

1904. — Équation d'une hyperbole équilatère passant par deux points et ayant une directrice donnée.

1905. — Lieu des foyers des coniques ayant une directrice et deux points en commun.

1906. — Cordes communes aux deux coniques $x^2 + y^2 = y$, $x^2 + y^2 = x$.

1907. — Chercher les sécantes communes aux coniques $y^2 - 2px + \lambda x(y - 1) = 0$. Pourquoi l'équation en λ est-elle réduite au second degré dans ce cas et pourquoi les deux racines finies sont-elles égales ?

1908. — Les coniques qui ont un foyer commun ont des sécantes communes qui concourent avec les directrices correspondantes.

1909. — Les sécantes communes à un cercle et à une conique sont également inclinées sur les axes de la conique.

1910. — Construire une conique connaissant les axes en position et une tangente avec son point de contact.

1911. — Construire une conique, connaissant le centre, la direction de deux diamètres conjugués, une tangente et son point de contact.

1912. — Construire une hyperbole équilatère connaissant une asymptote, un point et la tangente en ce point.

1913. — Construire une parabole connaissant la directrice et deux points.

1914 — Construire une parabole connaissant le foyer, une tangente et le point de contact.

Géométrie analytique à trois dimensions.

1915. — Par la droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, mener un plan parallèle à la droite $\frac{x - x_0}{a'} = \frac{y - y_0}{b'} = \frac{z - z_0}{c'}$.

1916. — Mener par un point une droite perpendiculaire aux deux directions $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$, $\frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{\beta'} = \frac{z}{\gamma'}$.

1917. — Mener un plan perpendiculaire à la droite

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

1918. — Perpendiculaire commune aux deux droites

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \qquad \frac{x - x_0}{a'} = \frac{y - y_0}{b'} = \frac{z - z_0}{c'}.$$

1919. — Longueur de la tangente menée d'un point (a, b, c) à une sphère.

1920. — Equation d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une direction α, β, γ, et qui a pour directrice le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$. Même question en prenant pour directrice l'ellipse $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

1921. — Équation d'un cône de sommet (x_0, y_0, z_0) circonscrit à la quadrique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

1922. — Cône circonscrit à la sphère $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ le long de sa section par le plan $mx+ny+pz+q=0$.

1923. — Que représentent les équations

$f\left(\frac{y-1}{x-2}, \frac{x-2}{z+1}\right)=0$, $(x^2+y^2-R^2)^2+z^2=0$, $y=\sin(x^2+z^2)$,

$x^2-\sqrt{y^2+z^2}=0$, $y-\sqrt{x^2+z^2}=0$, $(x^2+y^2-R^2)^2-z^2=0$,

$(y^2+z^2)x+1=0$, $y^2-\sqrt{x^2+z^2}+1=0$, $y=\sqrt{x^2+z^2}+1$,

$(x^2+y^2)^2-z^2=0$, $(x^2+y^2)^2+z=0$, $(x^2+y^2)z+1=0$,

$y=x^{-1/2}$, $x^2+y^2+z^2-2a\sqrt{x^2+z^2}+a^2=0$, $(x^2+z^2)^3-(z+1)=0$?

1924. — Que représentent les équations

$xy+yz+zx=0$, $ax^2+by^2+z=0$, $xy=z$, $zx+yx+z^2+y=0$,

$(x+y)(y+1)+z^2=0$, $(x+z+1)^2+x+y+z=0$, $(x+1)(y-1)-z=0$, $zy+x+1=0$,

$x^2+y^2-zx-1=0$, $x^2-2xy+2y-z^2=0$, $x^2+y+z=0$, $(x+y)(x-y)+z+1=0$,

$x^2+2xy+3z^2+4zx+6=0$, $x^2+(z-1)(y-2)=0$, $xy=z^2$, $z^2+x+y+1=0$,

$(x+1)(y+1)=z$, $x^2+xy-zy+y=0$, $xy+yz+zx+1=0$, $(ax+by+cz+d)^2$
$+(a'x+b'y+c'z+d')^2=0$?

1925. — Que représentent les équations

$y=x+1\pm\sqrt{f(x,z)}$, $f(x,z)$ étant un polynome du second degré en x et z?

$y=x+1\pm\sqrt{(z-2)(x-3)}$, $x=y+1\pm\sqrt{(y-z)(y+z+1)}$, $y=z\pm\sqrt{xz+1}$,

$y=x+z+1\pm\sqrt{xz+1}$, $y=x+1\pm\sqrt{z^2+1}$, $y=x+1\pm\sqrt{(x+z)^2+1}$?

1926. — Cône asymptote de la surface $2x^2-y^2+yz+x=0$.

1927. — Les sections faites par un même plan dans une quadrique et son cône asymptote sont homothétiques.

1928. — Sections planes de la surface $x^2-3y^2-z=0$. — Trouver les génératrices rectilignes ; montrer que deux génératrices de même système ne peuvent être dans un même plan et que deux génératrices de systèmes différents sont toujours dans un même plan.

1929. — Que représente l'équation $(x+1)^3-(y-x+z)^2+z^2=0$? Trouver le sommet et une génératrice rectiligne.

1930. — Y a-t-il des génératrices rectilignes sur la surface $x^2+3y^2+x-z=0$?

1931. — Génératrices rectilignes des surfaces $y^2-x^2-z=0$, $xy+z+zx+5=0$.

1932. — Lieu de l'intersection des plans $ax+by+\lambda z+d=0$, $\lambda x+b'y+c'z+d'=0$ quand λ varie.

1933. — Mener une quadrique circonscrite à une sphère suivant un cercle situé dans un plan donné.

1934. — Equation générale des quadriques tangentes au plan des yz en tous les points de Oy.

1935. — Equation générale des quadriques admettant la section $z=0$, $x^2+y^2-R^2=0$.

QUESTIONS PROPOSÉES

1106. — Le premier membre d'une équation réciproque de forme normale peut toujours se mettre d'une infinité de façons sous la forme

$$f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dans le cas d'une équation du quatrième degré, déterminer $f(x)$ de façon que deux de ses racines aient pour produit 1 et les deux autres pour somme 1. Il y a deux façons d'arriver à ce résultat. Le montrer ; faire voir, en outre, que la résolution de l'équation proposée peut se déduire de là.

E. H.

1107. — On considère une parabole fixe (P) et un cercle (C) que conque. Former l'équation de la courbe polaire réciproque du cercle par rapport à la parabole et trouver quel doit être le rayon du cercle (C) pour que cette conique soit une hyperbole équilatère..

Trouver le centre de cette hyperbole.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PAR LE DUC, IMP. COMTE-JACQUET

12e Année. N° 8 Mai 1902.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

REFLEXION ET RÉFRACTION D'UN PINCEAU LUMINEUX PAR UNE SURFACE SPHÉRIQUE

Note de M. **Ch. Rivière**.

1° Réflexion.

Je considère (*fig.* 1) un pinceau lumineux conique de faible ouverture α, issu d'un point A et rencontrant une surface sphérique réfléchissante. Prenons pour plan de la figure le plan qui contient l'axe AS du pinceau et le centre C de la surface. Soient, dans ce plan, AI et AK les rayons limites du pinceau, IA′ et KA′ les rayons réfléchis; le rayon réfléchi en S passe aussi par le point A′, à une quantité d'ordre supérieur près, et il rencontre, d'autre part, la droite AC en un point A″.

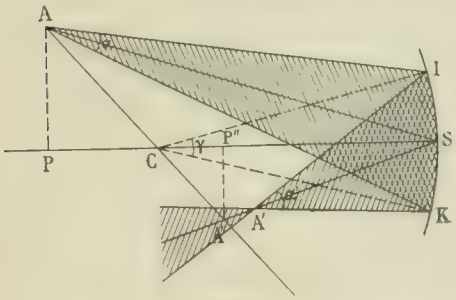


Fig. 1

Si, pour prendre tous les rayons du pinceau incident, nous faisons tourner la figure autour de AC, le point A′ engendre un petit arc de cercle qu'on peut confondre sensiblement avec une petite droite normale au plan d'incidence moyen. Les rayons réfléchis s'appuient en outre sur une autre petite droite, celle-ci rigoureusement définie, située en A″ le long de l'axe secondaire AC.

Calculons les distances de ces deux petites droites au point S.

Soient σ la distance SA, σ' la distance SA′, σ'' la distance SA″, r le rayon de courbure SC, α' l'angle IA′K, γ l'angle ICK, i l'angle moyen d'incidence.

Calcul de σ'. — Passer du rayon AI au rayon AK revient à faire tourner le rayon incident de l'angle α et la surface réfléchissante, dans le même sens, de l'angle γ; on en conclut que le rayon réfléchi tourne de l'angle $2\gamma - \alpha$; donc

$$\alpha' = 2\gamma - \alpha \qquad \text{ou} \qquad \alpha + \alpha' = 2\gamma.$$

D'autre part, les triangles AIK, A′IK, CIK donnent respectivement

$$\frac{\alpha}{IK} = \frac{\cos i}{\sigma}, \qquad \frac{\alpha'}{IK} = \frac{\cos i}{\sigma'}, \qquad \frac{\gamma}{IK} = \frac{1}{r}.$$

Portons α, α' et γ, tirés de là, dans la première équation; il vient

$$(1) \qquad \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = \frac{2}{r\cos i}.$$

Calcul de σ''. — Projetons A et A″ en P et P″ sur CS. On a d'abord

$$\frac{P''C}{CP} = \frac{A''C}{CA}.$$

Puis, SC étant bissectrice de l'angle ASA″, on a

$$\frac{A''C}{CA} = \frac{SA''}{SA}.$$

Donc $\frac{P''C}{CP} = \frac{SA''}{SA}$, c'est-à-dire $\frac{r - \sigma'' \cos i}{\sigma \cos i - r} = \frac{\sigma''}{\sigma}$.

ou bien

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma''} = \frac{2 \cos i}{r}. \tag{2}$$

Points conjugués. — Ceci posé, A′ et A″ sont confondus, au moins à une quantité d'ordre supérieur près, et les deux petites droites se réduisent à un point véritablement *conjugué* du point A si l'on a $\sigma = \sigma''$, c'est-à-dire $\frac{2}{r \cos i} = \frac{2 \cos i}{r}$, ce qui exige la condition $\cos i = 1$; l'angle d'incidence moyen doit être nul ou petit : les rayons incidents doivent être *quasi-normaux*. Dans ce cas, on peut confondre σ d'une part, σ'' d'autre part avec leurs projections P et P′ sur SC, et on a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{r}.$$

2° Réfraction.

Je considère maintenant (*fig.* 2) les rayons réfractés IR, ST, KV. Leurs directions se rencontrent sensiblement au point A′, virtuel dans le cas de la figure, et elles rencontrent la droite CA sur une petite étendue en A″.

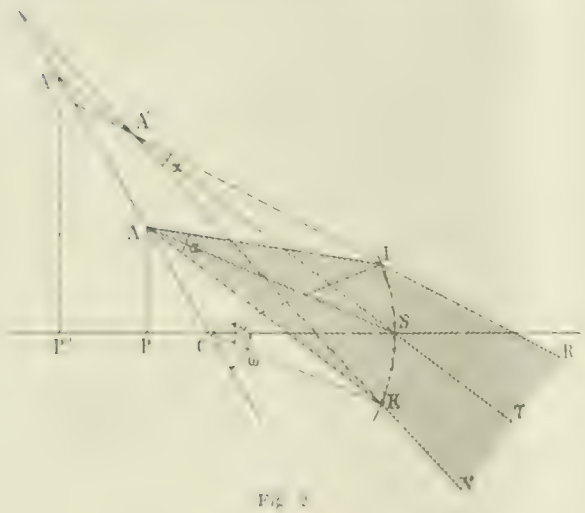


Fig. 2

On voit, comme dans le cas de la réflexion, que tout le pinceau réfracté s'appuie sur deux petites droites, l'une normale au plan d'incidence moyen en A′ et l'autre située en A″ sur l'axe secondaire AC.

Soient ρ la distance SA, ρ' la distance SA′, ρ'' la distance SA″, α' l'angle IAK, i et i' les angles moyens d'incidence et de réfraction, Δi et $\Delta i'$ leurs variations quand on passe du point I au point K.

Calcul de ρ''. — Passer du rayon AI au rayon AK, c'est faire tourner le rayon incident de l'angle α et la normale, dans le même sens, de l'angle γ ; donc

$$\Delta i = \alpha - \gamma ;$$

le rayon réfracté tourne aussi, dans le même sens, de α' ; donc

$$\Delta i' = \alpha' - \gamma.$$

Prenons le rapport

$$\frac{\Delta i}{\Delta i'} = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha' - \gamma}.$$

D'après la loi de Descartes, on a, n désignant l'indice de réfraction,

$$\frac{\Delta i}{\Delta i'} = \frac{n \cos i}{\cos i'}.$$

D'autre part, les triangles AIK, A′IK, CIK donnent respectivement

$$\frac{\alpha}{IK} = \frac{\cos i}{\rho}, \qquad \frac{\alpha'}{IK} = \frac{\cos i'}{\rho'}, \qquad \frac{\gamma}{IK} = \frac{1}{r}.$$

Remplaçons $\frac{\Delta i}{\Delta i'}$, α, α' et γ par leurs valeurs ; il vient

$$(3) \qquad \frac{\cos^2 i}{\rho} - \frac{n\cos^2 i'}{\rho'} = \frac{\cos i - n\cos i'}{r}.$$

Calcul de ρ''. — Projetons A et A″ en P et P″ sur CS. On a d'abord

$$\frac{CP''}{CP} = \frac{CA'}{CA}.$$

Puis les triangles CSA et CSA″ donnent respectivement, si on désigne par ω leur angle commun en C,

$$\frac{CA}{\sin i} = \frac{SA}{\sin\omega} \qquad \text{et} \qquad \frac{CA''}{\sin i'} = \frac{SA}{\sin\omega}.$$

Donc $$\frac{CP''}{CP} = \frac{\sin i'}{\sin i}\,\frac{SA''}{SA}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{\rho\cos i - r}{\rho\cos i - r} = \frac{1}{n}\,\frac{\rho}{\rho},$$

ou bien

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho} - \frac{n}{\rho} = \frac{\cos i - n\cos i'}{r}.$$

Si, dans les équations (3) et (4), on faisait $n = -1$, on retrouverait, comme cela doit être *a priori*, les équations (1) et (2).

Points conjugués. — Ceci posé, A′ et A″ sont confondus, au moins à une quantité d'ordre supérieur près, en un point véritablement *conjugué* du point A si l'on a $\rho' = \rho$. Or la combinaison de (3) et (4) donne d'abord

$$\frac{\cos^2 i}{\rho} - \frac{n\cos^2 i'}{\rho'} = \frac{1}{\rho} - \frac{n}{\rho''}.$$

Faisons $\rho'' = \rho'$, il vient

$$\frac{1}{\rho}(1 - \cos^2 i) = \frac{n}{\rho}(1 - \cos^2 i'), \qquad \text{ou} \qquad \rho = \frac{1}{n}\rho.$$

Portons cette valeur dans l'équation (3), il vient

$$\frac{\cos^2 i - n^2\cos^2 i'}{\rho} = \frac{\cos i - n\cos i'}{r} \qquad \text{ou} \qquad \rho = r\,\frac{\cos i + n\cos i'}{\cos i - n\cos i'}.$$

C'est le point aplanétique connu et si, à l'aide du triangle CAS, on calcule CA en fonction de ρ, r et i, on trouve aisément

$$CA = nr.$$

En outre, quel que soit ρ, les équations (3) et (4) sont identiques si les angles i et i' sont petits et, par conséquent, les rayons incidents *quasi-normaux*. Alors, en confondant ρ et ρ' avec leurs projections P et P′ sur SC, on a

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{p'} = \frac{1-n}{r}.$$

On peut donner une forme plus symétrique à cette équation, de même qu'aux équations (3) et (4), en mettant en évidence les indices absolus n_1 et n_2 des deux milieux et remplaçant les notations p et p' par p_1 et p_2 :

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{r}.$$

Dans cette théorie, on a adopté la méthode qu'on suit d'habitude pour rechercher ce qu'on appelle le foyer du prisme ; c'est une marche logique et qui ne s'appuie sur aucune idée préconçue. Dans un cours d'optique, on pourrait la faire précéder de considérations générales sur les surfaces caustiques ; ou bien, au contraire, après avoir, par ces divers exemples auxquels il conviendrait d'ajouter la réfraction par une surface plane, montré l'existence des deux droites de Sturm et de foyers proprement dits, on pourrait généraliser ces résultats et les étendre à des surfaces quelconques.

Remarquons à cette occasion que le nom de lignes focales, souvent donné aux lignes de Sturm, est en désaccord avec le sens attribué autrefois à la même expression ; une véritable ligne focale est l'intersection des deux nappes de la surface caustique.

NOTE SUR LES INVARIANTS PONCTUELS ET TANGENTIELS

(*Fin*) (*)

par **J. Sire**, à Belverne.

XXV. — *Expression de l'aire du triangle ayant pour sommets les pôles des six droites* D_p, D_q, D_r *situées dans le plan représenté par l'équation*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

par rapport à une conique située dans ce plan (**).

Je désignerai par P_p, P_q, P_r les pôles des droites D_p, D_q, D_r par rapport à la conique considérée.

Si $\alpha_p, \alpha_q, \alpha_r$; $\beta_p, \beta_q, \beta_r$; $\gamma_p, \gamma_q, \gamma_r$ sont les projections des points P_p, P_q, P_r sur chacun des plans de coordonnées, on a

$$(P_pP_qP_r)^2 = (\alpha_p\alpha_q\alpha_r)^2 + (\beta_p\beta_q\beta_r)^2 + (\gamma_p\gamma_q\gamma_r)^2.$$

Ceci posé, je peux considérer les droites D_p, D_q, D_r comme étant définies par les intersections de chacun des plans représentés par les équations

$$A_px + B_py + C_pz + D_p = 0, \tag{2}$$

$$A_qx + B_qy + C_qz + D_q = 0, \tag{3}$$

$$A_rx + B_ry + C_rz + D_r = 0, \tag{4}$$

avec le plan (1).

Leurs projections sur le plan des xy auront respectivement pour équations :

$$(C_pA - A_pC)x - (B_pC - C_pB)y + C_pD - D_pC = 0,$$

$$(C_qA - A_qC)x - (B_qC - C_qB)y + C_qD - D_qC = 0,$$

$$(C_rA - A_rC)x - (B_rC - C_rB)y + C_rD - D_rC = 0.$$

Par suite si nous désignons par Δ le discriminant de la conique projection de la conique considérée sur le plan des xy, on aura (d'après VII)

$$(\alpha_p\alpha_q\alpha_r)^2 = \Delta^2 \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_p & B_p & C_p & D_p \\ A_q & B_q & C_q & D_q \\ A_r & B_r & C_r & D_r \end{vmatrix} = \Delta^2 H,$$

H désignant la valeur du déterminant.

De même

$$(\beta_p\beta_q\beta_r)^2 = \Delta'^2 H, \qquad (\gamma_p\gamma_q\gamma_r)^2 = \Delta''^2 H.$$

Δ' et Δ'' désignant les discriminants des projections de la conique sur les plans des yz et des zx, de sorte que

$$(P_pP_qP_r)^2 = H^2(\Delta^4 + \Delta'^4 + \Delta''^4) \quad \text{et} \quad (P_pP_qP_r) = H\sqrt{\Delta^4 + \Delta'^4 + \Delta''^4}.$$

(*) Voir les numéros de Mars et Avril 1902 de la *Revue*.

(**) Cette démonstration repose sur ce principe facile à vérifier :

Étant données une droite D *et une conique* C *situées dans un plan* P, *si* D′ *et* C′ *sont leurs projections sur un plan* Q, *le pôle de* D *par rapport à* C *est la projection sur le plan* P *du pôle de* D′ *par rapport à* C′.

XXVI. — *Expression de l'invariant tangentiel des six droites déterminées par les intersections des plans représentés par les équations*

$$(1)\qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$(2)\qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(6)\qquad A_6x + B_6y + C_6z + D_6 = 0,$$

avec le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

On trouve en appliquant le résultat du problème précédent que cet invariant est égal à

$$\frac{\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 \end{vmatrix}}.$$

XXVII. — *Si on coupe un faisceau de six plans passant par un point fixe par un plan quelconque, l'invariant tangentiel des droites d'intersection est indépendant de la position du plan sécant.*

Soient

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0,$$
$$A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_6(x - x_0) + B_6(y - y_0) + C_6(z - z_0) = 0,$$

les équations de six plans passant par un point fixe, et

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation d'un autre plan quelconque.

Sachant que

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_p & B_p & C_p & -(A_px_0 + B_py_0 + C_pz_0) \\ A_q & C_q & C_q & -(A_qx_0 + B_qy_0 + C_qz_0) \\ A_r & B_r & C_r & -(A_rx_0 + B_ry_0 + C_rz_0) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_p & B_p & C_p \\ A_q & B_q & C_q \\ A_r & B_r & C_r \end{vmatrix} (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D),$$

on en conclut que l'invariant tangentiel des droites d'intersection est égal à

$$\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_5 & B_5 & C_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_6 & B_6 & C_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \\ A_6 & B_6 & C_6 \end{vmatrix}}$$

Démonstration géométrique. — Soient $P_1, P_2, \ldots, P_p, P_6$, six plans passant par un point fixe, soient Δ_1 et Δ_2 les droites d'intersection de (P_1, P_2), (P_3, P_4) ; par ces deux droites faisons passer un plan qui coupe les plans

P_1 et P_2 suivant les droites Δ_5 et Δ_6, et soient également $D_1, D_2, \ldots, D_5, D_6$ les droites d'intersection du plan sécant avec les six plans donnés; si a_1, a_2 et O sont les points de rencontre respectifs des droites D_1 et D_2, D_3 et D_4, D_5 et D_6, nous savons que l'on a

$$\frac{(D_1D_2D_3)}{(D_4D_5D_6)} : \frac{(D_1D_2D_5)}{(D_3D_4D_6)} = (Oa_1a_2D_5D_6).$$

Mais d'autre part

$$(Oa_1a_2D_5D_6) = (O\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4),$$

O désignant le point de concours des plans ; donc ;

$$\frac{(D_1D_2D_3)}{(D_4D_5D_6)} : \frac{(D_1D_2D_6)}{(D_3D_4D_5)} = (O\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4).$$

C. Q. F. D.

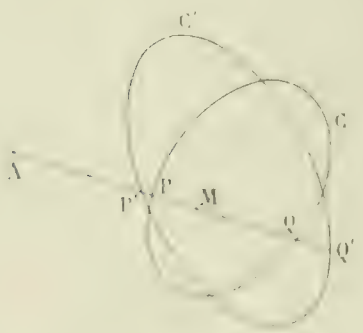
On démontrerait de la même façon qu'en géométrie plane que

XXVIII. — *L'invariant tangentiel des six plans polaires d'un point par rapport à six quadriques d'un réseau ponctuel est indépendant de la position du point. (Invariant tangentiel des six quadriques du réseau.)*

XXIX. — *L'invariant ponctuel des six pôles d'un plan par rapport à six quadriques d'un réseau tangentiel est indépendant de la position du plan. (Invariant ponctuel des six quadriques du réseau.)*

Polaire d'un point par rapport à une biquadratique. — Je dirai que deux points A et M sont conjugués harmoniques par rapport à une biquadratique, lorsqu'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection de la biquadratique et d'un plan quelconque passant par A et M.

XXX. — *Le lieu du conjugué harmonique d'un point par rapport à une biquadratique est une droite.*



Considérons une biquadratique déterminée par les deux quadriques Q et Q' et un point A de l'espace. Par A faisons passer un plan quelconque P. Ce plan coupe chacune des quadriques Q et Q' suivant des coniques C et C' et soit M le conjugué harmonique de A.

Tracons la droite AM et désignons par P, Q, P', Q' ses points de rencontre respectifs avec c et c'

Les deux divisions (AMPQ), (AMP'Q') étant harmoniques, le point M se trouve sur chacun des plans polaires de A par rapport à Q et Q' ; il se trouve donc à leur intersection.

Par suite le lieu du conjugué harmonique du point A est la droite d'intersection des plans polaires de A par rapport à Q et à Q'.

Ce lieu est un plan si A coïncide avec un des sommets du tétraèdre conjugué aux deux quadriques Q et Q'.

Si la biquadratique est définie par les deux équations

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad g(x, y, z, t) = 0,$$

la polaire du point $A(x_0, y_0, z_0, t_0)$ aura pour équations

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + tf'_t = 0,$$
$$xg'_x + yg'_y + zg'_z + tg'_t = 0.$$

XXXI. — *Si un point décrit une droite, sa polaire décrit une quadrique.*

Si la biquadratique et la droite sont définies respectivement par les équations

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad g(x, y, z, t) = 0,$$
$$ax + by + cz + dt = 0 \qquad a'x + b'y + c'z + d't = 0,$$

l'équation du lieu s'obtiendra en éliminant x_0, y_0, z_0, t_0 entre les équations

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 + rt_0 = 0, \qquad u'x_0 + v'y_0 + w'z_0 + r't_0 = 0,$$

$$f'_x . x_0 + f'_y . y_0 + f'_z . z_0 + f'_t . t_0 = 0, \qquad g'_x . x_0 + g'_y . y_0 + g'_z . z_0 + g'_t . t_0 = 0,$$

x_0, y_0, z_0, t_0 étant les coordonnées d'un point quelconque de la droite, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} u & v & w & r \\ u' & v' & w' & r' \\ f'_x & f'_y & f'_z & f'_t \\ g'_x & g'_y & g'_z & g'_t \end{vmatrix} = 0,$$

d'où $$a[f'_x g'_t - f'_t g'_x] + b[f'_y g'_t - f'_t g'_y] + c[f'_z g'_t - f'_t g'_z] + \alpha[f'_y g'_z - g'_y f'_z] + \cdots = 0,$$

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ désignant les coordonnées pluckériennes de la droite.

XXXII. — *A toutes les droites passant par un point fixe correspondent par rapport à une biquadratique toutes les quadriques réglées d'un réseau ponctuel et l'invariant tangentiel de six quadriques est égal à l'invariant ponctuel de leurs six droites correspondantes.*

Prenons pour origine des coordonnées le point de rencontre des droites et soient

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

les équations d'une droite ; la quadrique conjuguée aura pour équation

$$a[f'_x g'_t - f'_t g'_x] + b[f'_y g'_t - f'_t g'_y] + c[f'_z g'_t - f'_t g'_z] = 0.$$

Si on fait varier a, b, c, on obtiendra d'une part toutes les droites passant par l'origine et d'autre part toutes les quadriques réglées d'un réseau.

La deuxième partie est évidente.

XXXIII. — *A toutes les droites situées dans un plan correspondent par rapport à une même biquadratique toutes les quadriques (réglées) d'un réseau et l'invariant tangentiel des six droites est égal à celui des six quadriques correspondantes.*

XXXIV. — *A toutes les droites situées dans un plan et passant par un même point correspondent par rapport à une biquadratique toutes les quadriques réglées d'un faisceau et le rapport anharmonique de quatre droites est égal au rapport anharmonique des quatre quadriques correspondantes.*

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1901).

Mathématiques (Paris et Départements).

1027. — *Étant donnés un ellipsoïde* E *et une sphère* S *concentrique à cet ellipsoïde, on prend le plan polaire* P *d'un point quelconque* M *par rapport à l'ellipsoïde* E, *puis le pôle* p *du plan* P *par rapport à la sphère* S.

Soit D *la droite qui joint le point* M *au point* p.

1° *On demande le lieu* C *que doit décrire le point* M *pour que les droites* D *passent par un même point donné.*

Trouver l'équation du cône décrit par les droites D.

2° *Trouver le lieu que doit décrire* M *pour que les droites* D *soient situées dans un plan donné* H, *et l'enveloppe des droites* D *dans ce plan.*

3° *Trouver la surface engendrée par les droites* D *quand le point* M *décrit une droite donnée quelconque.*

4° *On assujettit les droites* D *à rencontrer une droite donnée* Δ *et à rester parallèles à un plan donné* Π; *trouver le degré de la surface* Σ *engendrée par ces droites* D.

Chercher les conditions dans lesquelles la surface Σ *se décompose.*

Soient
$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
$$S = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$
les équations de l'ellipsoïde rapporté à ses axes et de la sphère concentrique. Désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M et par x_1, y_1, z_1 celles du point p; nous avons à prendre le plan polaire du premier point par rapport à l'ellipsoïde, le plan polaire du second par rapport à la sphère et à écrire que ces deux plans coïncident.

Nous trouvons ainsi
$$\frac{x_0}{a^2 x_1} = \frac{y_0}{b^2 y_1} = \frac{z_0}{c^2 z_1} = \frac{1}{R^2},$$
puis
$$x_1 = \frac{R^2 x_0}{a^2}, \qquad y_1 = \frac{R^2 y_0}{b^2}, \qquad z_1 = \frac{R^2 z_0}{c^2};$$
dès lors les équations de la droite (D) qui joint ces deux points sont
$$(D) \qquad \frac{x - x_0}{\dfrac{(R^2 - a^2)x_0}{a^2}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{(R^2 - b^2)y_0}{b^2}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{(R^2 - c^2)z_0}{c^2}}.$$

Ce sont les équations de la normale au point x_0, y_0, z_0 à celle des surfaces de la famille
$$\frac{(R^2 - a^2)x^2}{a^2} + \frac{(R^2 - b^2)y^2}{b^2} + \frac{(R^2 - c^2)z^2}{c^2} - \mu = 0,$$
qui passe en ce point. Toutes ces surfaces sont homothétiques et concentriques au cône qui, de l'origine, projette la courbe d'intersection de la sphère et de l'ellipsoïde. Par conséquent les droites (D) forment un complexe du second ordre qui est connu sous le nom de *complexe des axes* des surfaces de la famille que nous venons de signaler.

4. Si on écrit que la droite (D) passe par un point fixe (x', y', z'), on obtient les relations
$$\frac{x' - x_0}{\dfrac{(R^2 - a^2)x_0}{a^2}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{(R^2 - b^2)y_0}{b^2}} = \frac{z' - z_0}{\dfrac{(R^2 - c^2)z_0}{c^2}},$$
qui donnent le lieu du point M. En appelant λ la valeur commune des trois rapports, on obtient de suite
$$(1) \qquad x_0 = \frac{a^2 x'}{a^2 + \lambda(R^2 - a^2)}, \qquad y_0 = \frac{b^2 y'}{b^2 + \lambda(R^2 - b^2)}, \qquad z_0 = \frac{c^2 z'}{c^2 + \lambda(R^2 - c^2)};$$
ces équations définissent une cubique gauche, la cubique aux pieds des normales abaissées du point (x', y', z') sur toutes les quadriques de la famille.

Pour avoir le cône engendré par les droites (D), nous tirerons des équations de cette droite
$$a^2 x = a^2 x' + \lambda'(R^2 - a^2)x_0, \qquad b^2 y = b^2 y' + \lambda'(R^2 - b^2)y_0, \qquad c^2 z = c^2 z' + \lambda'(R^2 - c^2)z_0,$$
nous y remplacerons x_0, y_0, z_0 par les valeurs fournies par les équations (1) et nous éliminerons λ' et λ entre les équations ainsi obtenues; cette élimination est linéaire et conduit au déterminant
$$\begin{vmatrix} a^2 x - x' & R^2 - a^2 & (R^2 - a^2)x' \\ b^2 y - y' & R^2 - b^2 & R^2 - b^2 y' \\ c^2 z - z' & (R^2 - c^2) & (R^2 - c^2)z \end{vmatrix} = 0.$$

qui se simplifie et s'écrit finalement

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a}{R^2-a^2} & 1 & \dfrac{x'}{x-x'} \\ \dfrac{b^2}{R^2-b^2} & 1 & \dfrac{y'}{y-y'} \\ \dfrac{c^2}{R^2-c^2} & 1 & \dfrac{z'}{z-z'} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation, une fois développée, est

$$(2) \qquad \frac{(b^2-c^2)(R^2-a^2)x'}{x-x'} + \frac{(c^2-a^2)(R^2-b^2)y'}{y-y'} + \frac{(a^2-b^2)(R^2-c^2)z'}{z-z'} = 0;$$

elle représente un cône du second ordre contenant les trois parallèles aux axes menées par le point (x', y', z') ainsi que la droite qui joint ce point à l'origine des coordonnées.

2. Pour que la droite (D) soit située dans un plan $\Pi \equiv u_0x + v_0y + w_0z + r_0 = 0$, il faut que les deux relations suivantes soient vérifiées :

$$(3) \qquad u_0x_0 + v_0y_0 + w_0z_0 + r_0 = 0, \qquad \frac{(R^2-a^2)u_0x_0}{a^2} + \frac{(R^2-b^2)v_0y_0}{b^2} + \frac{(R^2-c^2)w_0z_0}{c^2} = 0;$$

le point M décrit donc la droite représentée par ces deux équations. Nous aurons l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite (D), en écrivant qu'elle est dans le plan courant $ux + vy + wz + r = 0$ et en éliminant x_0, y_0, z_0 entre toutes ces relations ; nous trouvons ainsi le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & v & w & r \\ \dfrac{(R^2-a^2)u}{a^2} & \dfrac{(R^2-b^2)v}{b^2} & \dfrac{(R^2-c^2)w}{c^2} & 0 \\ u_0 & v_0 & w_0 & r_0 \\ \dfrac{(R^2-a^2)u_0}{a^2} & \dfrac{(R^2-b^2)v_0}{b^2} & \dfrac{(R^2-c^2)w_0}{c^2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Cette équation est l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites (D) qui sont situées dans le plan Π ; elle représente donc une conique. Si nous voulons l'équation tangentielle principale du cône qui de l'origine projette cette conique, nous ferons $r = 0$ dans l'équation précédente et nous aurons le déterminant du troisième ordre :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a^2u}{R^2-a^2} & \dfrac{b^2v}{R^2-b^2} & \dfrac{c^2w}{R^2-c^2} \\ u & v & w \\ u_0 & v_0 & w_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sous cette forme, on voit de suite que ce cône est tangent aux trois plans de coordonnées et au plan mené par l'origine parallèlement au plan Π ; la conique du complexe est donc une parabole tangente aux trois plans de coordonnées.

L'équation précédente, développée par rapport aux éléments de la dernière ligne, devient

$$(b^2-c^2)(R^2-a^2)u_0vw + (c^2-a^2)(R^2-b^2)v_0wu + (a^2-b^2)(R^2-c^2)w_0uv = 0,$$

ou

$$hvw + kwu + luv = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$h = (b^2-c^2)(R^2-a^2)u_0, \qquad k = (c^2-a^2)(R^2-b^2)v_0, \qquad l = (a^2-b^2)(R^2-c^2)w_0;$$

l'équation ponctuelle du cône est donc

$$h^2x^2 + k^2y^2 + l^2z^2 - 2klyz - 2lhzx - 2hkxy = 0,$$

et les deux équations ponctuelles de la parabole sont

$$(4)\qquad hx^2 + ky^2 + lz^2 - 2klyz - 2lhzx - 2hkxy = 0, \qquad u_0x + v_0y + w_0z + r_0 = 0.$$

3. Lorsque le point M décrit une droite donnée, ses coordonnées x_0, y_0, z_0 sont de la forme $x_2 + \alpha\rho$, $y_2 + \beta\rho$, $z_2 + \gamma\rho$; par conséquent les équations (D) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} a^2x &= (x_2 + \alpha\rho)(a^2 - \lambda(R^2 - a^2)), \\ b^2y &= (y_2 + \beta\rho)(b^2 - \lambda(R^2 - b^2)), \\ c^2z &= (z_2 + \gamma\rho)(c^2 - \lambda(R^2 - c^2)); \end{aligned}$$

elles sont linéaires en $\lambda\rho$, λ et ρ; il suffit donc de les développer et de les résoudre pour que l'élimination de λ et de ρ s'en déduise immédiatement. Nous avons ainsi successivement

$$\begin{aligned} \alpha(R^2 - a^2)\lambda\rho + (R^2 - a^2)x_2\lambda + a^2\alpha\rho &= a^2(x - x_2), \\ \beta(R^2 - b^2)\lambda\rho + (R^2 - b^2)y_2\lambda + b^2\beta\rho &= b^2(y - y_2), \\ \gamma(R^2 - c^2)\lambda\rho + (R^2 - c^2)z_2\lambda + c^2\gamma\rho &= c^2(z - z_2). \end{aligned}$$

puis

$$\lambda = \frac{X}{A}, \qquad \rho = \frac{Y}{A}, \qquad \lambda\rho = \frac{Z}{A},$$

X, Y, Z désignant trois déterminants linéaires en x, y, z et A une quantité constante. Le lieu est donc le paraboloïde hyperbolique

$$(5)\qquad XY - AZ = 0.$$

Il est facile de vérifier que le plan $X = 0$ contient la droite donnée, de même que le plan $Z = 0$; le premier est un plan asymptote et le second un plan tangent

4. Désignons par

$$(\Delta)\qquad \frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma}$$

les équations de la droite donnée, et par

$$(\Pi)\qquad lx + my + nz = 0$$

le plan donné en direction. En écrivant que la droite (D) rencontre la droite Δ et qu'elle est parallèle au plan choisi, nous avons les deux relations

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ \dfrac{(R^2 - a^2)x_0}{a^2} & \dfrac{(R^2 - b^2)y_0}{b^2} & \dfrac{(R^2 - c^2)z_0}{c^2} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

et

$$\frac{l(R^2 - a^2)x_0}{a^2} + \frac{m(R^2 - b^2)y_0}{b^2} + \frac{n(R^2 - c^2)z_0}{c^2} = 0;$$

prises simultanément, elles expriment que le point M décrit une conique. Par conséquent la surface engendrée par la droite (D) est un conoïde ayant pour directrice cette conique, pour axe la droite donnée et pour plan directeur le plan Π; la surface devrait donc être du quatrième degré. Mais il est visible que la droite Δ est située tout entière sur la quadrique représentée par le déterminant égalé à 0, quand on y remplace x_0, y_0, z_0 par les coordonnées courantes x, y, z; elle rencontre donc la conique directrice du conoïde en un certain point Π; par suite, le conoïde contient le plan mené par Π parallèlement au plan Π; il se décompose en ce plan et une surface du troisième ordre. On peut se demander maintenant dans quel cas cette surface du troisième degré elle-même se décompose; il y a deux cas évidents : le cas où la conique directrice a une asymptote parallèle au plan Π, et le cas où elle se décompose en deux droites.

Le premier cas ne peut se produire que si le plan Π coupe le plan de la conique suivant une

génératrice du cône asymptote de la quadrique qui sert à déterminer cette conique ; ce calcul conduit à

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

condition qui exprime que le plan Π est parallèle à la droite Δ ; dans ce cas, la surface engendrée par la droite (D) se réduit évidemment au plan mené par Δ parallèlement au plan Π et au plan passant par l'origine et qui fait partie du cône du complexe relatif au point situé à l'infini sur Δ : le problème ne présente alors aucun intérêt.

Le second cas se produit lorsque le plan de la conique coupe le plan tangent à l'origine à la quadrique suivant l'une des deux génératrices de cette quadrique qu'il contient ; la surface du troisième degré se décompose alors en un plan et un paraboloïde hyperbolique. Quant à la condition elle-même elle est facile à obtenir, mais difficile à interpréter ; la solution géométrique de la question éclaircira ce point.

Pour obtenir l'équation de cette surface du troisième degré, on pourrait éliminer x_0, y_0, z_0 entre les équations de la droite (D) et celles de la conique directrice ; mais ce calcul est compliqué et il vaut mieux procéder de la façon suivante : chercher d'abord l'équation du complexe en représentant les équations de la droite (D), par exemple, par $x = \alpha z + p$, $y = \beta z + q$, et traiter alors la question directement. Le complexe actuel est évidemment le complexe des droites telles que leurs conjuguées par rapport à l'ellipsoïde et à la sphère se rencontrent ; nous aurons donc directement son équation en exprimant que les quatre plans

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} - 1 = 0, \qquad px + qy - R^2 = 0, \qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{z}{c^2} = 0, \qquad \alpha x + \beta y + z = 0,$$

passent par le même point. Ce calcul nous donne

$$(R^2 - a^2)(b^2 - c^2)p\beta - (R^2 - b^2)(a^2 - c^2)q\alpha = 0 ;$$

c'est l'équation du complexe en adoptant, comme nous l'avons fait, pour formes générales des équations de la droite les formes canoniques $x = \alpha z + p$, $y = \beta z + q$. Représentons alors par

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

la droite Δ, et par $ux + vy + wz = 0$ la direction du plan Π ; la condition de rencontre de la droite (D) avec la droite Δ est

$$\begin{vmatrix} p - x_0 & q - y_0 & -z_0 \\ l & m & n \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

la condition de parallélisme avec le plan Π,

$$u\alpha + v\beta + w = 0,$$

et nous aurons le lieu de la droite (D) en éliminant α, β, p et q entre ces deux relations, les équations de la droite (D) et celle du complexe. Les équations de la droite (D) nous donnent $p = x - \alpha z$, $q = y - \beta z$, et le déterminant précédent devient

$$\begin{vmatrix} x - x_0 - \alpha z & y - y_0 - \beta z & z \\ l & m & n \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0 ;$$

ajoutant aux éléments de la première ligne ceux de la dernière multipliés par z, ceux-ci deviennent $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, et le déterminant s'écrit

$$P\alpha + Q\beta + R = 0,$$

en désignant par P, Q, R les trois fonctions linéaires $n(y - y_0) - m(z - z_0)$, $l(z - z_0) - n(x - x_0)$,

$m(x - x_0) - l(y - y_0)$; cette équation, jointe à $u\alpha + v\beta + w = 0$, donne

$$\frac{\alpha}{Qw - Rv} = \frac{\beta}{Ru - Pw} = \frac{1}{Pv - Qu}.$$

D'autre part, l'équation du complexe, où l'on a remplacé p et q par $x - \alpha z$, $y - \beta z$, s'écrit

$$(b^2 - c^2)(R^2 - a^2)\beta x + (c^2 - a^2)(R^2 - b^2)\alpha y + (a^2 - b^2)(R^2 - c^2)\alpha\beta z = 0 ;$$

le lieu cherché est donc immédiat et a pour équation

$$(6) \qquad (b^2 - c^2)(R^2 - a^2)x(Ru - Pw)(Pv - Qu) + (c^2 - a^2)(R^2 - b^2)y(Qw - Rv)(Pv - Qu)$$
$$+ (a^2 - b^2)(R^2 - c^2)z(Ru - Pw)(Qw - Rv) = 0.$$

Il est visible que cette surface est du troisième degré, qu'elle passe à l'origine et qu'elle admet pour ligne double la droite $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, c'est-à-dire la droite Δ.

Posons $A = lu + mv + nw$ et $S = u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0)$; nous aurons

$$Ru - Pw = mS - A(y - y_0), \quad \text{etc.} ;$$

par conséquent l'équation (6) pourra s'écrire

$$(b^2 - c^2)(R^2 - a^2)x[mS - A(y - y_0)][nS - A(z - z_0)] + (c^2 - a^2)(R^2 - b^2)y[nS - A(z - z_0)][lS - A(x - x_0)]$$
$$+ (a^2 - b^2)(R^2 - c^2)z[lS - A(x - x_0)][mS - A(y - y_0)] = 0.$$

Elle montre immédiatement que pour $A = 0$ l'équation se décompose en un plan double $S^2 = 0$, et un plan mené par l'origine ; dans ce cas la droite Δ est parallèle au plan Π, et le plan $S = 0$ est le plan parallèle au plan N mené par la droite Δ. Les termes du troisième degré contiennent en facteur la partie homogène de S : donc le plan Π est un plan de directions asymptotiques du conoïde, ce qui était évident *a priori*.

Très bonne solution : M. Aygat.
Bonnes solutions : MM. Dulimbert, à Grenoble ; G. Fauvernier.

Solution géométrique. — Deux points de la droite D ayant même plan polaire, l'un par rapport à l'ellipsoïde, l'autre par rapport à la sphère, les droites conjuguées de cette droite sont dans un même plan et, par suite, se rencontrent. Réciproquement, si les droites conjuguées d'une droite D′ sont dans un même plan P, cette droite passe par les pôles de P par rapport à l'ellipsoïde et à la sphère, c'est donc une droite D. Les droites D forment par conséquent le complexe des droites dont les droites conjuguées se rencontrent. Toutes les droites passant à l'origine en font partie, de même, toutes celles qui sont parallèles aux axes ; par conséquent l'origine et les points à l'infini sur les axes sont des points singuliers de ce complexe. Toutes les droites situées dans l'un des plans principaux de l'ellipsoïde et dans le plan de l'infini en font partie aussi ; ces quatre plans sont donc des plans singuliers du complexe.

Considérons alors un point fixe A et soient α, β les deux plans polaires de ce point par rapport à l'ellipsoïde et à la sphère ; ces plans se coupent suivant une droite a dont les deux conjugués a' et a'' passent par le point A. Si nous considérons en outre une droite D qui passe en A, ses deux conjugues seront dans les plans α et β et se couperont en un point M de leur intersection a ; la droite D est donc l'intersection des deux plans polaires de M par rapport à E et à S : or, ces plans tournent autour de a' et a'' et décrivent deux faisceaux homographiques à la série M, c'est-à-dire homographiques entre eux ; le lieu des droites D qui passent en A est donc un cône du second degré qui contient les deux droites a' et a''. D'après ce que nous avons vu, ce cône contient les parallèles aux axes de l'ellipsoïde menées par le point A et la droite AO. Quand le point A est en O ou à l'infini sur l'un des axes, le cône est indéterminé ; quand le point A est dans l'un des plans principaux ou dans le plan de l'infini le cône se décompose en ce plan et un autre.

Considérons maintenant un plan quelconque Π et soient A et B ses deux pôles par rapport à E et à S ; les conjuguées d'une droite D située dans le plan Π par rapport à ces deux quadriques passent respectivement en A et en B ; le plan P qui les contient tourne donc autour de la droite AB. Soient u et v ses conjuguées par rapport à E et à S ; les pôles M et p du plan P décrivent ces deux droites et tracent sur elles deux divisions homographiques au faisceau linéaire engendré par le plan P en tournant autour de AB. L'enveloppe de Mp, c'est-à-dire de la droite D du plan Π, est donc une conique tangente à u et à v. D'après les généralités énoncées sur le complexe, elle est tangente aussi aux droites d'intersection du plan Π avec les plans de coordonnées et avec le plan de l'infini ; c'est donc une parabole. Cette parabole se décompose en deux points quand

le plan Π passe par l'un des points singuliers du complexe; elle est indéterminée quand le plan Π coïncide avec l'un des plans singuliers du complexe.

Dans ce cas le lieu du point M s'aperçoit immédiatement, c'est la droite u.

Dans le premier cas, quand la droite D passe par un point fixe A, on y parvient de la façon suivante : la droite D décrit un cône C qui passe par les conjuguées a' et a'' de l'intersection a des plans polaires de A, α et β; donc la droite conjuguée de D par rapport à l'ellipsoïde, D_1, enveloppe une conique γ_1 située dans le plan α et tangente à a; de même la conjuguée de D par rapport à la sphère, D_2, enveloppe une conique γ_2 située dans le plan β et tangente aussi à a. Le plan P, qui passe par D_1 et D_2, enveloppe donc une développable de quatrième classe, circonscrite aux deux coniques γ_1 et γ_2; mais cette développable se décompose en un faisceau linéaire de plans, le faisceau ayant pour axe a et en une vraie développable de troisième classe. Les plans du faisceau linéaire a ne sont pas des plans P; donc ceux qu'il faut considérer enveloppent une développable de troisième classe et le lieu de leurs pôles M par rapport à l'ellipsoïde est une cubique gauche. Aux quatre génératrices du cône C signalées : les parallèles aux axes et la droite AO, correspondent comme plans P les plans principaux de l'ellipsoïde et le plan de l'infini; donc la cubique a trois points à l'infini sur les axes et elle passe à l'origine.

Quand le point M décrit une droite donnée quelconque u, son plan polaire P par rapport à l'ellipsoïde enveloppe la conjuguée u_1 de u; soit u' la conjuguée de u_1 par rapport à la sphère, le point p décrit u' et trace sur cette droite une division homographique au faisceau P, par suite, homographique à la série M. La droite pM ou D décrit donc une quadrique qui passe par u et u', et, comme l'une des positions de pM est à l'infini, celle qui correspond au plan du faisceau passant par le centre, cette quadrique est un paraboloïde hyperbolique.

Occupons-nous enfin de la dernière partie, et, pour cela, cherchons d'abord le lieu engendré par les droites D qui s'appuient sur deux droites données quelconques, Δ et Δ'. Ce lieu est une surface du quatrième degré; car soit A un point de Δ, par ce point il passe un cône C du second degré de droites D, ce cône est rencontré par Δ' en deux points B et B'; donc il y a deux génératrices ordinaires, AB et AB', qui passent par A, la droite Δ est une ligne double de la surface; de même pour Δ'. Alors la section faite par un plan quelconque passant par Δ' se compose de deux droites ordinaires AB, AB' et de Δ' comptée deux fois; cette section est du quatrième ordre; donc la surface est aussi du quatrième ordre.

Pour qu'elle se décompose, il faut que l'une des droites soit dans l'un des quatre plans singuliers du complexe ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$), ou bien qu'elle soit dans l'un des plans en lesquels le cône du complexe se décompose, quand le point A vient dans l'un des plans singuliers. Si une seule des conditions est réalisée, la surface se décompose en un plan et une surface du troisième degré. Si deux des conditions sont réalisées à la fois, la surface se décompose en deux plans et une quadrique; cette quadrique ayant une droite à l'infini est d'ailleurs un paraboloïde.

Dans le cas de l'énoncé, Δ' est à l'infini dans un plan Π; donc la surface se décompose en un conoïde du troisième degré et le plan de l'infini. Les cas de décomposition du conoïde sont évidents d'après ce qui précède.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1042. — *On donne un triangle* OAB, *rectangle en* O, *et on joint un point quelconque du plan de ce triangle*, P, *aux deux points* A *et* B, *puis on abaisse du point* O *les perpendiculaires* OH, OH' *sur les droites* PA *et* PB. *Soient* H *et* H' *les pieds de ces deux perpendiculaires.*

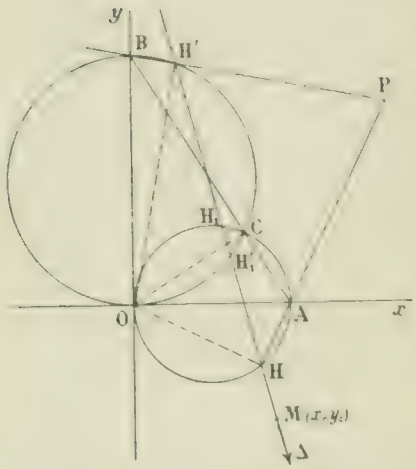
1° *On demande de former l'équation de la droite* HH' *en fonction des données et des coordonnées du point* P *et de trouver le lieu du point* P *quand cette droite* HH' *tourne autour d'un point fixe* (x_0, y_0). *Cette courbe engendre, quand le point* P *varie, un réseau qui a cinq points fixes, dont deux à l'infini.*

2° *Montrer qu'à une droite donnée* HH' *correspondent quatre points* P. *Établir cette propriété par le calcul et par des considérations géométriques; former ensuite l'équation générale des coniques qui passent par ces quatre points.*

3° *Déterminer la droite pour laquelle toutes ces coniques sont des hyperboles équilatères. Trouver l'enveloppe des droites pour lesquelles les deux paraboles du faisceau sont confondues. Ces paraboles parti-*

culières forment deux séries ; former leurs équations générales, trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point O *sur les axes de ces paraboles et construire ce lieu.*

1. Prenons OA et OB pour axes des x et des y, et désignons OA par a, OB par b ; appelons en outre α et β les coordonnées du point P. Nous aurons pour équations des droites PA, PB, OH et OH′,



$$P \equiv \beta x + (a - \alpha)y - a\beta = 0, \qquad Q \equiv (\beta - b)x - \alpha y + b\alpha = 0,$$
$$R \equiv (\alpha - a)x + \beta y = 0, \qquad S \equiv \alpha x + (\beta - b)y = 0.$$

Entre ces quatre fonctions linéaires, il existe une relation de la forme

$$\lambda P + \mu Q + \nu R + \rho S = 0,$$

et l'équation de HH′ est $\lambda P + \nu R = 0$, ou $\mu Q + \rho S = 0$; cette identité se forme ici d'une façon aisée en suivant la voie naturelle, c'est-à-dire en annulant les coefficients de x, y et z dans le premier membre. Nous trouvons ainsi

$$\lambda\beta + \mu(\beta - b) + \nu(\alpha - a) + \rho\alpha = 0,$$
$$\lambda(a - \alpha) - \mu\alpha + \nu\beta + \rho(\beta - b) = 0,$$
$$-a\beta\lambda + \mu b\alpha = 0 ;$$

la dernière donne $\lambda = b\alpha$, $\mu = a\beta$; nous portons ces valeurs dans les deux autres, nous éliminons ρ entre elles, nous supprimons $a\beta + b\alpha - ab$ qui se trouve en facteur dans les deux termes restants, et nous obtenons

$$\nu = \alpha^2 + \beta^2 - b\beta.$$

L'équation de HH′ est donc

$$b\alpha P + (\alpha^2 + \beta^2 - b\beta)R = 0,$$

ou, toutes réductions faites,

$$(1) \qquad \alpha - a)(\alpha^2 + \beta^2) + ab\beta\, x + (\beta - b)(\alpha^2 + \beta^2) + ab\alpha\, y - ab\alpha\beta = 0.$$

Si nous exprimons maintenant que cette droite passe par un point fixe, nous obtenons entre α et β une relation du troisième degré ; par conséquent ce point décrit une cubique. Avec les notations habituelles et x_0, y_0 représentant les coordonnées du point fixe, l'équation de cette cubique s'écrit

$$(2) \qquad x - a)(x^2 + y^2) + aby\, x_0 + (y - b)(x^2 + y^2) + abx\, y_0 - abxy = 0.$$

Il est visible que toutes ces cubiques sont circulaires et forment un réseau quand x_0 et y_0 varient ; les bases du réseau sont

$$(x - az)(x^2 + y^2) - abyz^2 = 0, \qquad (y - bz)(x^2 + y^2) + abxz^2 = 0, \qquad abxyz = 0 ;$$

elles ont en commun les points cycliques et les trois points O, A et B. La propriété annoncée est donc établie.

2. Se donner la droite HH′ revient au fond à se donner deux de ses points ; les cubiques correspondantes se coupent encore en quatre points ordinaires, acceptables comme positions du point P ; il y a donc quatre points qui correspondent à une position particulière donnée de HH′. Pour établir géométriquement cette propriété, il suffit de remarquer qu'une droite donnée quelconque coupe le cercle décrit sur OA comme diamètre en deux points H et H_1, et le cercle décrit sur OB comme diamètre en deux points H et H′ ; il lui correspond donc deux droites AH, les droites AH et AH_1 et deux droites BH′, les droites BH′ et BH_1 ; ces deux couples se coupent en quatre points, qui sont les points P répondant à la question.

Nous aurons l'équation générale des coniques passant en ces quatre points en formant le faisceau linéaire des coniques passant par les quatre points de rencontre de ces deux couples. Pour avoir le pre-

mier couple, nous portons les axes parallèlement à eux-mêmes au point A : le cercle $x^2 + y^2 - ax = 0$ devient

$$x^2 + y^2 + ax = 0,$$

et l'équation donnée de la droite HH', $ux + vy + w = 0$, devient

$$ux + vy + au + w = 0;$$

le faisceau des droites joignant l'origine aux points de rencontre est donc

$$(au + w)(x^2 + y^2) - ax(ux + vy) = 0;$$

en revenant aux anciens axes et simplifiant, nous avons $w(x - a)^2 - av(x - a)y + (au + w)y^2 = 0$. Un calcul semblable nous donnera le second couple

$$(bv + w)x^2 - bux(y - b) + w(y - b)^2 = 0.$$

Le faisceau linéaire indiqué a donc pour équation

(3) $$w(x - a)^2 - av(x - a)y + (au + w)y^2 + \lambda[(bv + w)x^2 - bux(y - b) + w(y - b)^2] = 0.$$

3. Pour que toutes ces coniques soient des hyperboles équilatères, il faut et il suffit que les deux coniques de base soient des hyperboles équilatères, c'est-à-dire des couples de droites rectangulaires ; cela nous donne

$$au + 2w = 0, \qquad bv + 2w = 0.$$

Ces équations expriment que la droite donnée passe aux points $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ et $\left(0, \frac{b}{2}\right)$; c'est donc la droite qui joint les milieux de OA et OB.

Pour que la conique λ du faisceau soit une parabole, il faut que les deux directions asymptotiques de cette conique soient confondues, ce qui donne

$$4[w + \lambda(bv + w)](au + w + \lambda w) - (av + \lambda bu)^2 = 0,$$

ou $$\lambda^2[4w(bv + w) - b^2u^2] + 2\lambda[2(au + w)(bv + w) + 2w^2 - abuv] + 4w(au + w) - a^2v^2 = 0.$$

Nous avons maintenant à exprimer que les deux racines de cette équation sont confondues. Nous trouvons ainsi une équation du quatrième degré en u, v, w qui, après d'assez longues simplifications, se décompose en $w = 0$, $u^2 + v^2 = 0$ et $ab^2u + ba^2v + (a^2 + b^2)w = 0$. Ces équations représentent quatre points : l'origine, les deux points cycliques et le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur AB ; ce sont précisément les quatre points de rencontre des cercles décrits sur OA et OB comme diamètres.

Nous laisserons de côté la seconde solution peu intéressante au point de vue géométrique. En employant la dernière, nous vérifierons aisément que chacun des deux couples de droites qui constituent les coniques de base se décompose en la droite AB et une autre droite ; par conséquent, dans ce cas, toutes les coniques du faisceau se décomposent en la droite AB et une autre droite variable. Le faisceau a bien ses deux paraboles confondues, mais elles se composent de la droite AB et d'une autre droite parallèle à AB ; ce cas est peu intéressant aussi.

Reste la solution $w = 0$. La valeur double de λ est alors $\lambda = \frac{av}{bu}$ et la parabole du faisceau a pour équation

$$-v(x - a)y + uy^2 + \frac{v}{u}\left[vx^2 - ux(y - b)\right] = 0,$$

ou, toutes réductions faites,

$$(vx - uy)^2 - buvx + auvy = 0.$$

Cette équation ne renferme qu'un seul paramètre, le rapport $\frac{u}{v}$ ou le rapport $\frac{v}{u}$.

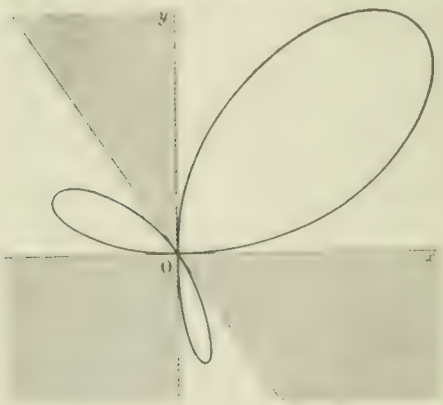
La direction de l'axe de cette parabole est $vx - uy = 0$, la direction perpendiculaire $ux + vy = 0$, et le diamètre conjugué de cette dernière direction,

$$vf'_x - uf'_y = 0.$$

Nous trouvons ainsi

$$2(u^2+v^2)(vx-uy)+buv^2-au^2v=0.$$

Tel est l'axe de la parabole. La perpendiculaire abaissée de l'origine sur l'axe a pour équation $ux+vy=0$, et le lieu du pied de cette perpendiculaire sur l'axe s'obtient en éliminant u et v entre ces deux équations, c'est-à-dire en remplaçant u par y et v par $-x$ dans l'équation précédente. Ce calcul nous fournit l'équation



$$(4)\qquad 2(x^2+y^2)^2-xy(bx+ay)=0,$$

qui représente une quartique circulaire ayant un point triple à l'origine. Les tangentes en ce point sont Ox, Oy et la parallèle à AB, et la courbe (4) se construit immédiatement à l'aide de la décomposition du plan en régions, qui résulte du tracé de ces trois droites.

Sa forme pourrait d'ailleurs être étudiée complètement par l'emploi des coordonnées polaires

J. MARCHAL.

Remarques géométriques. — Pour avoir le lieu du point P qui correspond à une droite passant en un point donné $M(x_0, y_0)$, nous allons chercher combien il y a de points du lieu sur une droite AH qui passe au point A. Cette droite coupe le cercle décrit sur OA comme diamètre en un point H ; en joignant le point H au point M, nous avons une droite HH' ; elle rencontre le cercle indiqué en un nouveau point H_1 et le cercle décrit sur OB comme diamètre en deux points H' et H_1'. Les droites BH' et BH_1' coupent la droite AH en deux points P. Il y a donc deux points ordinaires du lieu sur chaque droite qui passe au point A.

Quand la droite MH passe en C, l'un de ces points vient en A, et la tangente est la droite AH correspondante. Le lieu est donc une cubique qui passe en A. Elle passe de même au point B. Mais les points H_1 et H' sont venus en C, les deux droites AH_1 et BH_1' coïncident alors avec AB, et tous les points de cette droite sont des points P. Cette droite fait partie du lieu total, et ceci explique pourquoi l'équation de HH' renferme le facteur $bx+ay-ab$.

Si la droite MH vient à passer en l'un des trois autres points de rencontre des deux cercles, O, I ou J, l'un des points P vient se placer en O, I ou J. La cubique passe donc aussi au point O et est circulaire.

Les deux premières parties découlent de là.

Pour apercevoir ce qui suit, il suffit de se rappeler que les coniques d'un faisceau tracent sur la droite de l'infini une involution dont les deux points doubles sont les points de contact des deux paraboles du faisceau avec la droite de l'infini ; il faut que ces deux points soient confondus, c'est-à-dire que l'un des points de base du faisceau, l'un des quatre points P, soit à l'infini. Or cela peut arriver de trois façons : ou bien l'une des droites AH est parallèle à l'une des droites BH, ou bien ces droites se coupent en I ou J, ou bien l'une des droites AH coïncide avec l'une des droites BH'.

Dans le premier cas, OH et OH_1 respectivement perpendiculaires à BH' et AH, sont confondues et confondues avec HH' ; cette dernière droite passe en O. Dans le second cas, la droite AH' passe, comme nous l'avons vu, en I ou en J ; dans le dernier cas, elle passe en C.

L'enveloppe totale des droites HH' se compose donc des quatre points de rencontre des deux cercles décrits sur OA et sur OB comme diamètre.

Pour les raisons indiquées dans la première solution, le premier cas présente seul quelque intérêt.

La parabole dans ce cas passe au point O et aux deux points de rencontre avec Oy et Ox de deux parallèles menées par les points A et B, qui donnent en outre le point à l'infini. Il est facile de montrer qu'elle admet au point O une tangente fixe parallèle à AB. Ce système de paraboles peut donc être simplement défini.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1901)

Mathématiques (M. Tannery).

335. — Développer $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ en série.

336. — Détermination des normales à un ellipsoïde issues d'un point quelconque. — Cas où le point est dans un plan principal.

Démontrer que lorsque les coordonnées du point sont toutes trois très petites, les six normales sont réelles (on suppose l'ellipsoïde rapporté à ses plans principaux).

Combien faut-il de points pour déterminer une cubique gauche ?

337. — $f(x) = 0$ étant une équation algébrique à racines distinctes, on élimine x entre $f(x)$ et $y - \varphi(x) = 0$, $\varphi(x)$ étant un polynome ; de quel degré est le polynome $F(y)$ ainsi obtenu ? Quand on sait résoudre $F(y) = 0$, peut-on résoudre $f(x) = 0$? Étudier le cas où $F(y) = 0$ a toutes ses racines doubles.

338. — Dans le développement de $(1+x)^m$ (m étant entier), on supprime le terme x^m. Résoudre l'équation obtenue en égalant à 0 le polynome ainsi formé.

339. — Diviser $1 - x^2$ par $1 - 2x\cos\alpha + x^2$ en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x. Déduire du résultat les propriétés de la série

$$1 + 2x\cos\alpha + 2x^2\cos 2\alpha + \ldots + 2x^n\cos n\alpha + \ldots$$

Réalité des racines de l'équation

$$1 + 2x\cos\alpha + 2x^2\cos 2\alpha + \ldots + 2x^n\cos n\alpha = 0.$$

340. — Construire une parabole connaissant la directrice et deux tangentes ; connaissant quatre tangentes.

341. — Recherche des cercles situés sur une quadrique. Comment sont placés les plans cycliques dans l'hyperboloïde à deux nappes ?

342. — Détermination des directions principales d'une quadrique.

Intersection des surfaces

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\alpha} = \frac{\varphi'_\beta}{\beta} = \frac{\varphi'_\gamma}{\gamma},$$

α, β, γ étant les coordonnées courantes.

343. — Les équations de deux quadriques sont mises sous la forme

$$z^2 + Az + P = 0, \qquad z^2 + Bz + Q = 0.$$

Projection de leur intersection sur le plan des xy.

Définition de l'élimination. Détermination de la racine commune en z. Interprétation géométrique.

Démontrer que si la projection de l'intersection contient une droite, l'intersection contient une droite.

Propriétés des cubiques gauches. Montrer que ce sont des courbes unicursales.

344. — Sur la droite

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

on définit un sens positif (sens d'un mobile allant de l'origine au point a, b).

Comment trouve-t-on alors si un point de coordonnées (x_1, y_1) est à droite ou à gauche de la droite ?

On considère alors la courbe

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) ;$$

tangente en un point ; fixant une direction sur cette droite, la courbe est-elle à droite ou à gauche de la tangente ?

345. — $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ étant des polynomes du second degré en x, y, déterminer deux nouveaux polynomes A et B tels que

$$Af + B\varphi$$

1° contienne seulement x ; 2° soit identiquement nul.

Ayant réalisé la première condition, on obtient un polynome $\psi(x)$. Si l'on sait résoudre $\psi(x) = 0$, peut-on se servir des résultats pour trouver l'intersection des coniques $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$?

346. — Distance d'un point à une droite dans l'espace. En considérant dans la formule obtenue les coordonnées du point comme coordonnées courantes, que représente l'équation ? Démontrer analytiquement ce résultat.

347. — On donne d'une quadrique deux droites, un plan tangent et le point de contact ; combien cela fait-il de conditions ? Intersection du plan donné et de la quadrique. Déterminer géométriquement la nature des quadriques et leur intersection.

348. — Connaissant $\cos a$, calculer $\cos\frac{a}{m}$.

Si m n'est pas premier, la résolution de l'équation en $\cos\frac{a}{m}$ peut-elle être simplifiée ?

349. — Définition et recherche du p. g. c. d. de deux polynomes à une variable, A et B. Démontrer que si les polynomes sont premiers entre eux, il existe deux polynomes A′ et B′ tels que $AA' + BB' = 1$.

Calculer A′ et B′ quand $A = x^m$, $B = (1-x)^n$. Y a-t-il plusieurs systèmes de polynomes A′ et B′ ? Démontrer que B′ se déduit de A en y remplaçant x par $1 - x$.

350. — Étant donnés un hyperboloïde à une nappe et un point quelconque, combien passe-il de droites par ce point, qui ne rencontrent l'hyperboloïde qu'en deux points à l'infini ? Comment le plan de ces droites coupe-t-il l'hyperboloïde ?

351. — Étant donné le paraboloïde

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$$

comment sont placés les plans qui le coupent selon des paraboles ?

Que peut-on dire des paraboles obtenues en coupant par deux plans parallèles ?

352. — On considère le faisceau des cercles passant par deux points A et B. De A sont issues deux droites fixes qui coupent le cercle en M et N. Enveloppe de MN ; lieu du pied D de la perpendiculaire abaissée de B sur MN.

353. — Développement en série de $L(1+x)$.

Étudier la série $$u_n = L\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}.$$

354. — On donne un cercle directeur d'une conique ; combien cela fait-il de conditions ?

Construire une conique connaissant un cercle directeur et deux points.

355. — Détermination de la perpendiculaire commune à deux droites données par leurs équations. Longueur de cette perpendiculaire.

356. — Construire une parabole connaissant la directrice et deux points.

357. — Écrire qu'un point est foyer d'une conique dont on donne l'équation. Cas où le point est l'origine des coordonnées. Que deviennent les droites isotropes par un changement de coordonnées ?

Identification des deux définitions des foyers.

358. — Étant donné $\operatorname{tg} a$, calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{m}$. Montrer que toutes les racines de l'équation obtenue sont réelles.

359. — Forme des courbes

$$y^2 = x^3 + px + q.$$

Recherche des points d'inflexion. Leur réalité.

360. — Comment reconnaît-on un paraboloïde hyperbolique sur son équation ? Génération du paraboloïde hyperbolique. Les quatre équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\lambda x, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\mu x,$$

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda}, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\mu}$$

admettent-elles une solution ?

361. — Construire la courbe

$$\rho = \frac{1}{\sin\omega} + \frac{1}{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)}.$$

362. — Comment se coupent deux quadriques tangentes en deux points ?

363. — Que représente l'équation

$$y^2 = px - mx^2 ?$$

Combien de ces coniques passent par un point (x_0, y_0), si elles sont en outre assujetties à ce que la distance de leurs foyers soit constante ? — Discussion complète.

364. — On considère la courbe

$$x = \frac{P}{R}, \qquad y = \frac{Q}{R},$$

où $P = at^2 + bt + c$, $Q = a't^2 + b't + c'$, $R = a''t^2 + b''t + c''$.

Conditions pour que la courbe contienne une droite. Dans ce cas, la courbe peut-elle se décomposer en une droite et une conique ?

Trouver l'équation paramétrique de la droite à laquelle se réduit la courbe. Lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$, combien de fois la droite est-elle décrite ? Distinguer les portions de droite qui sont décrites plusieurs fois.

Mathématiques (M. Raffy.)

365. — Étant donnée une équation algébrique $f(x) = 0$, comment calcule-t-on une expression symétrique de la forme

$$\Sigma \frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'} ?$$

Indiquer une autre méthode que celle qui consiste à faire la transformation

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'}$$

Calculer Σy quand $y = m + \frac{x}{x - a}$

Différents modes de calcul de $\Sigma \frac{1}{x - a}$

366. — Développer en série, selon les puissances de r,

$$y = e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) \qquad \text{et} \qquad z = e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)$$

Former la dérivée n^e de y.

Calculer $y + iz$.

367. — Étudier la surface $$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3.$$

368. — Construire la courbe

$$x = \frac{3t^2 - 2t}{t^2 - 1}, \qquad y = \frac{t^3}{t^2 - 1}.$$

369. — Sur l'équation

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0,$$

faire la transformation $y = (x-2)^2$.

370. — Exprimer que les racines de l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

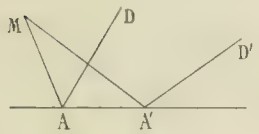
sont en progression arithmétique. Résoudre l'équation dans cette hypothèse.

Même question en supposant les racines en progression géométrique.

371. — Lieu des points équidistants des droites

$$y = mx, \quad z = c; \qquad y = -mx, \quad z = -c.$$

Combien de couples de droites correspondent au lieu trouvé ? Leur situation ?



372. — Que peut-on dire d'une quadrique coupant les trois faces d'un trièdre selon trois cercles ?

373. — Étant données les droites fixes AD, A'D', par les points fixes A et A' on mène AM et A'M telles que

$$\widehat{D'A'M} = 2\,\widehat{DAM}.$$

Déterminer le lieu de M.

374. — Cône des normales. Cas où il se décompose et cas où il est de révolution. Établir analytiquement et géométriquement les propriétés énoncées.

375 — Sur une sphère, on donne un cercle C et un point M. Combien y a-t-il de paraboloïdes passant par le cercle et tangents en M à la sphère ?

Lieu des points d'intersection des deux paraboloïdes correspondant à M, quand M décrit la sphère.

376. — Somme des puissances semblables des racines d'une équation binome.

377. — Supposant que $f(y) = 0$ a toutes ses racines $a, b, c, \ldots$ distinctes, et x étant un nombre donné, calculer

$$\Sigma \frac{1}{(x-a)f'(a)}.$$

378. — Lieu des centres des quadriques qui passent par deux droites non situées dans un même plan. Peut-il se trouver parmi ces surfaces des quadriques de révolution ? Où sont alors les centres ?

379. — Équations des paraboles tangentes à deux droites rectangulaires et telles que la droite des contacts passe par un point fixe.

Lieu des points du plan tels que les axes des deux paraboles passant par ce point fassent un angle V. Construire et étudier ce lieu.

380. — Démontrer que l'on a $\dfrac{e}{2m+2} < e - \left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^m < \dfrac{e}{2m+1}$.

381. — Calculer

$$\Sigma \frac{1}{(x-a)^m},$$

$a, b, c, \ldots, l$ étant les racines réelles et distinctes de l'équation algébrique $f(x) = 0$.

Physique (M. Abraham.)

382. — Indices de réfraction des corps gazeux. — Méthode de Biot et Arago. Mesure de la déviation. Corrections.

383 — Cathétomètre. — Description et réglage.

384 — Hygrométrie. — Méthode de condensation.

385. — Méthode de Borda pour mesurer l'intensité de la pesanteur. — Comparaison des erreurs commises par la méthode des coïncidences et par la méthode qui consiste à compter directement les oscillations.

386. — Machine d'Atwood. — Description et usage.

387. — Lentilles. Plans principaux, leurs propriétés. — Propriétés fondamentales des lentilles. — Marche des rayons à travers un système formé d'une lentille et d'un miroir convexe de même axe.

388. — Système C. G. S.

389. — Télescope de Newton.

390. — Méthode de Foucault pour la mesure de la vitesse de la lumière.

391. — Presse hydraulique.

392. — Pompe de compression.

393. — Vase de Mariote.

394. — Dispersion. — Spectresolaire. — Méthode pour obtenir un spectre pur.

395. — Propagation rectiligne de la lumière. — Chambre noire.

396. — Achromatisme dans les lentilles. Focales dans le prisme et dans les lentilles.

397. — Réglage du niveau.

398. — Lois de la chute des corps. — Plan incliné. — Mouvement d'un corps tombant indéfiniment. Introduire la résistance de l'air.

399. — Pompes à liquides. — Travail.

400. — Centre optique des lentilles épaisses. Points nodaux. Cas particulier des lentilles minces.

On donne une lentille mince : l'œil étant sur l'axe, un diaphragme centré sur l'axe est placé devant l'œil. Un point lumineux P non situé sur l'axe est de l'autre côté de la lentille, et un diaphragme se trouve placé entre P et la lentille. Où doit se trouver le point lumineux pour être vu de l'œil ?

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1108. — Par un point M pris sur une génératrice G d'un hyperboloïde à une nappe on mène la perpendiculaire Mm sur le plan de l'ellipse de gorge, et l'on fait tourner le point m, pied de cette perpendiculaire, de 90° de Ox vers Oy autour du point O pour l'amener en m' ; enfin, par le point m' ainsi obtenu on mène la parallèle G_1 à la normale en M à l'hyperboloïde.

1° Prouver que lorsque le point M décrit la génératrice G la droite G_1 se meut dans un plan P, et trouver l'enveloppe de ce plan P quand G se déplace sur l'hyperboloïde ;

2° Prouver que la droite G_1 enveloppe une parabole (ϖ) dans le plan P, et trouver le lieu de cette parabole quand G se déplace sur l'hyperboloïde ;

3° Montrer que G_1 reste tangente à l'enveloppe du plan P et au lieu de la parabole (ϖ), et trouver le lieu du milieu des points de contact qui correspondent à une même position de G_1.

X. A.

1109. — Sur les côtés d'un polygone plan et fermé P, on construit dans un même sens de rotation des triangles semblables entre eux ; leurs sommets forment un autre polygone P' qui a même centre de gravité que le premier.

L. Bickart.

DEUXIEME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1080. — *On considère un triangle* ABC *dans lequel la base* BC *est fixe et dans lequel on a*

$$m \operatorname{tg} B + n \operatorname{tg} C = k,$$

m, n et k étant des nombres donnés, positifs ou négatifs.

1° *m étant différent de n, prouver que le lieu géométrique du sommet* A *est une hyperbole passant par les points* B *et* C.

Montrer que cette hyperbole ne dépend que des rapports $\dfrac{k}{m+n}$ *et* $\dfrac{k}{m-n}$.

Indiquer les parties de la courbe qui appartiennent au lieu et déterminer les asymptotes.

Les quantités m, n et k variant en sorte que le rapport $\dfrac{m+n}{m-n}$ *reste constant, l'une des asymptotes reste fixe, tandis que l'autre pivote autour d'un point fixe.*

Dans ces conditions, que devient l'hyperbole pour $k = 0$?

Si $m = n$, le lieu du sommet A *est une hyperbole. Déterminer sa tangente au sommet, et indiquer suivant le signe de* $\dfrac{k}{m}$ *la partie de la courbe qui appartient au lieu.*

2° *Prouver que le lieu géométrique du point de concours des hauteurs du triangle* ABC *est une droite perpendiculaire à l'une des asymptotes de l'hyperbole précédente.*

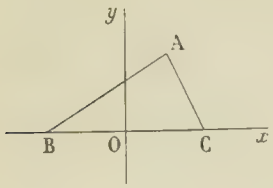
Montrer que cette droite pivote autour d'un point fixe lorsque le rapport $\dfrac{m+n}{m-n}$ *reste constant.*

Quelle est sa position pour $k = 0$ $(m - n \neq 0)$?

Quelle est sa position pour $m = n$ $(k \neq 0)$?

1. A tout triangle ABC répondant à la question correspond un autre triangle A'BC symétrique du premier par rapport à BC et satisfaisant aussi aux conditions du problème. Le lieu cherché sera donc symétrique par rapport à BC et il suffira de déterminer la partie de ce lieu qui est située d'un côté de BC.

Prenons pour axe des x la droite BC et pour axe des y la perpendiculaire au milieu de BC ; nous considérerons seulement les points du lieu dont l'ordonnée est positive. Soient x, y les coordonnées



d'un point A du lieu, y étant positif ; supposons que l'abscisse de C, a, soit positive, alors celle de B, $-a$, sera négative. On a

$$\operatorname{tg} B = \frac{y}{x+a}, \qquad \operatorname{tg} C = -\frac{y}{x-a},$$

et en portant ces valeurs dans la relation $m \operatorname{tg} B + n \operatorname{tg} C = k$, nous obtenons

$$(1) \qquad m\frac{y}{x+a} - n\frac{y}{x-a} = k.$$

Les coordonnées de tout point du lieu à ordonnée positive vérifient cette équation, et réciproquement, tout point à ordonnée positive dont les coordonnées vérifient cette équation est un point du lieu.

Il en résulte que le lieu cherché se compose de la portion de courbe représentée par l'équation (1) dont les ordonnées sont positives et de la portion symétrique par rapport à Ox.

L'équation (1) peut encore s'écrire

$$f(x,y) \equiv kx^2 - (m-n)xy + (m+n)ay - ka^2 = 0.$$

Elle représente une hyperbole qui passe par les points B et C, et son équation montre qu'elle ne dépend que des quantités $\frac{m-n}{k}$ et $\frac{m+n}{k}$.

L'une des asymptotes est parallèle à Oy ; son équation s'obtient en égalant à zéro le coefficient de y, ce qui donne

$$(m-n)x - a(m+n) = 0.$$

Si $\frac{m+n}{m-n}$ est constant, cette asymptote est fixe.

L'autre direction asymptotique est $kx - (m-n)y = 0$; son coefficient angulaire est $\frac{k}{m-n}$ Pour avoir l'asymptote correspondante on peut prendre le diamètre conjugué de cette direction $f'_x + \frac{k}{m-n} f'_y = 0$; on trouve ainsi aisément

$$y - \frac{k}{m-n}\left[x + \frac{a(m+n)}{m-n}\right] = 0.$$

Si $\frac{m+n}{m-n}$ est fixe, cette asymptote passe par le point fixe $x = -\frac{a(m+n)}{m-n}$, $y = 0$.

Pour $k = 0$, l'équation de l'hyperbole devient

$$y(x(m-n) - a(m+n)) = 0;$$

elle se réduit à deux droites, l'axe des x et l'asymptote $x(m-n) - a(m+n) = 0$.

Si $m = n$, le lieu a pour équation

$$kx^2 + 2may - ka^2 = 0 ;$$

il représente une parabole passant par les points B et C et ayant pour axes Oy. Le sommet a pour coordonnées $x = 0$, $y = \frac{ka}{2m}$, et la tangente au sommet a pour équation $y = \frac{ka}{2m}$.

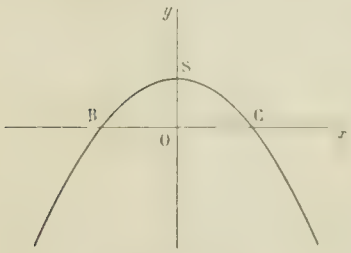


Fig. 1

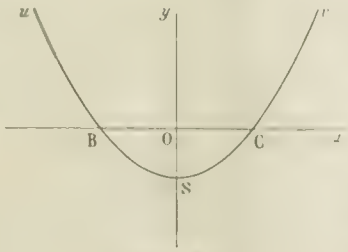


Fig. 2

Si $\frac{k}{2m}$ est positif, le sommet S est au-dessus de Ox; la partie de la courbe qui appartient au lieu est l'arc BSC (*fig.* 1).

Si $\frac{k}{2m}$ est négatif, le sommet S a une ordonnée négative, la partie de la courbe qui appartient au lieu se compose des arcs infinis Bu et Cv (*fig.* 2).

2. La hauteur issue du point B a pour équation $\frac{y}{x+a} = \frac{1}{\operatorname{tg} C}$, et la hauteur issue du point C a pour équation $\frac{y}{x-a} = -\frac{1}{\operatorname{tg} B}$. On en tire

$$\operatorname{tg} B = -\frac{x-a}{y}, \qquad \operatorname{tg} C = \frac{x+a}{y},$$

et en portant ces valeurs dans la relation $m \operatorname{tg} B + n \operatorname{tg} C = k$, on a

$$-\frac{m(x-a)}{y} + \frac{n(x+a)}{y} = k,$$

ou

$$(m-n)x + ky - (m+n)a = 0.$$

Cette équation représente une droite perpendiculaire à l'asymptote de l'hyperbole précédente qui a pour coefficient angulaire $\frac{k}{m-n}$.

Si le rapport $\frac{m+n}{m-n}$ reste constant, cette droite pivote autour du point fixe $x = \frac{(m+n)a}{m-n}$, $y = 0$.

Pour $k = 0$, $m - n \neq 0$, cette droite est parallèle à Oy et a pour abscisse $\frac{(m+n)a}{m-n}$.

Pour $m - n = 0$, $k \neq 0$, elle se confond avec Oy.

M. LAURENCE.

Bonnes solutions par MM. J. Haag, lycée de Nancy ; H. Janois, section normale à Châlons-sur-Marne ; J. Marchal ; Soules, à Condom.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ECOLE CENTRALE (1901, *suite et fin*).

Géométrie (M. Lévi).

1936. — Construire une longueur x, sachant que $\frac{x^2}{a^2} = \frac{b}{c}$.

1937. — Construire les longueurs $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4 - c^4}$, $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4 - c^4 d^2}$.

1938. — Lieu des points d'un plan d'où l'on voit deux cercles donnés sous le même angle.

1939. — Lieu des centres des cercles qui coupent orthogonalement deux cercles donnés. Peut-on déterminer un cercle orthogonal à trois cercles donnés ?

1940. — Lieu des centres des cercles coupant diamétralement deux cercles donnés.

1941. — Inscrire dans un triangle un autre triangle dont les côtés soient parallèles à trois directions données.

1942. — Côté du décagone régulier inscrit dans une circonférence.

1943. — Déterminer le centre et le rayon d'un cercle connaissant les longueurs des tangentes à ce cercle menées de trois points donnés.

1944. — Mener par un point un cercle tangent à deux droites données.

1945. — Cercle tangent à deux droites et à un cercle donnés.

1946. — Cercle passant par deux points et tangent à un cercle donné.

1947. — Cercle passant par un point et tangent à une droite et à un cercle donnés.

1948. — On donne deux droites et un plan P ; une troisième droite AB s'appuie sur les deux droites données et est parallèle au plan P ; lieu du milieu du segment AB.

1949. — On donne deux droites de l'espace et leur perpendiculaire commune. Une droite AB de longueur constante s'appuie sur les deux droites ; lieu du milieu de AB ; lieu du point qui divise AB dans un rapport donné.

1950. — Les plans menés par les bissectrices des faces d'un trièdre et les arêtes opposées à ces faces passent par une même droite. — Même théorème pour les plans menés par chaque arête perpendiculairement à la face opposée.

1951. — On donne un trièdre $Oxyz$ dans lequel le dièdre Ox est droit ; montrer qu'un plan perpendiculaire à l'une des deux autres arêtes coupe le trièdre suivant un triangle rectangle.

1952. — Projections des arêtes d'un trièdre trirectangle sur un plan sécant.

1953. — Sections anti-parallèles du cône oblique à base circulaire.

1954. — Lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés.

1955. — Lieu des points équidistants d'une droite et d'un cercle.

1956. — Intersection d'une droite avec une hyperbole donnée par ses foyers et son axe transverse ; — par ses foyers et une asymptote.

1957. — Mener à une ellipse des tangentes par un point extérieur. — Lieu des points d'où on peut mener des tangentes rectangulaires.

1958. — Mener à une ellipse (ou une hyperbole) des tangentes parallèles à une direction donnée.

1959. — Démonstration géométrique des théorèmes d'Apollonius.

1960. — On donne deux axes rectangulaires et une droite MAB qui se déplace de manière que A et B glissent sur les axes et on a constamment $MB = a$, $MA = b$. Lieu du point M.

1961. — Construire une ellipse connaissant le grand axe et un point.

1962. — Construire une ellipse connaissant le centre, un foyer et une tangente.

1963. — Construire une ellipse connaissant les longueurs $2a$, $2b$ des axes, un foyer F et un point M.

1964. — Construire une ellipse, connaissant un foyer, une tangente et un sommet soit sur l'axe focal, soit sur le petit axe.

1965. — Construire une ellipse connaissant un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles ; — un foyer, deux tangentes et un point ; — une tangente, un foyer et deux points.

1966. — Construire une ellipse connaissant un foyer, la directrice correspondante et une tangente ; — un foyer et trois tangentes (que peut-on faire si le second foyer sort des limites de l'épure ?) ; — un foyer et trois points.

1967. — Construire une ellipse connaissant la directrice et trois points. — Lieu des foyers des ellipses passant par deux points A et B et admettant une directrice donnée.

1968. — Construire une hyperbole connaissant les deux foyers et une direction asymptotique ; — un foyer, une asymptote et la longueur a de l'axe transverse ; — un foyer, une asymptote et une tangente ; — les asymptotes et un point.

1969. — Propriétés de la sous-normale et de la sous-tangente dans une parabole.

1970. — Tangentes à la parabole par un point extérieur ; montrer que la droite qui joint le foyer au point est moyenne géométrique entre les deux droites qui vont du foyer aux points de contact.

1971. — Soit D la directrice d'une parabole ; mener d'un point de cette droite une tangente à la courbe.

1972. — Mener une tangente commune à deux paraboles qui ont leurs axes parallèles.

1973. — Déterminer une parabole connaissant la directrice et deux tangentes ; — la tangente au sommet et deux autres tangentes ; — quatre tangentes.

Géométrie descriptive (M. Lévi).

1974. — Amener par des rotations autour d'axes verticaux ou de bout, deux plans donnés à être perpendiculaires au plan vertical.

1975. — On donne deux droites invariablement liées (A, A') (B, B'). — Quelles rotations faut-il leur faire subir pour les amener simultanément à être horizontales ?

1976. — On donne une droite (D, D') par ses deux projections ; peut-on l'amener par rotation autour d'un axe vertical à avoir sa projection verticale parallèle à une direction donnée Δ' ? — Combien le problème admet-t-il de solutions ?

1977. — On considère un tétraèdre régulier dont la base est dans un plan donné par ses traces. — Construire ses projections.

1978. — Un tétraèdre a sa base ABC dans le plan horizontal ; déterminer le contour apparent d'un cône ayant pour sommet A et pour base le cercle circonscrit au triangle SBC.

1979. — Contour apparent d'un cône de révolution qui passe par trois droites données.

1980. — On considère deux plans P'Q, R'S tangents à un cylindre de révolution de rayon donné ; contour apparent de ce cylindre.

1981. — Contour apparent d'une sphère passant par trois points du plan horizontal et tangente à un plan vertical.

1982. — Plan tangent commun à une sphère et à un cône.

1983. — Plan tangent commun à trois sphères.

1984. — Mener à un cône de révolution une normale par un point extérieur.

1985. — Mener par un point une droite faisant un angle α avec une droite A et à une distance donnée d d une droite D.

1986. — Mener par un point une droite parallèle à un plan P et a une distance donnée d'un autre point donné.

1987. — Mener par un point une droite faisant un angle donné avec un plan donné et à une distance donnée d'une droite donnée.

1988. — Mener une droite inclinée de l'angle α sur une droite Δ et s'appuyant sur deux droites A et B. — Combien de solutions ?

1989. — Mener une droite de longueur donnée parallèle à un plan donné et s'appuyant sur deux droites données.

1990. — Mener parallèlement à une direction Δ, une droite passant à des distances a et b de deux droites données A et B.

1991. — On considère un ellipsoïde à axe horizontal et une droite (D, D'). — Intersection de la droite avec l'ellipsoïde.

1992. — On considère un cylindre dont la base est un cercle donné dans le plan horizontal ; on le coupe par un plan P'Q ; trouver le point le plus haut de l'intersection, les points où la tangente est de profil, etc. — Comment développerait-on la portion du cylindre comprise entre le plan horizontal et le plan sécant ?

1993. — Section par le plan bissecteur du premier dièdre de la surface engendrée par une courbe donnée en tournant autour d'un axe de front.

1994. — On donne un axe de front ; on fait tourner autour de cet axe la ligne de terre xy ; contour apparent vertical de la surface.

1995. — On considère un axe de bout autour duquel on fait tourner une droite (G, G'). — Trouver sur l'hyperboloïde ainsi engendré les génératrices qui sont parallèles en projection horizontale à une direction donnée Δ.

1996 — Variation du plan tangent à un hyperboloïde aux différents points d'une même génératrice.

1997. — On considère un hyperboloïde de révolution à axe vertical. — Mener par une génératrice (G, G') un plan tangent faisant un angle donné α avec le plan horizontal.

1998. — On donne trois droites quelconques et une droite qui s'appuie sur elles ; quelle surface engendre la droite mobile ; les trois premières droites étant des génératrices du premier système, construire une génératrice du second. — Prendre un point sur cette génératrice et trouver le plan tangent en ce point.

1999. — On considère une droite horizontale autour de laquelle on fait tourner une droite (G, G'); mener à l'hyperboloïde ainsi engendré un plan vertical.

2000. — Mener à un hyperboloïde à axe vertical un plan tangent parallèle au plan bissecteur du premier dièdre.

2001. — Section par un plan P'Q d'un hyperboloïde à axe de bout. — Déterminer les sommets de la section.

2002. — Courbe de contact du cône circonscrit à un hyperboloïde à axe vertical, ayant pour sommet un point donné (s, s). — Quelle doit être la position du point pour que la courbe soit une hyperbole ?

2003. — On considère une droite qui tourne autour d'un axe vertical. — Mener par un point (a, a') un plan coupant l'hyperboloïde ainsi engendré suivant une hyperbole dont les asymptotes aient une direction donnée en projection horizontale.

2004. — On donne l'axe de front et une génératrice horizontale d'un hyperboloïde ; on demande de mener par une droite (Δ, Δ'), un plan coupant la surface suivant une parabole. — Quelle est la direction de l'axe de la parabole dans l'espace ?

2005. — **Peut-on mener par un point A un plan coupant deux hyperboloïdes suivant deux paraboles ?**

2006. — **Mener à l'hyperboloïde engendré par une droite (G, G') en tournant autour d'un axe vertical un plan tangent : 1° par une droite verticale ; 2° par une droite ayant G pour projection horizontale.**

2007. — **On considère un hyperboloïde à axe de bout et une droite rencontrant l'axe : mener par cette droite un plan tangent à l'hyperboloïde.**

2008. — **On considère un hyperboloïde engendré par une droite en tournant autour d'une horizontale : mener à cet hyperboloïde un plan tangent par une droite verticale.**

2009. — **On considère un hyperboloïde engendré par une droite tournant autour de la ligne de terre. — Plan tangent par une droite de profil.**

2010. — **On donne un plan P'Q par ses traces : on y prend un point (o, o'), centre d'un cercle de rayon R : c'est la base commune à deux cônes ayant leurs sommets sur la ligne de terre. — Intersection des deux cônes.**

2011. — **On considère dans un plan vertical un cercle de centre (o, o') et de rayon R ; ce cercle est la directrice commune de deux cylindres dont les génératrices ont pour directions (D, D'), (Δ, Δ'). — Intersection de ces deux cylindres.**

2012. — **On considère une sphère tangente au plan horizontal. — On la coupe par un plan horizontal et on considère un cône ayant pour directrice la section obtenue et pour sommet un point de la ligne de terre. — Intersection de ce cône avec la sphère.**

2013. — **On donne un ellipsoïde à axe vertical : on le coupe par un plan de bout et on considère un cône ayant pour directrice la section obtenue et pour sommet un point de la ligne de terre. — Intersection des deux surfaces.**

2014. — **On considère une sphère et un plan de bout qui la coupe suivant un grand cercle. — Un cylindre de génératrices parallèles à (Δ, Δ') a pour directrice ce grand cercle. — Intersection de ce cylindre avec la sphère.**

2015. — **Intersection de deux hyperboloïdes de révolution dont les axes se rencontrent.**

2016. — **Intersection de deux hyperboloïdes qui ont une génératrice commune. Comment a-t-on les asymptotes ?**

2017. — **On considère deux verticales A, B. — Intersection des deux hyperboloïdes engendrés par une même droite G en tournant successivement autour de ces deux droites.**

2018. — **On donne un paraboloïde à un axe vertical et un cône de révolution à axe de front, ayant son sommet au foyer de la méridienne principale du paraboloïde. — Intersection des deux surfaces.**

2019. — **Intersection d'un hyperboloïde à axe vertical avec un cône donné dont la directrice est une courbe (un cercle par exemple) du plan horizontal.**

2020. — **Déterminer une droite rencontrant quatre droites données dans l'espace.**

QUESTIONS PROPOSÉES

1110. — On considère deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy et le système des cercles C qui passent en O et qui coupent les axes en deux nouveaux points A et B, tels que la droite AB passe par un point fixe de la deuxième bissectrice de l'angle des axes ayant pour coordonnées a et $-a$, et on demande :

1° Le lieu des centres des cercles C).

2° Le lieu du second point de rencontre de deux cercles du système qui sont orthogonaux, C et C', et l'enveloppe de la droite qui joint leurs centres.

3° Le lieu des extrémités sur cette droite du diamètre du cercle de rayon minimum appartenant au faisceau linéaire (C, C') et le lieu des centres de similitude de ces deux cercles. Construire ce dernier lieu.

E. H.

1111. — M étant un point du cercle circonscrit à un triangle équilatéral ABC, on mène les droites MA, MB, MC qui rencontrent BC, CA, AB respectivement en A', B', C'. Montrer que lorsque M se déplace sur le cercle, l'aire du triangle A'B'C' est constante et égale au double de l'aire du triangle ABC.

VASNIER.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

LAGNY. IMP. COMTE JACQUET.

12e Année. N° 9 Juin 1902.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR DEUX CONIQUES AYANT EN COMMUN UN POINT CONNU

par M. **G. Fontené**.

Si deux quadriques ont en commun une génératrice, intersection des plans $\alpha = 0$, $\beta = 0$, en mettant leurs équations sous les formes

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\varphi},$$

on a immédiatement une quadrique passant par la cubique gauche commune aux deux quadriques données sans passer par la génératrice, et l'on en déduit l'équation générale des quadriques passant par la cubique gauche. De la même façon, si deux coniques ont un point commun que l'on puisse isoler en le regardant comme l'intersection des droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on peut former l'équation générale des coniques passant par les trois autres points communs ; le théorème de Joachimstal sur les pieds des normales menées d'un point à une parabole est un exemple classique.

Il peut être intéressant de faire le calcul sans expliciter les équations des deux coniques. Or, si l'on désigne par p, q, r les coordonnées homogènes d'un point d'une conique $U = 0$, on peut mettre l'équation de cette conique sous la forme

$$r^2(xU'_x + yU'_y + zU'_z) - z^2(pU'_p + qU'_q + rU'_r) + rz(xU'_p + yU'_q + zU'_r - pU'_x - qU'_y - rU'_z) = 0,$$

ou, en supprimant quatre termes qui se détruisent deux à deux,

$$r^2(xU'_x + yU'_y) - z^2(pU'_p + qU'_q) + rz(xU'_p + yU'_q - pU'_x - qU'_y) = 0,$$

ce que l'on peut écrire

$$(rx - pz)(rU'_x - zU'_p) + (ry - qz)(rU'_y + zU'_q) = 0.$$

Si le point des coordonnées p, q, r appartient à une seconde conique $V = 0$, l'équation d'une conique passant par les trois autres points communs aux deux coniques sera

$$\begin{vmatrix} rU'_x + zU'_p & rU'_y + zU'_q \\ rV'_x + zV'_p & rV'_y + zV'_q \end{vmatrix} = \lambda U + \mu V = 0.$$

NOTE DE GÉOMÉTRIE

par M. **E. Legrand**, ancien élève de l'Ecole Polytechnique.

Considérons un cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires,

$$x^2 + y^2 - 4R^2 = 0,$$

et un triangle inscrit ABC dont les trois sommets ont pour coordonnées :

$$A \begin{cases} x = 2R\cos\alpha, \\ y = 2R\sin\alpha; \end{cases} \qquad B \begin{cases} x = 2R\cos\beta, \\ y = 2R\sin\beta; \end{cases} \qquad C \begin{cases} x = 2R\cos\gamma, \\ y = 2R\sin\gamma. \end{cases}$$

Il est aisé de démontrer, soit en s'appuyant sur ce fait que le point de concours des médianes est sur la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de concours des hauteurs et au tiers à partir du premier point, soit en cherchant directement le point de rencontre de deux hauteurs, que l'orthocentre du triangle ABC a pour coordonnées

$$x = 2R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma), \qquad y = 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$

Considérons alors un quatrième point D dont les coordonnées soient $2R\cos\delta$, $2R\sin\delta$, et envisageons le point ω dont les coordonnées sont formées symétriquement avec celles des quatre sommets du quadrilatère inscrit :

$$x = R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta), \qquad y = R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta).$$

Ce point jouit de propriétés curieuses que nous allons signaler. Appelons en effet H_1, H_2, H_3, H_4 les orthocentres des triangles BCD, ACD, ABD, ABC ; il est visible déjà que le point ω est le milieu commun de AH_1, BH_2, CH_3 et DH_4 ; par conséquent

1° *Le quadrilatère donné et le quadrilatère des orthocentres sont symétriques l'un de l'autre par rapport au point* ω.

Ce fait, évident d'après les formules précédentes, est rendu manifeste encore en portant l'origine des coordonnées en ω ; les coordonnées de A et de H_1 deviennent alors

$$A \begin{cases} x = R(\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma - \cos\delta), \\ y = R(\sin\alpha - \sin\beta - \sin\gamma - \sin\delta) ; \end{cases}$$

$$H_1 \begin{cases} x = R(-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta), \\ y = R(-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta). \end{cases}$$

Le cercle des neuf points du triangle ABC est homothétique du cercle O par rapport au point de concours des hauteurs et dans le rapport $\frac{1}{2}$; il a donc pour centre le milieu de OH_4 et pour rayon R. Or le milieu de OH_4 a pour coordonnées dans l'ancien système $R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$, $R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ et, dans le nouveau, $-R\cos\delta$, $-R\sin\delta$. L'équation du cercle dans le nouveau système d'axes est donc

$$x^2 + y^2 + 2Rx\cos\delta + 2Ry\sin\delta = 0,$$

et nous voyons qu'il passe à l'origine actuelle. Donc

2° *Les quatre cercles des neuf points des triangles* ABC, ABD, ACD, BCD *passent au point* ω. *Il en est de même des cercles des neuf points des triangles formés par les quatre orthocentres*, puisqu'ils sont symétriques des précédents par rapport au point ω.

C'est enfin une propriété connue, que la droite de Simson du triangle ABC par rapport au point D passe au milieu de DH_4. Donc

3° *Les quatre droites de Simson du quadrilatère* ABCD *passent au point* ω. A cause de la symétrie constatée, *il en est de même de celles du quadrilatère des orthocentres.*

Enfin la forme primitive des coordonnées du point ω montre que le point ω est l'homothétique dans le rapport 2 du milieu des droites qui joignent les milieux des côtés opposés du quadrilatère, ce qui donne un moyen simple de construire ce point.

Il est facile de généraliser les résultats précédents. Si on considère un polygone inscriptible quelconque, le point $x = R(\cos\alpha + \cos\beta + \ldots + \cos\lambda)$, $y = R(\sin\alpha + \sin\beta + \ldots + \sin\lambda)$, jouit aussi de propriétés curieuses. Dans le cas de l'hexagone, par exemple, c'est le milieu des dix droites qui joignent les orthocentres des dix couples de triangles formés par les six sommets. Dans le cas du triangle, c'est le centre du cercle des neuf points (*).

(*) Les démonstrations géométriques des principaux théorèmes énoncés dans cette note sur le quadrilatère inscrit ont été publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de H. Vuibert (n°s des 1er février 1878 et 1er février 1886).

SUR UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DES RESEAUX

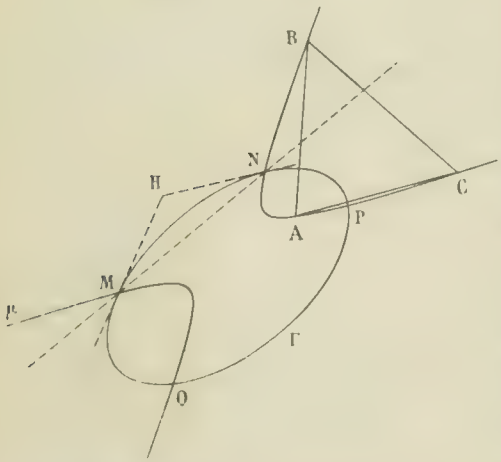
par M. **H. M.**, à Douai.

Je me propose d'appliquer cette théorie à la résolution du problème suivant, dont la *Revue* a déjà publié une solution :

Etant donnée une quartique admettant trois points doubles à tangentes inflexionnelles, si d'un point de cette courbe on lui mène les quatre tangentes autres que la tangente au point considéré, les quatre points de contact sont en ligne droite.

Soient deux coniques C_1, C_2 dans le plan. On sait que la transformation qui fait correspondre à un point M du plan le point d'intersection P des polaires de M par rapport à C_1, C_2 est une transformation du second ordre et l'on peut énoncer le théorème général suivant, dont la démonstration analytique ou géométrique est immédiate : *A une courbe* Γ *d'ordre* n *correspond, en général, une courbe* S *d'ordre* $2n$, *admettant les sommets* A, B, C *du triangle conjugué commun à* C_1, C_2 *pour points multiples d'ordre* n. — Il faut toutefois que le triangle ABC ne joue aucun rôle dans la définition de Γ. Ainsi à une droite du plan ne passant par aucun des points A, B, C correspond une conique circonscrite au triangle ABC ; à une conique Γ correspond une quartique S admettant A, B, C comme points doubles. Si la conique passe par l'un des points A, B, C il y a réduction. En particulier, si la conique est circonscrite au triangle ABC, sa transformée, d'après ce qui précède, et puisque la transformation est réciproque, est une droite.

On aperçoit rapidement, en cherchant à déterminer les tangentes à la quartique S en ses points doubles, que si Γ est inscrite dans ABC, les points A, B, C sont de rebroussement pour S ; si le triangle ABC est conjugué par rapport à Γ, les points A, B, C sont doubles à tangentes inflexionnelles.



Appliquons alors au théorème à démontrer la transformation du second ordre. On obtient l'énoncé suivant :

Étant donnés une conique Γ, un triangle ABC conjugué par rapport à Γ, un point P sur Γ, on considère dans le faisceau ponctuel T des coniques passant par les quatre points A, B, C, P celles qui sont tangentes à Γ en des points différents de P. Les quatre points de contact $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont sur une même conique circonscrite à ABC.

Considérons le réseau ponctuel défini par le faisceau ponctuel T et la conique Γ. Les coniques de ce réseau ont un point commun P. Il en résulte que la Cayleyenne, qui est en général de troisième classe, se décompose en le point P et une conique V, qui, d'après les propriétés connues de la Cayleyenne, est l'enveloppe des sécantes communes aux coniques du réseau. Pour cette raison, V est inscrite dans le triangle ABC. Si on considère une conique μ du faisceau T coupant Γ en P, Q, M, N, la droite MN est tangente à V. Transformons la figure par polaires réciproques par rapport à Γ. V a pour transformée une conique W circonscrite au triangle ABC et qui est le lieu des pôles H des cordes telles que MN par rapport à Γ. Si μ est tangente à Γ en α, MN devient la tangente en α à Γ et H se confond avec α. Il en résulte bien que les points de contact $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont sur une même conique W circonscrite au triangle ABC.

BOURSES DE LICENCE PRÈS LES FACULTÉS DES SCIENCES 1901

Mathématiques.

1047. — *On considère les coniques* (C) *définies par l'équation*

$$(m^2+1)x^2-m^2y^2+2mxy+4my-m^2-1=0,$$

où m *est un paramètre ; montrer que toutes ces coniques ont deux points communs.* P, Q.

Considérant les deux coniques (C) *qui correspondent aux valeurs* a, b *du paramètre* m, *on demande de former l'équation de la droite qui joint les points d'intersection de ces deux coniques, autres que* P *et* Q. ***Montrer que cette droite passe par un point fixe lorsque*** a, b ***varient.***

Par un point M_0 *du plan, de coordonnées* x_0, y_0, *passent en général deux coniques* (C) ; *la région du plan où doit se trouver le point* M_0 *pour que ces deux coniques soient réelles est limitée par une courbe* (S), ***que l'on construira.***

Les deux coniques qui passent par le point M_0 *ont en commun, outre les points* P *et* Q, *un autre point* M_1 *dont on calculera les coordonnées* x_1, y_1 *en fonction de* x_0, y_0.

Quel est le lieu décrit par l'un des points M_0, M_1 ***quand l'autre décrit la courbe*** (S) ?

Ordonnons par rapport à m l'équation générale des coniques C ; nous obtenons

$$m^2(x^2-y^2-1)+2my(x+2)+x^2-1=0.$$

Si ces coniques passent par des points fixes quel que soit m, les coordonnées de ces points fixes doivent annuler les coefficients de m^2, de m et le terme indépendant de m. Ils doivent donc vérifier les équations $x^2-y^2-1=0$, $y(x+2)=0$, $x^2-1=0$.
qui admettent deux systèmes de solutions $x=1$, $y=0$ et $x=-1$, $y=0$; ce sont les coordonnées des points P et Q.

Les coniques relatives aux valeurs a et b de m ont pour équations

$$(1)\quad \begin{cases} (a^2+1)x^2-y^2-1+2ay(x+2)+x^2-1=0,\\ (b^2+1)x^2-y^2-1+2by(x+2)+x^2-1=0.\end{cases}$$

Ces coniques passent par les points P et Q et par deux autres points A et B ; comme la droite PQ a pour équation $y=0$, nous aurons l'équation de l'ensemble des droites PQ et AB en formant une combinaison linéaire des équations (1) qui contienne y en facteur. Il suffit pour cela de multiplier la première par (b^2+1), la deuxième par $-(a^2+1)$ et de les ajouter membre à membre. Nous avons ainsi

$$y^2(b^2-a^2)+2y(x+2)(ab-1)(-b+a)=0,$$

et, en divisant par $y(b-a)$, nous obtenons l'équation de la droite AB :

$$y(b+a)-2(x+2)(ab-1)=0.$$

Cette droite passe par le point fixe $x=-2$, $y=0$.

Les valeurs de m relatives aux coniques passant par le point $M_0(x_0, y_0)$ sont racines de l'équation

$$m^2(x_0^2-y_0^2-1)+2my_0(x_0+2)+x_0^2-1=0.$$

Pour que ces racines soient réelles, il faut qu'on ait

$$y_0^2(x_0+2)^2-(x_0^2-y_0^2-1)(x_0^2-1)\geq 0,$$

ou

$$y_0^2(2x_0^2+4x_0+3)-(x_0^2-1)^2\geq 0.$$

Cette condition exprime que le point M_0 doit se trouver dans la région positive de la courbe (S) qui a pour équation

$$y^2(2x^2+4x+3)-(x^2-1)^2=0.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré symétrique par rapport à l'axe des x. Pour la construire, résolvons l'équation par rapport à y^2 et étudions les variations de y^2,

$$y^2=\frac{(x^2-1)^2}{2x^2+4x+3}.$$

Le second membre est continu pour toutes les valeurs de x. La dérivée de y^2 par rapport à x est

$$(y^2)'=\frac{4(x^2-1)(x^3+3x^2+4x+1)}{(2x^2+4x+3)^2}.$$

Le polynome x^3+3x^2+4x+1 admet une seule racine réelle négative, car sa dérivée $3x^2+6x+4$ n'a pas de racines réelles ; désignons par α cette racine, elle est comprise entre -1 et 0. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		α		1		$+\infty$
$(y^2)'$		$-$		$+$		$-$		$+$	
y^2	$+\infty$	décroît	0	croît	*max.*	décroît	0	croît	$+\infty$

Les points $P(x=1,\ y=0)$ et $Q(x=-1,\ y=0)$ sont des points doubles. Pour avoir les tangentes au point P, cherchons la limite de $\dfrac{y}{x-1}$ quand x tend vers 1. Nous avons

$$\frac{y^2}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)^2}{2x^2+4x+3},$$

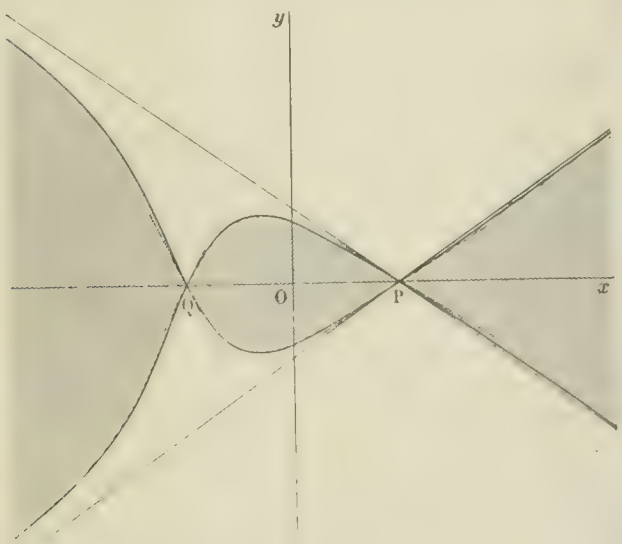
ce qui montre que $\dfrac{y^2}{(x-1)^2}$ a pour limite $\dfrac{4}{9}$, par suite les tangentes au point P ont pour coefficients angulaires $\pm\dfrac{2}{3}$. On voit d'une manière analogue que les tangentes au point Q ont pour coefficients angulaires ± 2.

Enfin il est aisé de former les équations des asymptotes. En divisant $(x^2-1)^2$ par $2x^2+4x+3$ nous avons pour quotient $\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{4}$, et en prenant la racine carrée de ce polynome nous trouvons que les équations des asymptotes sont

$$y=\pm\frac{x-1}{\sqrt{2}}.$$

Elles passent par le point double P, elles ne peuvent donc plus rencontrer la courbe en un autre point à distance finie.

Il est alors facile de construire la courbe. L'origine des coordonnées est dans la région négative de la courbe. On en conclut que pour que les coniques passant par le point M_0 soient réelles, il faut et il suffit que le point M_0 ne soit pas dans la région du plan couverte de hachures.



On peut remarquer aussi que cette courbe est l'enveloppe des coniques (C).

Pour calculer x_1, y_1 en fonction de x_0, y_0, il suffit d'écrire que les deux équations

$$m^2(x_0^2-y_0^2-1)+2my_0(x_0+2)+x_0^2-1=0,$$
$$m^2(x_1^2-y_1^2-1)+2my_1(x_1+2)+x_1^2-1=0,$$

ont les mêmes racines. Nous avons ainsi

$$\frac{x_0^2-y_0^2-1}{x_1^2-y_1^2-1}=\frac{y_0(x_0+2)}{y_1(x_1+2)}=\frac{x_0^2-1}{x_1^2-1};$$

en retranchant termes à termes les rapports extrêmes, nous voyons que les trois rapports sont égaux au rapport $\dfrac{y_0^2}{y_1^2}$, ce qui nous donne

$$\frac{x_0+2}{x_1+2}=\frac{y_0}{y_1}\qquad\text{et}\qquad\frac{(x_0+2)^2}{(x_1+2)^2}=\frac{x_0^2-1}{x_1^2-1}.$$

Cette dernière équation s'écrit

$$(x_1-x_0)(4x_0x_1+5(x_0+x_1)+4)=0,$$

et comme $x_1 - x_0$ n'est pas nul, nous en tirons $4x_0x_1 + 5(x_0 + x_1) + 4 = 0$ ou

$$x_1 = -\frac{5x_0 + 4}{4x_0 + 5},$$

et comme d'autre part y_1 est égal à $\frac{x_1 + 2y_0}{x_0 + 2}$, en remplaçant x_1 par la valeur que nous venons de trouver, nous avons $y_1 = \frac{3y_0}{4x_0 + 5}$.

Les coordonnées x_1, y_1 du point M_1 sont donc

$$(2) \qquad x_1 = -\frac{5x_0 + 4}{4x_0 + 5}, \qquad y_1 = \frac{3y_0}{4x_0 + 5}.$$

Si le point M_1 est sur la courbe (S), on a

$$y_1^2(2x_1 + 4x_1 + 3) - (x_1 - 1)^2 = 0.$$

Remplaçons x_1 et y_1 par leurs valeurs (2) ; nous obtenons, toutes réductions faites,

$$y_0^2(2x_0 + 4x_0 + 3) - (x_0 - 1)^2 = 0,$$

ce qui montre que le point M_0 est aussi sur la courbe (S).

Ce résultat était à prévoir ; en effet si le point M_0 est sur la courbe (S), les deux coniques C_1 et C_2 qui y passent sont confondues, et le point M_1 occupe la position limite du second point de rencontre de C_1 et de C_2 ; il est donc aussi sur l'enveloppe des coniques.

J. MARCHAL.

Bonnes solutions par MM. M. Laurence et Souls.

Physique.

1048. — *Le tirage d'une lunette de Galilée est tel que la distance entre l'objectif et l'oculaire divergent est de* 12^{cm}. *Dans ces conditions, la lunette donne une image réelle, située à* 3^{cm} *derrière l'oculaire, d'un objet placé en avant de l'objectif à une distance finie. Pour qu'un objet placé à l'infini donne une image réelle située à la même distance* (3^{cm}) *de l'oculaire, il faut rapprocher celui-ci de l'objectif de* 1^{cm}. *Enfin pour que l'image de l'objet à l'infini se forme à l'infini, il faut de nouveau rapprocher l'oculaire de l'objectif de* $0^{cm},6$.

On demande quel est, dans ce dernier cas, le grossissement de la lunette quand on s'en sert à la manière ordinaire.

Soient F et f les valeurs absolues des distances focales de l'objectif et de l'oculaire. Exprimons que, dans le cas du second tirage, l'image d'un objet à l'infini est à 3^{cm} en arrière de l'oculaire :

$$\frac{1}{11 - F} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{f}.$$

D'autre part, dans le cas du troisième tirage, le second foyer principal de l'objectif coïncide avec le premier de l'oculaire ; donc

$$F - f = 11 - 0,6.$$

Éliminons F entre ces deux équations, il vient

$$f^2 - 0,6f - 1,8 = 0.$$

La racine positive seule convient ; on a

$$f = 1,675 \qquad \text{et, par suite,} \qquad F = 12,075.$$

Le grossissement sera donc

$$\frac{F}{f} = \frac{12,075}{1,675} = 7,2.$$

Soient d'autre part, p la distance de l'objet observé dans le premier cas et p' la valeur absolue

de la distance conjuguée par rapport à l'objectif; on a successivement

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{F} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{12-p'}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{f}.$$

En remplaçant F et f par les valeurs obtenues, on trouve

$$p = 158^{\text{cm}}.$$

M. LAURENCE.

Bonne solution de M. T. Lemoyne à Voillecomte.

Chimie.

1049. — *On recueille le mélange gazeux obtenu en faisant passer de la vapeur d'eau sur du charbon chauffé au rouge. L'analyse eudiométrique d'un volume* V *de ce mélange montre que le volume d'oxygène suffisant pour la combustion complète est égal à* $\frac{2}{5}$V *et que le volume gazeux qui reste dans ces conditions, après le passage de l'étincelle, est égal à* $\frac{3}{5}$V.

On demande la composition de ce mélange gazeux.

Le mélange gazeux renferme de l'hydrogène, de l'oxyde de carbone et de l'anhydride carbonique; soient x, y et z leurs volumes respectifs; nous avons

$$x+y+z=V.$$

Pour brûler l'hydrogène et l'oxyde de carbone, il faut employer la moitié de leur volume d'oxygène, donc

$$\frac{x+y}{2}=\frac{2}{5}V.$$

L'hydrogène, en brûlant, produit de l'eau qui se condense, l'oxyde de carbone, un volume égal d'anhydride carbonique qui reste avec l'anhydride carbonique primitif; donc

$$y+z=\frac{3}{5}V.$$

Ces trois équations donnent

$$x=\frac{2}{5}V, \qquad y=\frac{2}{5}V, \qquad z=\frac{1}{5}V.$$

M. LAURENCE.

Remarque. — L'origine attribuée dans l'énoncé au mélange gazeux indique que ce mélange résulte des deux réactions

$$C+H^2O=H^2+CO, \qquad C+2H^2O=2H^2+CO^2.$$

Le volume d'oxygène nécessaire pour brûler les produits de la première est égal au volume d'oxyde de carbone, et le volume nécessaire pour brûler les produits de la seconde est égal au volume d'anhydride carbonique. Donc le volume de l'oxygène total doit être égal au volume du résidu. Il y a donc *incompatibilité* entre la première phrase de l'énoncé et les données numériques; l'indication d'origine et un seul des deux nombres suffisaient pour résoudre le problème.

Bonne solution de M. T. Lemoyne.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1043. — *On donne deux coniques* (C) *et* (C') *ayant mêmes directions asymptotiques*

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0.$$

Par un point fixe A *de* (C) *on mène une sécante* $y=mx$, *qui coupe* (C) *en* P *et* (C') *en* Q. *Par le point* M *qui partage* PQ *dans le rapport* $\frac{MP}{MQ}=\frac{p}{q}$, *on mène une droite* Δ *dont le coefficient angulaire*

m' est lié à celui de la sécante par la relation

$$A + (B + \lambda)m + (B - \lambda)m' + Cmm' = 0.$$

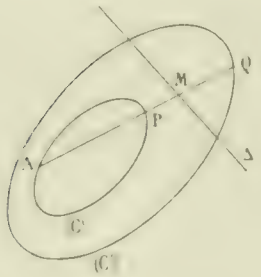
1° *Trouver l'enveloppe de Δ quand la sécante tourne autour de A.*

2° *Trouver le lieu des centres de cette enveloppe : a) quand on fait varier $\frac{p}{q}$; b) quand on fait varier λ. Ces lieux passent par un point fixe de C.*

3° *Trouver les points d'où l'on peut mener à l'enveloppe des tangentes parallèles aux directions asymptotiques communes à (C) et à (C').*

La position de l'un de ces points est indépendante de la conique (C'). Trouver le lieu de ce point : a) quand $\frac{p}{q}$ varie ; b) quand λ varie.

La position des trois autres points ne dépend que du centre de (C). Trouver le lieu de ces trois points quand, $\frac{p}{q}$ et λ restant constants, le centre de (C') décrit une courbe donnée $F(x, y) = 0$.



Prenons pour origine le point A et soient

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0,$$
$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

les équations des coniques (C) et (C'). Désignons par m le coefficient angulaire variable de la sécante APQ et par x_0, x_1, α les abscisses des points P, Q, M respectivement.

L'équation de la droite Δ est

$$y - m\alpha = m'(x - \alpha);$$

remplaçons-y α par sa valeur $\frac{px_1 - qx_0}{p - q}$, et m' par sa valeur tirée de la relation

$$A + (B + \lambda)m + (B - \lambda)m' + Cmm' = 0;$$

cette équation devient

$$(p - q)(A + (B + \lambda)m)x + (B - \lambda) + Cm)y] = (A + 2Bm + Cm^2)(px_1 - qx_0).$$

Or les valeurs x_0 et x_1 vérifient les équations

$$(A + 2Bm + Cm^2)x_0 + 2(D + Em) = 0,$$
$$(A + 2Bm + Cm^2)x_1 + 2(D' + E'm)x_1 + F' = 0;$$

on peut les écrire

$$(A + 2Bm + Cm^2)x_0 = -2(D + Em),$$
$$(A + 2Bm + Cm^2)x_1 = -2(D' + E'm) - \frac{F'}{x_1},$$

et en tirer

$$(A + 2Bm + Cm^2)(px_1 - qx_0) = 2q(D + Em) - p\left[2(D' + E'm) + \frac{F'}{x_1}\right],$$

et l'équation de Δ devient

$$(q - p)(A + (B - \lambda)m + 2(qD - pD') + m\left[(q - p)(B + \lambda)x + Cy + 2(qE - pE')\right] = \frac{pF'}{x_1}.$$

Posons

$$X = (q - p)(A + (B - \lambda)m) + 2(qD - pD'), \qquad Y = (q - p)(B + \lambda)x + Cy + 2(qE - pE');$$

l'équation de la droite Δ peut enfin s'écrire

$$Y + mX = \frac{pF'}{x_1}.$$

Éliminons x_1 entre cette équation et l'équation (1), nous obtenons

$$pF'(A + 2Bm + Cm^2) + 2p(D' + E'm)(Y + mX) + (Y + mX)^2 = 0.$$

et cette équation représente l'ensemble des deux droites Δ correspondant aux deux points d'intersection de la sécante AP et de la conique (C').

Ordonnons cette équation par rapport à m, nous avons

$$(X^2 + 2pE'X + p^2CF')m^2 + 2(XY + pD'X + pE'Y + p^2BF')m + Y^2 + 2pD'Y + p^2AF' = 0,$$

ou

$$[(X + pE')^2 + p^2(CF' - E'^2)]m^2 + 2[(X + pE')(Y + pD') + p^2(BF' - E'D')]m + (Y + pD')^2 + p^2(AF' - D'^2).$$

Posons $U \equiv X + pE'$, $V \equiv Y + pD'$, et remarquons que $CF' - E'^2$, $BF' - E'D'$, $AF' - D'^2$ sont les coefficients de A, $-B$ et C dans le développement du discriminant de la conique (C') ; nous désignerons ces mineurs respectivement par a', $-b'$ et c', de sorte que l'équation précédente s'écrit

$$(U^2 + p^2a')m^2 + 2(UV - p^2b')m + V^2 + p^2c' = 0.$$

1. L'enveloppe de ces droites a pour équation

$$(UV - p^2b')^2 - (U^2 + p^2a')(V^2 + p^2c') = 0,$$

ou

$$c'U^2 + 2b'UV + a'V^2 + p^2(a'c' - b'^2) = 0.$$

Cette équation représente une conique.

2. Le centre de cette conique est donné par les équations

$$U = 0, \qquad V = 0,$$

qui sont indépendantes de F' ; donc le centre de l'enveloppe est le même pour toutes les coniques ayant mêmes asymptotes que (C').

a) Lieu du centre, $\frac{p}{q}$ *variable.* — Les équations du centre peuvent s'écrire en remplaçant U et V par leurs valeurs

$$(2) \qquad \begin{cases} (q - p)[(B + \lambda)x + Cy + 2E] + p(2E - E') = 0, \\ (q - p)[Ax + (B - \lambda)y + 2D] + p(2D - D') = 0. \end{cases}$$

Eliminons $\frac{q - p}{p}$ entre ces deux équations ; nous avons l'équation du lieu :

$$(2D - D')[(B + \lambda)x + Cy + 2E] - (2E - E')[Ax + (B - \lambda)y + 2D] = 0 ;$$

elle représente une droite qui passe par l'intersection des deux droites

$$(B + \lambda)x + Cy + 2E = 0, \qquad Ax + (B - \lambda)y + 2D = 0.$$

Or il est aisé de vérifier que ces deux droites se coupent sur la conique (C), car si on élimine λ entre ces deux équations on retrouve précisément l'équation de la conique (C).

b) Lieu du centre, λ *variable.* — Eliminons λ entre les équations (2), nous trouvons pour équation du lieu

$$(q - p)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey) + p[(2D - D')x + (2E - E')y] = 0 ;$$

ce lieu est une conique qui a mêmes directions asymptotiques que (C) et (C') et qui passe, quel que soit $\frac{p}{q}$, par les points de rencontre de la conique (C) et de la droite $(2D - D')x + (2E - E')y = 0$.

3. L'équation de l'enveloppe est, comme nous l'avons vu,

$$F(U, V) \equiv c'U^2 + 2b'UV + a'V^2 + h = 0,$$

en posant $h = p^2(a'c' - b'^2)$.

Les parallèles aux droites $U = 0$, $V = 0$ menées par l'origine ont pour équation

$$U_1 \equiv (B + \lambda)x + Cy = 0, \qquad V_1 \equiv Ax + (B - \lambda)y = 0,$$

et on vérifie facilement que l'équation de l'ensemble des directions asymptotiques des coniques données peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad AU_1^2 - 2BU_1V_1 + CV_1^2 = 0.$$

D'autre part les tangentes issues du point (x_0, y_0) à la conique enveloppe, $F(U, V) = 0$, sont parallèles aux droites

$$4F(U_0, V_0)(cU^2 + 2b'UV + a'V^2) - (UF'_{U_0} + VF'_{V_0})^2 = 0,$$

ou

$$(V^2 + cp^2)U^2 - 2U_0V_0 - b'p^2)UV + (U_0^2 + a'p^2)V^2 = 0.$$

Pour que ces droites soient parallèles aux directions asymptotiques (3), il faut qu'on ait

$$\frac{V^2 + cp^2}{A} = \frac{U_0V_0 - b'p^2}{B} = \frac{(U_0^2 + a'p^2)V^2}{C}.$$

ou, en remplaçant c, b, a' par leurs valeurs et en retranchant F' des trois membres,

$$\frac{V^2 - p^2D'^2}{A} = \frac{U_0V_0 - E'D'p^2}{B} = \frac{U_0^2 - E'^2p^2}{C},$$

ou encore

$$\frac{(V_0 + pD')(V_0 - pD')}{A} = \frac{(U_0 + pE')(V_0 - pD') + (U_0 - pE')(V_0 + pD')}{B} = \frac{(U_0 + pE')(U_0 - pE')}{C}.$$

Posons

$$P = U + pE = (q - p)(Bx + Cy) + 2qE,$$

$$Q = V + pD = (q - p)(Ax + By) + 2qD;$$

nous pouvons dire que les points cherchés sont déterminés par les équations

$$\frac{Q(Q - 2pD')}{A} = \frac{P(Q - 2pD') + Q(P - 2pE')}{B} = \frac{P(P - 2pE')}{C}.$$

On voit ainsi que les points sont les sommets du parallélogramme dont les côtés ont pour équations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad P - 2pE' = 0, \qquad Q - 2pD' = 0.$$

Le point $P = 0$, $Q = 0$ est indépendant de la conique (C'), les autres ne dépendant que du centre O' de cette conique.

Lieu du point $P = 0$, $Q = 0$.

a) $\frac{p}{q}$ *variable.* — Ce lieu a pour équation

$$D(Bx + Cy) - E(Ax + By) = 0;$$

c'est une droite.

b) λ *variable.* — Le lieu a pour équation

$$(q - p)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + 2q(Dx + Ey) = 0,$$

conique homothétique de la conique (C).

Le lieu q et $\frac{p}{q}$ restant constants, le point $P = 0$, $Q = 0$ est fixe ; deux des autres points décrivent, l'un la droite $P = 0$, l'autre la droite $Q = 0$ quand on fait varier le centre O' de la conique (C').

Cherchons les relations qui existent entre les coordonnées du dernier point

$$P - 2pE' = 0, \qquad Q - 2pD' = 0$$

et celles (x', y') du centre O', qui sont données par

$$Ax' + By' + D' = 0, \qquad Bx' + Cy' + E' = 0.$$

En éliminant D' et E' nous avons

$$p(Ax' + By') + Q = 0, \qquad p(Bx' + Cy') + P = 0;$$

ce sont des relations du premier degré ; donc si (x', y') décrit une courbe $F(x', y') = 0$, le point considéré décrit une courbe de même degré et de même classe.

P. VALOT, à Périgueux.

1051. — *On considère deux droites de l'espace qui ne sont pas dans le même plan,* D *et* D', *et la perpendiculaire commune à ces deux droites,* AB ; *on prolonge* AB *d'une longueur* BC = AB, *et sur* BC *comme diamètre on décrit une sphère* S.

1° *Cela posé, on envisage une droite mobile,* Δ, *qui s'appuie sur* D *et* D′ *et qui est tangente à la sphère, et on demande le lieu du point de contact de cette droite avec la sphère. Montrer que ce lieu est une biquadratique gauche ayant un point double.*

2° *Trouver le lieu engendré par la droite* Δ *et le lieu du milieu de la portion de cette droite comprise entre* D *et* D′.

3° *Construire ce dernier lieu, quand les deux droites* D *et* D′ *sont rectangulaires.*

N. B. — *On représentera* AB *par* $2a$ *et par* m *la tangente de la moitié de l'angle formé par les droites* D *et* D′.

Prenons pour axe des z la perpendiculaire commune aux deux droites, pour origine le milieu du segment compris entre elles et pour axes des x et des y deux parallèles aux bissectrices de l'angle formé par les directions de D et de D′.

Dans ce système l'équation de la sphère S sera

$$S \equiv x^2 + y^2 + (z - 2a)^2 - a^2 = 0.$$

et celles des droites D et D′ seront

$$D \begin{cases} z - a = 0, \\ y - mx = 0 \; ; \end{cases} \qquad D' \begin{cases} z + a = 0, \\ y + mx = 0. \end{cases}$$

1. Il est facile de voir qu'une droite Δ' s'appuyant sur D et D′ a pour équations

$$\Delta' \begin{cases} y = \lambda z + \mu a, \\ mx = \mu z + \lambda a, \end{cases}$$

λ et μ étant des paramètres variables.

Si nous exprimons que Δ' est tangente à la sphère S, elle deviendra une droite Δ et nous aurons la relation

$$(1) \qquad (\lambda^2 - \mu^2)^2 + (\lambda + 2\mu)^2 + m^2(2\lambda + \mu)^2 - \lambda^2 m^2 - \mu^2 - m^2 = 0.$$

Abaissons du centre de la sphère $(0, 0, 2a)$ un plan perpendiculaire sur la droite Δ',

$$\mu x + \lambda m y + m(z - 2a) = 0,$$

et éliminons λ et μ entre cette équation et les deux équations de Δ'; nous aurons une surface qui contiendra le lieu des points de contact des droites Δ avec la sphère; nous trouvons ainsi pour équation de cette surface

$$mz(x^2 + y^2 + z^2) - axy(1 + m^2) - 2amz^2 - a^2mz + 2a^3m = 0.$$

Cette équation, combinée avec celle de la sphère, représente le lieu du point de contact ; en y remplaçant $x^2 + y^2 + z^2$ par $4az - 3a^2$, nous trouvons finalement

$$(2) \qquad (1 + m^2)xy - 2m(z - a)^2 = 0.$$

Celle-ci représente un cône qui a pour sommet le point le plus bas de la sphère, A; le lieu cherché est donc une biquadratique sphérique ayant un point double en A. Les tangentes à cette courbe en A s'obtiennent en coupant le cône par le plan $z = a$; elles ont pour seconde équation $xy = 0$; ce sont donc les parallèles à Ox et à Oy menées par le point A.

2. Pour obtenir le lieu des droites Δ, il est commode de faire d'abord la transformation suivante : nous poserons $\lambda + \mu = \alpha$ et $\lambda - \mu = \beta$, nous aurons ainsi $\lambda^2 - \mu^2 = \alpha\beta$, $\lambda = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\mu = \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\lambda + 2\mu = \alpha + \mu$, $2\lambda + \mu = \lambda + \alpha$, et la relation (1) deviendra

$$\alpha^2\beta^2 + m^2(\lambda + \alpha)^2 + (\alpha + \mu)^2 - \lambda^2 m^2 - \mu^2 - m^2 = 0,$$

puis

$$\alpha^2\beta^2 + \alpha^2(1 + m^2) + 2\alpha(\lambda m^2 + \mu) - m^2 = 0,$$

ou enfin

$$\alpha^2\beta^2 + \alpha^2(1 + m^2) + m^2\alpha(\alpha + \beta) + \alpha(\alpha - \beta) - m^2 = 0 :$$

cette relation s'écrit définitivement

$$\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2(1 + m^2) + \alpha\beta(m^2 - 1) - m^2 = 0.$$

D'autre part, les équations de Δ, combinées par addition et soustraction, nous donnent

$$\alpha = \frac{y + mx}{z + a}, \qquad \beta = \frac{y - mx}{z - a};$$

par conséquent le lieu des droites Δ s'obtient en portant ces valeurs de α et β dans la relation précédente ; cela nous donne

$$(2) \qquad (y^2 - m^2x^2)^2 + 2(1 + m^2)(y + mx)^2(z - a)^2 + (m^2 - 1)(y^2 - m^2x^2)(z^2 - a^2) - m^2(z^2 - a^2)^2 = 0.$$

Cette équation représente une surface du quatrième ordre ayant pour lignes doubles les deux droites D et D'.

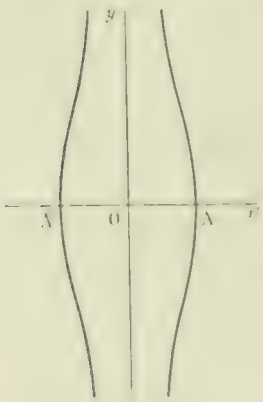
Le milieu de la portion de Δ comprise entre les droites D et D' est dans le plan des xy. Le lieu de ce point est donc la section de la surface (2) par le plan des xy, $z = 0$; c'est une quartique ayant pour équation

$$(3) \qquad (y^2 - m^2x^2)^2 + 2a^2(1 + m^2)(y + mx)^2 + a^2(1 - m^2)(y^2 - m^2x^2) - a^4m^2 = 0.$$

Il est manifeste que cette courbe admet pour directions asymptotiques les deux directions $y - mx = 0$ et $y + mx = 0$, c'est-à-dire les directions des droites D et D' et que les points à l'infini sur ces droites sont des points doubles.

3. Dans le cas où les droites D et D' sont rectangulaires, $m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$, et l'équation (3) devient

$$(4) \qquad (x^2 - y^2)^2 + 4a^2(x + y)^2 - a^4 = 0.$$



Elle représente une courbe qui admet pour points doubles les points à l'infini sur les bissectrices de l'angle des axes, qui admet ces deux bissectrices pour axes, et l'une d'elles, $x + y = 0$, pour asymptote double.

Pour construire cette courbe il sera commode de prendre pour axes de coordonnées les deux bissectrices, c'est-à-dire de faire tourner les anciens axes de 45° autour du point O ; cela donnera les formules de transformation

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}};$$

par conséquent la nouvelle équation est, après suppression des accents,

$$4x^2y^2 + 8a^2x^2 - a^4 = 0;$$

elle donne

$$y^2 = a^2\,\frac{a^2 - 8x^2}{4x^2}$$

et la courbe se construit à vue.

CANS.

Bonnes solutions : MM. J. Marchal, Dulimbert, à Grenoble.

Remarques géométriques. — Par chaque point de l'une des droites D ou D' passent deux droites Δ, les droites d'intersection du plan mené par le point et l'autre droite et du cône circonscrit ayant son sommet en ce point ; chacune de ces droites Δ décrit une nappe de la surface, et, par suite, les droites D et D' sont deux lignes doubles du lieu. Coupons alors cette surface par un plan mené par la droite D' par exemple, et soient A son point de rencontre avec D et (C) le cercle de section de la sphère par ce plan ; il y a deux droites Δ dans ce plan, les tangentes menées à (C) par A ; comme la droite D' est double et compte pour deux, la section plane complète est du quatrième ordre. Donc la surface est une surface du quatrième ordre ayant pour lignes doubles les deux droites D et D'.

Elle coupe alors la sphère suivant une ligne dont l'ordre total est égal à 8; or cette ligne étant une ligne de contact compte pour deux ; donc le lieu des points de contact avec la sphère est une quartique.

Nous allons montrer que c'est une biquadratique ; pour cela, considérons un point mobile, M, sur la droite D ; les points de contact qui correspondent à ce point sont dans le plan polaire de M, μ, et dans le plan (M, D')

ou μ'. Or le plan μ tourne autour d'une droite fixe, la droite D_1, polaire de cette droite par rapport à la sphère; il décrit donc un faisceau homographique à la série M. Le plan μ' jouit de propriétés semblables. Donc l'intersection de ces deux plans décrit une quadrique qui passe par D_1 et D'; par conséquent son intersection avec la sphère est une biquadratique. Il est facile de voir d'ailleurs que le plan μ coïncide une fois avec le plan mené par D' tangentiellement à la sphère en A; cela arrive quand le point M est à l'infini sur la droite D. Le plan μ contient alors Oz et la droite d'intersection des deux plans passe en A. Les deux génératrices de la quadrique qui passent en A sont dans le plan tangent à la sphère; la quadrique touche la sphère en A et ce point est un point double de l'intersection.

1082. — *On considère un triangle* ABC *dont le côté* BC *est fixe et dont le cercle conjugué a un rayon constant. Trouver le lieu du point* A *et construire ce lieu.*

Prenons pour axe des x la droite BC et pour axe des y la perpendiculaire au milieu; désignons respectivement par a et $-a$ les abscisses des points C et B en supposant $a > 0$.

Soit R le rayon du cercle conjugué au triangle ABC, l'équation de ce cercle peut s'écrire

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0,$$

et les polaires des points C et B par rapport à ce cercle ont respectivement pour équations

$$(1)\qquad (a-\alpha)x-\beta y+\alpha^2+\beta^2-a\alpha-R^2=0,$$

$$(2)\qquad -(a+\alpha)x-\beta y+\alpha^2+\beta^2+a\alpha-R^2=0.$$

Écrivons que la première droite passe par le point B ou que la seconde passe au point C; nous obtenons la relation

$$(3)\qquad \alpha^2+\beta^2-R^2-a^2=0,$$

ce qui montre en passant que le centre du cercle conjugué décrit un cercle.

Le point A est défini par l'intersection des droites (1) et (2). Nous aurons donc l'équation du lieu de ce point en éliminant α et β entre les équations (1), (2) et (3).

En tenant compte de la relation (3) les équations (1) et (2) s'écrivent

$$a-\alpha)x-\beta y-a\alpha+R^2=0,\qquad -(a+\alpha)x-\beta y+a\alpha+R^2=0.$$

On en déduit sans difficulté $\alpha=x$, $\beta=\dfrac{a^2-x^2}{y}$, et en portant ces valeurs dans la relation (3) on obtient l'équation du lieu :

$$(x^2-a^2)^2+y^2(x^2-a^2-R^2)=0.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré symétrique par rapport aux deux axes et admettant comme points doubles les points B et C.

Pour la construire, résolvons son équation par rapport à y^2,

$$y^2=\frac{(x^2-a^2)^2}{a^2+R^2-x^2},$$

et comme la courbe est symétrique par rapport aux deux axes, il suffira de donner à x des valeurs positives et d'étudier seulement la valeur de y donnée par

$$y=\frac{x^2-a^2}{\sqrt{a^2+R^2-x^2}},$$

le radical du dénominateur étant précédé du signe $+$.

La dérivée de cette fonction est

$$y'=\frac{x(a^2+2R^2-x^2)}{(a^2+R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le cercle conjugué par rapport à un triangle est réel ou imaginaire alors que le triangle a ou n'a pas un angle obtus. Dans ce dernier cas, le centre du cercle est toujours réel, c'est le point de concours des hauteurs du triangle, et le rayon est une imaginaire de la forme ki; on a alors $R^2=-k^2$, ce qui nous montre que pour étudier complètement la question il est nécessaire d'examiner deux cas, le cas où R^2 est positif et celui où R^2 est négatif.

Premier cas. $R^2 > 0$. — Pour que y soit réel, il faut que x^2 soit plus petit que $a^2 + R^2$, et comme nous ne donnons à x que des valeurs positives, nous ferons varier x de 0 à $\sqrt{a^2 + R^2}$. Dans ces conditions y' est toujours positive, par suite y croît. Pour $x = 0$, y est égal à $-\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + R^2}}$; quand x croît de 0 à a, y croît de $-\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + R^2}}$ à 0; et quand x croît de a à $\sqrt{a^2 + R^2}$, y croît de 0 à $+\infty$. On déduit de là la branche de courbe ICL; et en se reportant à la valeur de y', on voit que la tangente au point I est parallèle à Ox, et que la tangente au point C a pour coefficient angulaire $\dfrac{2a}{R}$.

Fig. 1

En prenant la symétrique de cette portion de courbe par rapport aux deux axes, on obtient la courbe entière; les points B et C sont des points doubles réels (*fig.* 1).

Deuxième cas. $R^2 < 0$. — Posons $R^2 = -k^2$; nous avons alors

$$y = \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - k^2 - x^2}}, \qquad y' = \frac{x(a^2 - 2k^2 - x^2)}{(a^2 - k^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La courbe n'est réelle que si k^2 est plus petit que a^2, et pour que y soit réel il faut que x varie de 0 à $\sqrt{a^2 - k^2}$.

Si k^2 est plus petit que $\dfrac{a^2}{2}$, la dérivée y' s'annule en changeant de signe pour $x = \sqrt{a^2 - 2k^2}$, et nous avons le tableau de valeurs suivant

x	0		$\sqrt{a^2 - 2k^2}$		$\sqrt{a^2 - k^2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - k^2}}$	croît	$-2k$ (*max.*)	décroît	$-\infty$

et la courbe ci-contre (*fig.* 2).

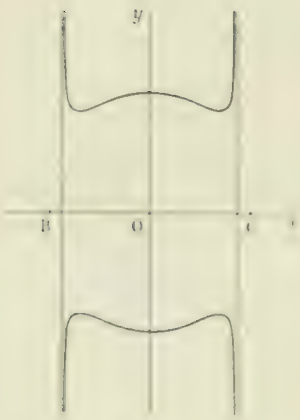


Fig. 2.

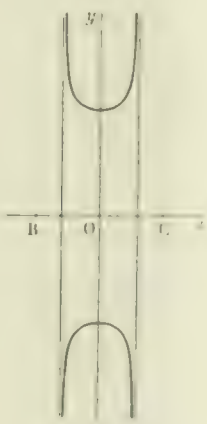


Fig. 3.

Si au contraire k^2 est plus grand que $\dfrac{a^2}{2}$, la dérivée y' est toujours négative et la fonction y décroît de $-\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - k^2}}$ à $-\infty$, quand x croît de 0 à $\sqrt{a^2 - k^2}$ (*fig.* 3).

Dans ces deux cas les points B et C sont des points doubles isolés.

Comme cas intermédiaire on peut considérer le cas où $R = 0$; l'équation de la courbe devient alors

$$(x^2 - a^2)(x^2 + y^2 - a^2) = 0;$$

elle se compose du cercle de diamètre BC et des tangentes en B et C à ce cercle.

Ce résultat était à prévoir, car pour que le cercle conjugué d'un triangle ait un rayon nul, il faut et il suffit que le triangle soit rectangle.

P. TRIBIER.

Solutions par MM. J. Dufaut, à Nontron; J. Haag, lycée de Nancy; M. Laurence; J. Marchal; P. Thonet.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1901, *Suite*).

Mathématiques.

401. — Trouver le lieu des points de rencontre d'un système de paraboles homofocales avec leurs développées.

402. — Prouver par le calcul qu'un cône et son cône supplémentaire ont les mêmes plans principaux.

403. — Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe. — Calculer y'_x et y''_x. On élimine y' et y entre les trois équations ainsi obtenues; on obtient l'équation $\varphi(x, y'') = 0$. De quel degré sera-t-elle en x, y'' et que signifiera au point de vue géométrique le fait que son terme constant en y'' sera nul?

404. — Étudier géométriquement la quadrique déterminée par un plan tangent, le point de contact, et deux génératrices de même système.

405. — On donne deux cercles orthogonaux égaux. Lieu du milieu d'un segment de longueur égale au rayon commun et dont les extrémités glissent sur les deux cercles.

406. — Étudier les surfaces

$$y = x\varphi(z) + f(z).$$

Point central. — Ligne de striction. — Application au paraboloïde hyperbolique $xy = z$.

407. — Calculer les coordonnées de l'orthocentre d'un triangle circonscrit à la parabole $y^2 = 2px$.

408. — Trouver les droites rencontrant en trois points la courbe

$$x = z^3, \qquad y = z^4.$$

409. — Développer le déterminant

$$\begin{vmatrix} x + a_1 & x & x & \dots & x \\ x & x + a_2 & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x & x & x & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$$

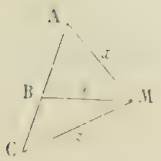
en se servant de sa dérivée seconde.

410. — D'un point pris sur l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ on abaisse les trois normales à cette ellipse autres que la normale en ce point. Lieu du centre du cercle passant par leurs pieds.

411. — Somme des puissances semblables des racines de l'équation

$$x^{2n} + px^m + q = 0.$$

412. — On considère dans un plan trois points en ligne droite A, B, C.



Quelle relation y a-t-il entre les distances x, y, z du point M variable dans ce plan aux points A, B, C (relation de Stewart). Interpréter cette équation en supposant que x, y, z sont les coordonnées d'un point de l'espace. Examiner à quelles régions de l'hyperboloïde ainsi trouvé correspondent des points réels du plan considéré, à quelles régions de l'hyperboloïde correspondent les points situés sur ABC, ceux situés à gauche, à droite de cette droite.

A quoi, dans le plan ABC, correspond une génératrice de l'hyperboloïde (ovale de Descartes)? En tirer une propriété focale des ovales de Descartes.

413. — Soit D le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de sa dérivée $f'(x)$. Posons $f(x) = D\psi(x)$ et $f'(x) = D\theta(x)$. Toute racine d'ordre k de l'équation $f(x) = 0$ est racine de l'équation $\theta(x) - k\psi'(x)$, et réciproquement toute racine commune aux équations $\psi(x)$ et $\theta(x) - k\psi'(x)$ est racine d'ordre k de $f(x) = 0$.

414. — On considère le polynome $z = A(x^2 + y) + Bx + Cy + D = 0$ et on en donne les valeurs pour (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Déterminer ce polynome. Discussion. Interprétation géométrique.

415. — Étude géométrique de l'hyperbole d'Apollonius. Généralisation dans l'espace.

416. — Considérons la courbe

$$x = t^2, \qquad y = \frac{t^3 - 1}{t}, \qquad z = \frac{t^2 + 1}{t}.$$

Trouver dans quels cas quatre points t_1, t_2, t_3, t_4 sont dans un même plan, dans quels cas trois points t_1, t_2, t_3 sont en ligne droite. Qu'arrive-t-il quand t est racine de $t^2 + t + 1 = 0$? Démontrer l'existence d'un point double.

417. — Démontrer que si la fonction $f(x)$ est définie et continue dans l'intervalle (a, b), que si elle admet dans cet intervalle des dérivées f', f'', f''' continues, on a

$$f(a) = f(b) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2}f''(a) + \frac{(b - a)^3}{6}f'''(c),$$

c étant compris entre a et b.

418. — Résolution de l'équation

$$x^5 - 1 = 0.$$

419. — Lieu des sommets des cônes de révolution passant par une ellipse donnée.

420. — Lieu des points de tangence de deux cercles tangents entre eux, tangents à une droite et à un cercle.

421. — Si l'équation $f(x) = 0$ a ses racines imaginaires, $ff'' - f'^2 = 0$ a des racines réelles.

422. — Série de Taylor. — Démontrer à l'aide de la formule de Taylor la formule

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x.$$

423. — Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde.

424. — Discuter à l'aide d'une courbe la dernière partie du problème de la composition écrite.

425. — Propriétés générales des surfaces réglées et développables.

426. — Démontrer que $\log y$ est la limite de $m(\sqrt[m]{y}-1)$ quand m augmente indéfiniment.

427. — Développer en série la fonction $y = (1+x)^x$.

428. — Etudier géométriquement le lieu des pôles des plans de section parabolique d'un hyperboloïde.

429. — Déterminer les normales issues d'un point à une ellipse.

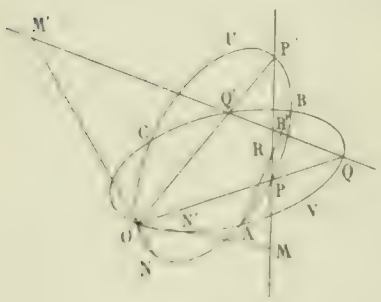
430. — On considère une quadrique passant par Ox, Oy, et un point A du plan xOy. On mène par ce point une droite quelconque qui rencontre respectivement Ox et Oy en B et C. Par B passe une deuxième génératrice de la surface; de même par C. Lieu du point de rencontre de ces deux génératrices.

QUESTIONS PROPOSÉES

1112. — On considère deux coniques fixes U et V et leurs quatre points de rencontre O, A, B, C.

Par le point O, on mène deux sécantes qui rencontrent la conique U en P et P', la conique V en Q et Q'; les droites PP' et QQ' rencontrent la sécante commune AB en R et R', puis on considère sur ces droites les points correspondants M et M' tels que

$$(MPP'R) = (M'QQ'R').$$



Cela fait on mène OM, qui rencontre la conique V en N', OM', qui rencontre la conique U en N, et on demande, lorsque M varie :

1° De trouver l'enveloppe de la droite MM';

2° De montrer que les droites MN et M'N' passent chacune par un point fixe;

3° De prouver que les six points A, B, M, M', N et N' sont sur une même conique C;

4° Et enfin de trouver le lieu du pôle de la droite AB par rapport à cette conique C.

OLLIER, professeur au lycée de Cahors.

1113. — Un kilogramme d'eau à 100° est placé dans un vase dont on supposera les parois absolument imperméables à la chaleur; il s'y vaporise lentement et la vapeur d'eau formée est enlevée, par un moyen quelconque, au fur et à mesure de sa production. Quand l'eau qui reste dans le vase sera entièrement congelée, quel sera son poids?

On supposera la chaleur latente de fusion égale à 80 calories et la chaleur latente de vaporisation représentée, en fonction de la température, par la formule $\lambda = 606{,}5 - \frac{2}{3}t$.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (Concours de 1901).

Mathématiques.

ALGÈBRE.

1084. — *Soit l'expression*

$$(1) \qquad y = \arccos \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin \frac{x}{e^x},$$

dans laquelle le symbole $\sqrt{x^2-1}$ représente la racine carrée positive de x^2-1.

1° Entre quelles limites peut varier x pour que l'arc y existe réellement?

2° La formule (1) définit-elle une seule fonction y de la variable x?

3° Calculer les dérivées des diverses fonctions y définies par (1).

Posons $u = \arccos \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $v = \arcsin \frac{x}{e^x}$. La fonction $y = u - v$ ne sera définie que pour les valeurs de x pour lesquelles les deux fonctions u et v sont elles-mêmes définies.

Pour que la fonction u soit définie, il faut d'abord que $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ait une valeur réelle, ce qui exige $|x| > 1$; cette condition remplie, il faut que $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ soit compris entre -1 et $+1$, ce qui exige

$$\frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} < 1;$$

cette condition étant toujours remplie, la fonction u ne sera définie que pour les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et -1 ou entre $+1$ et $+\infty$. Désignons par α l'arc compris entre 0 et π, qui admet pour cosinus $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; la fonction u admettra une infinité de déterminations données par la double formule

$$u = 2k_1\pi \pm \alpha.$$

Cherchons maintenant parmi les valeurs de x vérifiant les conditions $|x| > 1$, celles pour lesquelles la fonction v est définie. Ce sont les valeurs pour lesquelles on a

$$-1 < \frac{x}{e^x} < 1.$$

Pour cela, nous étudierons les variations de la fonction $z = \frac{x}{e^x}$ lorsque x varie de $-\infty$ à -1, puis de $+1$ à $+\infty$. La dérivée de cette fonction est $z' = \frac{1-x}{e^x}$; elle est positive pour $x < 1$, négative pour $x > 1$ et on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
z'		$+$				$-$	
z	$-\infty$	croit	$-e$		$\frac{1}{e}$	décroit	0
		$z < -1$				$0 < z < 1$	

Les seules valeurs qui conviennent sont les valeurs de x comprises entre 1 et $+\infty$. Désignons par β l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ qui admet pour sinus $\frac{x}{e^x}$, la fonction v admettra une infinité de déterminations données par la double formule

$$V = \begin{cases} 2k_2\pi + \beta \\ (2k'_2 + 1)\pi - \beta. \end{cases}$$

Remarquons que pour les valeurs de x qu'il y a lieu de considérer, α et β sont tous deux des arcs terminés dans le premier quadrant. Enfin, toutes les déterminations de la fonction y seront données par les deux formules :

$$y = 2k_1\pi \pm \alpha - (2k_2\pi + \beta) = 2k\pi \pm \alpha - \beta$$

et

$$y = 2k_1\pi \pm \alpha - [(2k'_2 + 1)\pi - \beta] = (2k' + 1)\pi \pm \alpha + \beta.$$

La dérivée sera donnée par la formule

$$y' = \pm\alpha' \mp \beta' = \pm \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \mp \frac{1-x}{\sqrt{e^{2x}-x^2}},$$

ou encore

$$y' = \pm \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \pm \frac{1-x}{\sqrt{e^{2x}-x^2}};$$

les signes à prendre devant les radicaux étant indépendants.

SAUVAGEON CÉDRIC, élève au Pensionnat Saint-Louis, à Saint-Étienne.

Bonnes solutions : MM. J. Haag, lycée de Nancy ; J. Marchal ; L. Odou, pensionnat Valbenoîte, à Saint-Étienne.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1085. — *On considère la famille des coniques représentées par l'équation*

$$(1)\quad (a\lambda^2 + a'\lambda + a'')x^2 + 2(b\lambda^2 + b'\lambda + b'')xy + (c\lambda^2 + c'\lambda + c'')y^2 + 2(d\lambda^2 + d'\lambda + d'')x$$
$$+ 2(e\lambda^2 + e'\lambda + e'')y + (f\lambda^2 + f'\lambda + f'') = 0,$$

dans laquelle λ représente un paramètre arbitraire. Par un point (α, β) du plan passent deux coniques (1) pour lesquelles le paramètre λ a les valeurs λ' et λ''.

1° Suivant les régions du plan où est pris le point (α, β), λ' et λ'' sont réels ou imaginaires. De quel degré est la courbe C qui sépare ces régions ?

2° On considère la région R pour laquelle λ' et λ'' sont réels ; suivant la position occupée par (α, β) dans R les courbes (1) passant par (α, β) sont elliptiques, hyperboliques ou paraboliques. Montrer que à ce point de vue la région R se partage en sous-régions limitées par des coniques Γ. Dire quel est le genre des coniques Γ.

3° *Application numérique : Déterminer les courbes C et Γ pour l'exemple suivant :*

$$(\lambda^2 + \lambda - 2)x^2 - y^2 + 2\lambda x - \lambda^2 = 0.$$

4° Généraliser la question n° 2 (séparation de la région R) en supposant que les coefficients de (1) sont, non plus des polynomes du second degré en λ, mais bien des polynomes d'un degré quelconque en λ.

1. Posons

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f,$$
$$g(x, y) = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f',$$
$$h(x, y) = a''x^2 + 2b''xy + c''y^2 + 2d''x + 2e''y + f''.$$

L'équation proposée prend la forme

$$(1)\qquad \lambda^2 f(x, y) + \lambda g(x, y) + h(x, y) = 0.$$

Par un point $P(\alpha, \beta)$ du plan passent deux coniques (1), correspondant aux racines λ' et λ'' de l'équation

$$\lambda^2 f(\alpha, \beta) + \lambda g(\alpha, \beta) + h(\alpha, \beta) = 0.$$

Ces racines seront réelles ou imaginaires suivant que l'on aura

$$[g(\alpha, \beta)]^2 - 4f(\alpha, \beta).h(\alpha, \beta) > 0 \qquad \text{ou} \qquad [g(\alpha, \beta)]^2 - 4f(\alpha, \beta).h(\alpha, \beta) < 0,$$

c'est-à-dire suivant que le point P sera dans l'une ou l'autre des régions limitées par la courbe C dont l'équation est

$$(C)\qquad [g(x, y)]^2 - 4f(x, y).h(x, y) = 0.$$

Cette courbe est du quatrième degré ; c'est l'enveloppe des coniques (1).

2 et 4. Posons

$$\delta(\lambda) = (a\lambda^2 + a'\lambda + a'')(c\lambda^2 + c'\lambda + c'') - (b\lambda^2 + b'\lambda + b'')^2 ;$$

$\delta(\lambda)$ est un polynome du quatrième degré en λ qui s'annule pour 0, 2 ou 4 valeurs réelles de λ. A ces valeurs correspondent les paraboles de la famille (1). Ces paraboles, qui sont tangentes à la courbe enveloppe C, limiteront dans la région R les sous-régions indiquées dans l'énoncé : ce sont donc les coniques Γ de l'énoncé.

Plus généralement, soit l'équation donnée sous la forme

$$(1)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

A, B, C, ..., F étant des polynomes d'un degré quelconque en λ ; les paraboles Γ de la famille (1) correspondront aux valeurs de λ qui annulent l'expression :

$$\delta(\lambda) = AC - B^2.$$

La nature des coniques (I) qui passent par un point (α, β) du plan dépendra de la position de ce point par rapport aux différentes paraboles Γ.

3. *Application numérique.* — L'équation proposée, ordonnée suivant les puissances de λ s'écrit :

$$\lambda^2(x^2+1)+\lambda x(x+2)-(2x^2+y^2)=0.$$

La courbe C a pour équation

$$x^2(x+2)^2+4(x^2+1)(2x^2+y^2)=0.$$

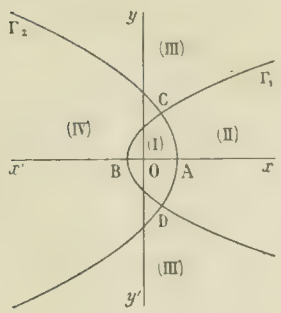
Elle n'a pas d'autre point réel que l'origine. Quelle que soit la position du point (α, β) dans le plan, les valeurs correspondantes λ', λ'' seront toujours réelles.

Formons maintenant

$$\delta(\lambda)=-(\lambda^2+\lambda-2)=-(\lambda-1)(\lambda+2).$$

Les courbes Γ se réduisent à deux

$$\Gamma_{-2}=-y^2-4x+4=0,$$
$$\Gamma_1=-y^2+2x+1=0.$$



Ce sont deux paraboles ayant pour foyer l'origine et pour axe l'axe des x ; elles se coupent en deux points à distance finie situés sur la droite $x=\frac{1}{2}$.

Désignons par (I), (II), (III), (IV) les quatre régions déterminées par ces deux paraboles, et étudions pour chaque région la disposition des racines λ', λ'' de l'équation

$$\lambda^2(\alpha^2+1)+\lambda\alpha(\alpha+2)-(2\alpha^2+\beta^2)=0$$

par rapport aux racines 1 et -2 de l'équation $\delta(\lambda)=0$. Nous aurons, en observant que les deux racines λ' et λ'' sont séparées par la valeur 0, le tableau suivant :

λ	$-\infty$	-2	0	$+1$	$+\infty$
Γ	$-$	Γ_{-2}	$-$	Γ_1	$+$
(I)	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
(II)	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
(III)	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
(IV)	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

En conséquence, si l'on prend le point $P(\alpha, \beta)$:

1° dans la région (I), on a $-2<\lambda'<\lambda''<1$; $\delta(\lambda')$ et $\delta(\lambda'')$ sont tous deux positifs, les deux coniques sont du genre ellipse ;

2° dans la région (II), on a $\lambda'<-2<\lambda''<1$: $\delta(\lambda')$ est négatif et $\delta(\lambda'')$ positif ; la première conique est une hyperbole, la seconde une ellipse ;

3° dans la région (III), on a $\lambda'<-2<1<\lambda''$; $\delta(\lambda')$ et $\delta(\lambda'')$ sont tous deux négatifs, les deux coniques sont du genre hyperbole ;

4° dans la région (IV), on a $-2<\lambda'<1<\lambda''$; la première conique est une ellipse et la seconde une hyperbole.

L. ODOU, pensionnat Valbenoite, à Saint-Etienne.

Bonnes solutions : MM. J. Haag, lycée de Nancy ; M. Laurence, lycée de Bordeaux ; J. Marchal ; R. Bouvaist ; Sauvageon Cédric, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne.

Épure.

1086. — Intersection d'une sphère et d'un tétraèdre. — *Le tétraèdre* SABC *repose sur le plan horizontal par la base* ABC, *qui est un triangle équilatéral de* 0m,15 *de côté,* AB *faisant avec la ligne de terre* xy *un angle de* 45°.

La face SCB *est un triangle équilatéral égal au précédent. Enfin l'angle dièdre* α *suivant l'arête* AB *est tel que* $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$, *ce qui achève de déterminer le tétraèdre.*

La sphère a pour centre le milieu de SA *et son rayon est de* 0m,06.

On demande de représenter à l'encre noire, en faisant la distinction des parties vues et cachées, ce qui reste du tétraèdre après avoir enlevé la partie comprise à l'intérieur de la sphère.

Les lignes de construction seront faites à volonté en traits discontinus noirs ou en traits continus de couleur. Toutes les courbes seront tracées à la main, au tire-ligne ou à la plume, mais sans faire usage de pistolet ou de règle.

L'épure comprendra toutes les constructions faites pour la mise en place du tétraèdre, ainsi que celle d'un point courant et des points remarquables de l'intersection avec les tangentes.

On prendra comme ligne de terre le petit axe de la feuille et le point B *sera placé à* 0,m04 *à gauche et à* 0m,02 *en avant du centre.*

Construction du tétraèdre. — Ayant placé la base ABC nous rabattons la face SBC sur le plan horizontal autour de BC; le sommet S vient en a. Dans le relèvement le point S décrit la circonférence de centre γ et de rayon γa dans le plan vertical γa. Ce plan vertical étant rabattu autour de γa, cette circonférence est décrite en aS_1. Prenons maintenant un plan vertical auxiliaire x_1y_1 perpendiculaire à ab afin de construire le plan SAB qui est de bout dans ce système ; sa trace verticale est $a'k'_1$ obtenue en prenant $ar = 4^{cm}$ et $rk'_1 = 10^{cm}$. La droite AS est l'intersection de ce plan SAB et du plan vertical γa ; pour l'obtenir nous cherchons le point K de cote 10cm de cette intersection. Sa projection verticale est K dans le système x_1y_1 et sa projection horizontale est k sur γa. Cette arête AK est rabattue en aK_1 qui rencontre en S_1 le cercle de centre γ et de rayon γa. On en déduit s et ensuite s', puisqu'on a en sS_1 la cote de S.

Intersection du tétraèdre et de la sphère. — La sphère a pour centre le point o, o', milieu de SA ; elle coupe les deux faces SAB et SAC du tétraèdre suivant des grands cercles et ne coupe pas les deux autres faces. Cette sphère rencontre l'arête SA en deux points E et F que nous avons, dans le rabattement en S_1a du plan vertical de SA, en prenant $O_1E_1 = O_1F_1 = 6^{cm}$.

En projection horizontale les deux sections sont symétriques par rapport à sa ; nous avons déterminé exactement la section par SAC. On a immédiatement le grand axe og, parallèle à ac, et le petit axe oh en rabattant en oH_3I_3 sur le plan horizontal de O le plan vertical oh et son intersection par la face SAC.

Pour avoir un point quelconque de la section, nous avons rabattu le plan sécant SAC sur le plan horizontal et sur le grand cercle de centre O_2, rabattement de cette section, nous avons pris un point quelconque M_2 que l'on a relevé en m, m' avec sa tangente $mt, m't'$, relèvement de la tangente M_2t. Ce rabattement aurait d'ailleurs pu fournir tous les points e, f, g, h déjà obtenus directement.

Pour la projection verticale nous avons déterminé directement les axes des ellipses.

Dans la face SAB nous avons le grand axe $\alpha\beta'$ qui est une frontale de ce plan et nous avons rabattu sur le plan de front de O la section de cette face par le plan mené par O perpendiculairement à cette frontale, ce qui a donné $o'P_4Q_4$, d'où P_4, et par suite p' sommet du petit axe.

Pour l'autre ellipse la construction a été analogue. On peut remarquer que les points les plus bas de ces deux ellipses sont à la même hauteur parce qu'ils proviennent des sommets des petits axes des projections horizontales, points qui ont même cote.

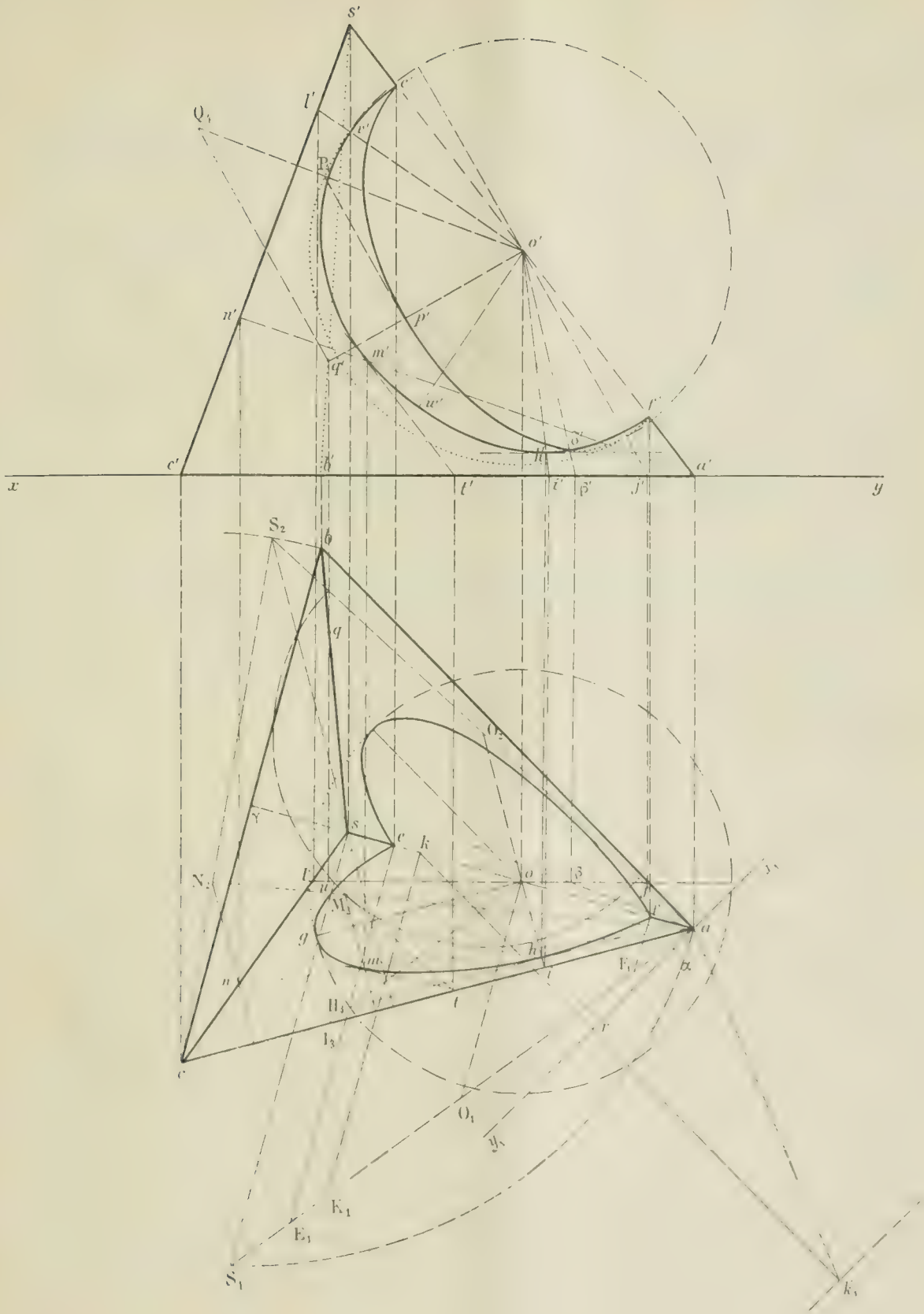
Les deux ellipses en projection verticale se coupent ; on a ainsi un point double en projection ; nous avons déterminé en $\alpha\zeta$ la ligne des points doubles apparents en prenant l'intersection du plan de front de O et du plan mené par SA et par la droite $\alpha\zeta$ qui joint a aux milieux des cordes perpendiculaires à xy et limitées aux côtés de l'angle bac, car ce plan est le plan diamétral conjugué des cordes de bout dans le dièdre BASC.

On aurait le point double ζ' lui-même en cherchant le point de l'une des deux sections planes projeté verticalement sur $o'\beta'$.

Représentation du solide. — Nous représentons le tétraèdre solide entaillé par la sphère. Tout reste sauf la portion EF de l'arête SA qui est intérieure à la sphère. D'autre part on conserve de la sphère les portions de contour apparent intérieures au tétraèdre et qui sont cachées.

Tout est vu sauf l'arête SB en projection verticale et l'arc $\alpha f'$ d'ellipse dans la face SAB.

N. C.



s'
l'
Q₄
P₄
o'
n'
p'
m'
q'
w'
c'
b'
h'
a'
x
t'
i'
β'
j'
y
S₂
b
q
O₂
s
e
k
N₂
l
u
o
β
M₃
g
m
h
a
F₁
α
n
H₃
t
I₃
c
O₁
y₁
K₁
E₁
S₁
k₁

Physique.

1087. — *On donne un aérostat, exactement sphérique, de 6 mètres de diamètre, rempli de gaz d'éclairage à la pression de 730^{mm} de mercure. La pression extérieure est de 720^{mm}. On demande d'évaluer en dynes la force qui tend à déchirer l'enveloppe du ballon sur une longueur de 0^{m},50, comptée suivant un arc de grand cercle.*

La force cherchée est le produit de la tension de l'étoffe par la longueur à déchirer :

$$f = Tl.$$

Nous pouvons appliquer, pour calculer T, la formule établie dans l'étude de la capillarité,

$$p = \frac{2T}{R};$$

p est ici la différence de pression entre le gaz du ballon et l'atmosphère :

$$p = 1 \times 13{,}6 \times 981 = 13341{,}6.$$

Remplaçons p, R et l par leurs valeurs, il vient

$$p = 13341{,}6 \times 150 \times 50 = 100\,062\,000 \text{ dynes},$$

c'est-à-dire une force de plus de 100 kilogrammes.

M. LAURENCE.

Remarque. — Sans se reporter à la capillarité, on pourrait établir la formule employée de la manière suivante. La force produite par une pression p sur un hémisphère de rayon R est égale au produit de p par la surface d'un grand cercle (problème des hémisphères de Magdebourg), soit

$$p.\pi R^2.$$

D'autre part, la tension T le long de la circonférence de l'hémisphère produit une force

$$T.2\pi R.$$

On a donc $\qquad p.\pi R^2 = T.2\pi R, \qquad$ ou $\qquad p = \frac{2T}{R}.$

Calcul trigonométrique.

1088. — *Dans un triangle* ABC *on donne :*

$$a = 11\,925^{m},30, \qquad A = 119^{\circ}37'8'', \qquad B = 35^{\circ}22'31''.$$

On demande de calculer :

1° *Les côtés b et c en centimètres ;*

2° *La surface en mètres carrés ;*

3° *Le rayon du cercle inscrit en centimètres.*

Les formules à employer sont les suivantes :

$$C = 180^{\circ} - A - B, \qquad b = a\frac{\sin B}{\sin A}, \qquad c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A, \qquad r = \frac{S}{p};$$

on trouve

$$C = 25^{\circ}0'21'', \qquad b = 7\,941^{m},62, \qquad c = 5\,798^{m},65$$

$$S = 20\,016\,660^{m^2}, \qquad r = 1\,559^{m},81.$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1070. – *Étant donnés trois points* F, F′, I, *de* I *comme centre, avec un rayon variable, on décrit un cercle ; puis on trace une conique ayant* F *et* F′ *comme foyers et tangente à ce cercle.*

Lieu du point de contact.

Prenons pour axe des x la droite F′F, pour axe des y la perpendiculaire au milieu de FF′ et désignons la longueur FF′ par $2c$.

Toute conique ayant pour foyers les points F et F′ peut se représenter par une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, avec $a^2-b^2=c^2$. Le point de contact de cette conique avec un cercle de centre I est le pied d'une normale abaissée de I sur la conique. Si donc nous désignons par x, y les coordonnées de ce point et par α, β celles du point I, nous aurons la relation

$$\frac{\alpha-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\beta-y}{\frac{y}{b^2}}.$$

Le lieu du point (x, y) s'obtient en éliminant a^2 et b^2 entre cette équation, celle de la conique et la relation $a^2-b^2=c^2$. Nous avons alors

$$\frac{a^2}{\frac{x}{\alpha-x}}=\frac{b^2}{\frac{y}{\beta-y}}=\frac{c^2}{\frac{x}{\alpha-x}-\frac{y}{\beta-y}},$$

par suite,

$$a^2=\frac{c^2x(\beta-y)}{\beta x-\alpha y},\qquad b^2=\frac{c^2y(\alpha-x)}{\beta x-\alpha y}.$$

Il n'y a plus qu'à porter ces valeurs dans l'équation de la conique ; cela nous donne

$$\frac{(\beta x-\alpha y)}{c^2}\left(\frac{x}{\beta-y}+\frac{y}{\alpha-x}\right)=1,$$

ou

$$(1)\qquad (\beta x-\alpha y)[x(x-\alpha)+y(y-\beta)]+c^2(x-\alpha)(y-\beta)=0.$$

C'est l'équation d'une cubique circulaire qui admet pour point double le point I, comme on le voit de suite sur l'équation, encore mieux, d'ailleurs, en portant les axes en ce point. Cette transformation donne l'équation nouvelle

$$(2)\qquad (\beta x-\alpha y)[x(x+\alpha)+y(y+\beta)]+c^2xy=0.$$

Les tangentes au point double sont rectangulaires : ce sont les droites ayant pour équation

$$\alpha\beta(x^2-y^2)+(\beta^2-\alpha^2+c^2)xy=0;$$

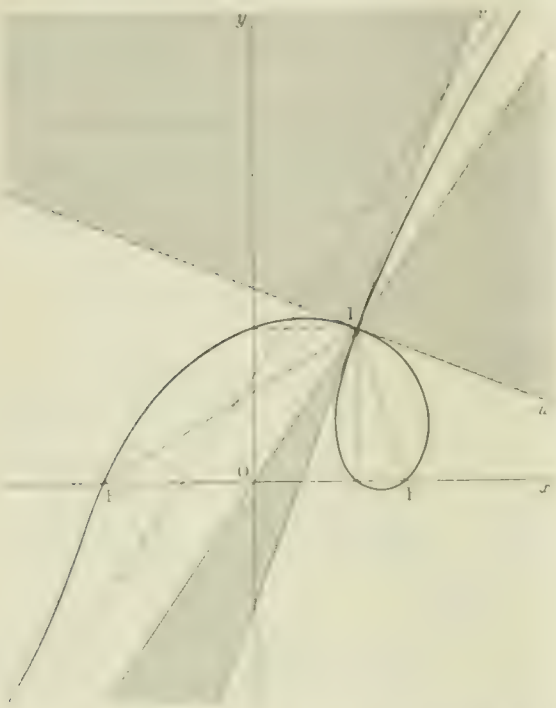
on vérifie aisément que ce sont les bissectrices de l'angle formé par IF et IF′.

Le problème revient donc, comme on le voit, à celui-ci : *trouver le lieu des pieds des normales abaissées d'un point sur les coniques homofocales à une ellipse ou à une hyperbole donnée.*

Mais si une droite IM est normale en M à une conique de ce faisceau, elle est tangente en M aussi à la seconde conique du faisceau qui passe en ce point ; par conséquent le lieu peut s'obtenir aussi comme lieu des contacts des tangentes menées du point fixe I aux diverses coniques homofocales du faisceau. Il est évident dès lors qu'il a un point double en I et que les tangentes en ce point sont les deux tangentes aux coniques qui y passent ; ce sont donc les bissectrices de l'angle formé par IF et IF′. D'autre part, sur toute droite passant en I, il y a un point ordinaire du lieu et un seul. Le lieu est donc une cubique ayant un point double en I avec tangentes rectangulaires.

Au point de vue tangentiel, les coniques homofocales sont inscrites dans un quadrilatère complet

dont les sommets opposés sont les deux couples de foyers et les points cycliques ; tous ces points sont donc des points de contact de tangentes issues de I ; par conséquent le lieu passe en ces six points. Il passe aussi aux pieds des perpendiculaires abaissées de I sur les axes, puisque ce sont des pieds de normales et au point à l'infini sur OI, car cette droite peut servir d'asymptote à une conique du faisceau.



Tout ce que nous venons de dire peut se vérifier sans peine sur l'équation (1) et va nous aider à construire la ligne qu'elle représente. Pour cela, nous porterons les axes parallèlement à eux-mêmes au point I et nous nous servirons de l'équation (2). Elle peut s'écrire

$$\beta x - \alpha y - (x^2 + y^2) + \alpha\beta(x^2 - y^2)$$
$$+ (\beta^2 - \alpha^2 + c^2)xy = 0\,;$$

et, sous cette forme, on aperçoit de suite une décomposition du plan en régions données par la droite IO et les deux bissectrices, Iu et Iv, de l'angle FIF'. Comme la cubique passe aux foyers, on voit de suite dans quelles régions la courbe ne passe pas. Nous nous sommes placés dans le cas où IF est plus petit que IF'. L'équation de l'asymptote est

$\beta x - \alpha y + \dfrac{c^2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = 0$; nous supposerons qu'elle passe entre O et F', ce qui a lieu lorsque $c\alpha$ est plus petit que $\alpha^2 + \beta^2$. Alors il n'y a plus qu'à tracer la courbe.

E. N. BARISIEN.

Bonnes solutions : MM. Fauvernier ; Bouvaist ; G. Hellias, lycée Jansou-de-Sailly ; J. Marchal ; M. Laurence ; J. Haag, lycée de Nancy ; P. Tronet, à Gand ; E. Berthelot ; T. Lemoyne.

QUESTIONS PROPOSÉES

1114. — On considère deux axes rectangulaires et un cercle variable (C) tangent en O à l'axe des x, puis une parabole tangente aussi en O au même axe, passant par le point A $(0, -a)$ et ayant pour direction diamétrale $x - y = 0$.

On demande le lieu des points de concours des tangentes communes à ces deux courbes quand le rayon du cercle varie.

L. Odou, pensionnat Valbenoite.

1115. — Lorsque deux paraboles P et P' ayant même sommet se coupent orthogonalement en ce point :

1° Il existe une infinité de triangles ABC inscrits dans P et circonscrits à P'.

2° Les normales en A, B, C sont concourantes.

3° Les hauteurs du triangle ABC enveloppent la développée d'une certaine parabole.

4° Si le paramètre de la parabole P' varie, le sommet O restant fixe, le côté BC se déplace parallèlement à lui-même.

R. Bouvaist.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Imprimerie Vuibert et Nony.

12e Année. N° 10 Juillet 1902.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE DES LENTILLES ÉPAISSES

par M. S. Bloch.

Les relations fondamentales des lentilles épaisses supposées aplanétiques sont établies dans cette théorie par la généralisation de deux équations, celle de Newton et celle de Lagrange-Helmholtz.

Généralisation de l'équation de Newton.

Cas d'une surface. — Soit un dioptre α (*fig.* 1) séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2, A_1 son foyer relatif au milieu 1, A_2 son foyer relatif au milieu 2, a_1 et a_2 ses distances focales comptées respectivement des foyers vers le sommet ; P_1 et P_2 deux points conjugués dans les deux milieux. L'équation de Newton est

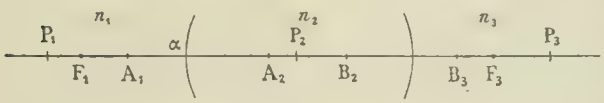


Fig. 1.

$$(1) \qquad \overline{A_1P_1}.\overline{A_2P_2} = a_1a_2.$$

Cas de deux surfaces. — Si, à la suite de ce premier dioptre, s'en trouve un second β ayant son centre sur la ligne P_1P_2 et séparant le milieu d'indice n_2 d'un troisième d'indice n_3, et que P_3 soit le conjugué de P_2 par rapport à ce deuxième dioptre, on a de même

$$(2) \qquad \overline{B_2P_2}.\overline{B_3P_3} = b_2b_3,$$

B_2, B_3, b_2, b_3 étant les foyers et les distances focales de ce deuxième dioptre.

Si F_1 est le foyer du système dioptrique pour le milieu 1 et F_3 son foyer pour le milieu 3, on déduit d'abord de (1) et de (2) la relation

$$(3) \qquad F_1P_1.F_3P_3 = c^{te}.$$

C'est là un problème bien connu : j'en rappelle sommairement la solution.

Définissons d'abord la position des foyers de la lentille :

Le foyer F_3 d'émergence est le conjugué, par rapport au deuxième dioptre, du foyer A_2 du premier ; l'équation (2) nous donne

$$\overline{B_2A_2}.\overline{B_3F_3} = b_2b_3, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{B_3F_3} = \frac{b_2b_3}{\overline{B_2A_2}} ;$$

de même, la position de F_1 est donnée par

$$\overline{A_1F_1}.\overline{A_2B_2} = a_1a_2, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{A_1F_1} = \frac{a_1a_2}{\overline{A_2B_2}}.$$

Pour démontrer maintenant la relation (3), nous éliminons P_2 entre les équations (1) et (2) ; la seconde s'écrit

$$(\overline{A_2P_2} - \overline{A_2B_2})(\overline{B_3P_3} - b_3) = b_2b_3.$$

Remplaçons A_2P_2 par sa valeur tirée de (1) :

$$\left(\frac{a_1a_2}{\overline{A_1P_1}} - \overline{A_2B_2}\right)\overline{B_3P_3} = b_2b_3.$$

Prenons F_1 comme origine du segment A_1P_1 et F_3 comme origine du segment B_3P_3 :

$$\left(\frac{a_1a_2}{\overline{F_1P_1} - \overline{F_1A_1}} - \overline{A_2B_2}\right)\overline{F_3P_3} - \overline{F_3B_3} = b_2b_3.$$

Remplaçons enfin F_1A_1 et F_3P_3 par les valeurs trouvées plus haut ; cette équation devient, toutes simplifications faites,

$$\overline{F_1P_1}.\overline{F_3P_3} = -\frac{a_1a_2b_2b_3}{\overline{A_2B_2}^2}.$$

Par définition, j'appelle distance focale d'incidence et je désigne par φ_1 le segment $-\frac{a_1b_2}{\sigma}$ (σ désignant le segment A_2B_2) et distance focale d'émergence φ_3 le segment $+\frac{a_2b_3}{\sigma}$ (*), de sorte qu'en posant

$$\pi_1 = \overline{F_1P_1} \qquad \text{et} \qquad \pi_3 = \overline{F_3P_3},$$

on a

$$\pi_1\pi_3 = \varphi_1\varphi_2.$$

Les distances focales sont définies de manière qu'on ait

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_3} = -\frac{n_1}{n_3}.$$

Cas d'un nombre quelconque de surfaces. — La démonstration précédente peut être répétée dans le cas où un troisième dioptre centré γ, séparant le milieu d'indice n_3 d'un milieu d'indice n_4, viendrait à la suite des précédents ; le produit des distances respectives de deux points conjugués aux foyers correspondants est cette fois égal à $\frac{\varphi_1\varphi_2c_3c_4}{\sigma_2}$, où $\sigma_2 = F_2C_2$.

Quel que soit le nombre des dioptres du système centré, on aura toujours

$$\pi\pi = \varphi\varphi, \tag{3}$$

φ et φ' désignant les distances focales du système, définies par les expressions

$$\varphi' = \frac{a_2b_3c_4d_5\ldots}{\sigma\sigma'\sigma''\ldots}, \qquad \varphi = \mp\frac{a_1b_2c_3d_4\ldots}{\sigma\sigma'\sigma''\ldots},$$

avec le signe $-$ si le nombre des dioptres est pair, $+$ s'il est impair.

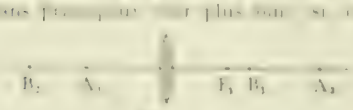
Le rapport $\frac{\varphi}{\varphi'}$ est toujours égal à $-\frac{n}{n'}$, n et n' étant les indices des milieux extrêmes, de sorte que, si les milieux extrêmes sont identiques, on a $\varphi = -\varphi'$.

Origines en deux points conjugués. — De l'équation (3) on déduit aisément la relation

$$\frac{PF}{PQ} + \frac{P'F'}{P'Q'} = 1,$$

où F et F' sont les foyers du système dioptrique, P et P' deux points conjugués, Q et Q' un autre couple de points conjugués.

(*) [illegible] du signe $-$ l'expression de φ_1 et non celle de φ_3 de la sorte, ces segments seront les distances des foyers aux plans principaux [illegible] plus loin ; si ce qui est tout à fait arbitraire, j'avais interverti les signes, les distances focales seraient les distances des foyers aux plans anti-principaux, mais cela ne changerait en rien la forme des relations établies. Pour se convaincre qu'avec les signes adoptés φ représente la distance du foyer au plan principal, il suffit d'envisager un cas particulier, par exemple celui d'une lentille mince biconvexe (fig. 2) avec milieux extrêmes identiques ; prenons pour sens positif, le sens de propagation de la lumière : a_1 est alors négatif, b_2 et σ également, et φ_1 est bien négatif.



Généralisation de l'équation de Lagrange-Helmholtz.

Cas d'une surface. — Je rappelle comment on obtient cette équation :

Soit un dioptre α (*fig.* 3) séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2, P_1 et P_2 deux points conjugués sur l'axe principal. Un rayon P_1I, émané de P_1 et faisant avec la direction positive de l'axe l'angle δ_1, se réfracte suivant IP_2 dont l'angle avec l'axe est δ. Abaissons du point I sur l'axe la perpendiculaire IL; on a

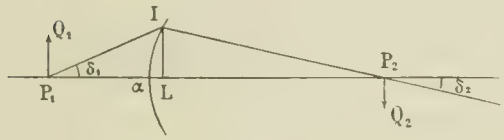


Fig. 3

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{LI}{P_1L} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg}\delta_2 = \frac{LI}{P_2L},$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tg}\delta_1}{\operatorname{tg}\delta_2} = \frac{P_2L}{P_1L}.$$

Comme nous restons dans les conditions d'aplanétisme, on peut négliger αL et écrire

$$\frac{\operatorname{tg}\delta_1}{\operatorname{tg}\delta_2} = \frac{\alpha P_2}{\alpha P_1}.$$

Le rapport $\frac{\operatorname{tg}\delta_1}{\operatorname{tg}\delta_2}$ sera négatif si P_1 et P_2 sont de part et d'autre de α, de sorte que si p_1 et p_2 sont respectivement les abscisses de P_1 et de P_2 comptées à partir de l'origine α, on a, en grandeur et en signe,

$$\frac{\operatorname{tg}\delta_1}{\operatorname{tg}\delta_2} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Mais si y_1 est un segment P_1Q_1 perpendiculaire à l'axe, y_2 son image P_2Q_2, on démontre dans tous les cours que $\frac{p_2}{p_1} = \frac{n_2}{n_1}\frac{y_2}{y_1}$, d'où l'équation de Lagrange-Helmholtz :

$$\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\delta_2} = \frac{n_2 y_2}{n_1 y_1}.$$

Le grossissement latéral $\frac{y_2}{y_1}$ a une valeur unique dans un système de plans conjugués P_1, P_2, donc aussi le *grossissement angulaire* $\frac{\operatorname{tg}\delta_1}{\operatorname{tg}\delta_2}$, et l'on voit que si nous envisageons un rayon quelconque émané de P_1 et faisant un angle quelconque δ_1 avec l'axe, son réfracté IP_2 fait avec l'axe un angle δ_2 tel que le rapport $\frac{\operatorname{tg}\delta_1}{\operatorname{tg}\delta_2}$ conserve toujours la même valeur.

Cas de plusieurs surfaces. — Cette relation s'étend immédiatement au cas d'un système centré formé d'un nombre quelconque de dioptres. Si un rayon émané de P_1, en se réfractant sur les surfaces sphériques successives, fait respectivement avec l'axe les angles $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ dans les milieux d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$, $y_2, y_3, \ldots$ étant les images successives d'un objet y_1 dont le pied est en P_1, on a

$$y_1 n_1 \operatorname{tg}\delta_1 = y_2 n_2 \operatorname{tg}\delta_2 = y_3 n_3 \operatorname{tg}\delta_3 \quad .$$

de sorte que, quel que soit le nombre des dioptres,

$$yn \operatorname{tg}\delta = y'n' \operatorname{tg}\delta',$$

y étant un segment objet perpendiculaire à l'axe, y' son image définitive, n et n' les indices des milieux extrêmes.

Grossissement latéral du système dioptrique.

Soient (*fig.* 4) un système centré formé d'un nombre quelconque de dioptres, P un plan perpendiculaire à l'axe pris dans le milieu d'incidence et dont la distance au foyer d'incidence, $FP = \pi$, P' son

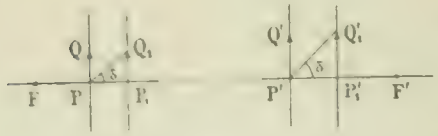


Fig. 4.

conjugué, $\overline{F'P'} = \pi'$, de sorte que π et π' satisfont à la relation

$$\pi\pi' = \varphi\varphi' ;$$

P_1 est un plan infiniment voisin de P, d'abscisse $\pi + \Delta\pi$, P'_1 son conjugué tel que $F'P_1 = \pi' + \Delta\pi'$; Q_1 est un point de P_1 dont le conjugué est Q'_1 sur le plan P'_1, de sorte que l'objet $P_1Q_1 = y_1$ a pour image $P'_1Q'_1 = y'_1$ et qu'au rayon incident PQ_1 correspond l'émergent $P'Q_1$. Les angles δ et δ' faits par ces rayons avec l'axe satisfont à l'équation de Lagrange-Helmholtz :

$$yn \operatorname{tg} \delta = y'n' \operatorname{tg} \delta',$$

où $\frac{y'}{y}$ désigne le grossissement latéral g dans le couple des plans conjugués P', P.

Dans le triangle PP_1Q_1, on a, en grandeur et en signe,

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{y_1}{\Delta\pi} ;$$

de même

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{y'_1}{\Delta\pi'} ,$$

et

$$\frac{y'}{y} = g = \frac{n}{n'} \cdot \frac{y_1}{y'_1} \cdot \frac{\Delta\pi'}{\Delta\pi} .$$

Mais $\frac{y'_1}{y_1} = g + \Delta g$, où Δg désigne la variation infiniment petite de g quand on passe du couple de plans conjugués P', P au couple infiniment voisin P'_1, P_1 ; en négligeant Δg devant g, l'équation précédente donne donc

$$g^2 = \frac{n}{n'} \frac{\Delta\pi'}{\Delta\pi} ,$$

relation intéressante : *Le carré du grossissement latéral est proportionnel au grossissement axial* $\frac{\Delta\pi'}{\Delta\pi}$.

A la limite, $\frac{\Delta\pi'}{\Delta\pi}$ devient la dérivée $\frac{d\pi'}{d\pi}$ qui (en dérivant l'équation de Newton) est égale à $-\frac{\pi'}{\pi}$;

$$g^2 = -\frac{n}{n'} \cdot \frac{\pi'}{\pi} .$$

Remplaçant $\frac{n}{n'}$ par $-\frac{\varphi}{\varphi'}$ et π' par $\frac{\varphi\varphi'}{\pi}$, on obtient

$$g^2 = \frac{\varphi^2}{\pi^2} , \qquad \text{d'où} \qquad g = \pm \frac{\varphi}{\pi} .$$

Cette ambiguïté de signe est la conséquence du choix arbitraire qu'on a fait pour le signe des distances focales ; il nous conduit à prendre ici le signe +:

$$g = \frac{\varphi}{\pi} = \frac{\pi'}{\varphi'} .$$

Points cardinaux du système dioptrique.

Le grossissement latéral varie de façon telle que pour deux valeurs différentes de π il ne peut reprendre la même valeur. On aura $g = +1$ pour $\pi = \varphi$ et $\pi' = \varphi'$: ce sont les *plans principaux*. On aura $g = -1$ pour $\pi = -\varphi$ et $\pi' = -\varphi'$: ce sont les *plans anti-principaux* ; enfin le grossissement angulaire sera égal à $+1$ quand $\frac{\operatorname{tg} \delta'}{\operatorname{tg} \delta} = +1$, ce qui entraine $\frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} = -\frac{\varphi}{\varphi'}$ et, par suite, $\pi = -\varphi'$ et $\pi' = -\varphi$: ce sont les *points nodaux*.

On voit que la détermination et les propriétés de tous les points cardinaux du système dioptrique résultent immédiatement des relations établies.

CONDITION POUR QU'IL EXISTE UN TÉTRAÈDRE INSCRIT DANS UNE QUADRIQUE ET CIRCONSCRIT A UNE AUTRE

par M. **A. Bourgonnier**, professeur au lycée d'Orléans.

Dans le numéro d'Août 1901 de la *Revue*, M. Duporcq propose une méthode simple pour établir la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation en λ de deux coniques pour qu'il existe des triangles inscrits dans une des coniques et circonscrits à l'autre.

Je me propose d'étendre cette méthode au problème analogue de l'espace et de vérifier le résultat obtenu en l'appliquant à un cas particulier.

Soient Q et Q′ deux quadriques telles qu'il existe des tétraèdres inscrits dans la première et circonscrits à l'autre; on sait qu'il existe une quadrique Γ conjuguée par rapport à deux de ces tétraèdres puisqu'ils sont inscrits dans la même quadrique (*Salmon*, Géométrie analytique à trois dimensions) et il est évident que Q et Q′ sont polaires réciproques par rapport à Γ qui admet comme tétraèdre autopolaire le tétraèdre autopolaire commun aux deux quadriques.

Si l'on prend ce tétraèdre pour tétraèdre de référence, on pourra toujours écrire

$$(Q) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$

$$(\Gamma) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0;$$

l'équation de Q′, polaire réciproque de Q par rapport à Γ, sera

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0.$$

Or pour qu'il existe un tétraèdre conjugué à Γ et circonscrit à Q′, il faut que l'on ait $a+b+c+d=0$.

Formons alors l'équation en λ; nous aurons

$$\left(a - \frac{\lambda}{a}\right)\left(b - \frac{\lambda}{b}\right)\left(c - \frac{\lambda}{c}\right)\left(d - \frac{\lambda}{d}\right) = 0.$$

Il faut donc exprimer que $a+b+c+d=0$, sachant que a^2, b^2, c^2, d^2 sont les racines de cette équation.

Or si l'on fait disparaître les premières puissances de a, b, c, d dans cette expression il vient, en posant $a^2 = \alpha$, $b^2 = \beta$, $c^2 = \gamma$, $d^2 = \delta$,

$$\Sigma\alpha^4 + 6\Sigma\alpha^2\gamma^2 - 4\Sigma\alpha^3\gamma + 4\Sigma\alpha^2\beta\gamma - 40\alpha\beta\gamma\delta = 0.$$

On est donc ramené à calculer cette fonction symétrique des racines de l'équation en λ,

$$\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta' = 0,$$

ce qui donne

$$\Theta^2 - 4\Delta\Phi)^2 - 64\Delta'\Delta^3 = 0,$$

qui est la condition cherchée.

Vérification. — Dans ce même numéro d'Août 1901 de la *Revue* (question 972), on a trouvé que le lieu des sommets des tétraèdres circonscrits à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ et dont les hauteurs sont normales à cette surface aux points de contact est l'ensemble des trois ellipsoïdes

$$\frac{a^2x^2}{(a^2+t)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2+t)^2} + \frac{c^2z^2}{(c^2+t)^2} - 1 = 0,$$

sachant que

$$\frac{a^2}{a^2+t} + \frac{b^2}{b^2+t} + \frac{c^2}{c^2+t} + 1 = 0.$$

Or si l'on forme l'équation en λ des deux quadriques, il vient

$$\lambda^2 - \lambda\left(1 + \frac{\Sigma a^2}{(a^2+t^2)}\right) + \lambda^2\left(\frac{\Sigma a^2}{a^2+t^2} + \frac{\Sigma a^2b^2}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}\right)$$

$$+ \lambda\left(\frac{\Sigma a^2b^2}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)} + \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)(c^2+t^2)}\right) + \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)(c^2+t^2)} = 0,$$

ou, si l'on pose

$$A = \frac{\Sigma a^2}{a^2+t^2}, \qquad B = \frac{\Sigma a^2b^2}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}, \qquad C = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)(c^2+t^2)},$$

$$\lambda^2 - \lambda(A+1) + \lambda^2 A + B + \lambda(B+C) + C = 0.$$

Or on a

$$\frac{a^2}{t^2+a^2} + \frac{b^2}{t^2+b^2} + \frac{c^2}{t^2+c^2} - 1 = 0\,;$$

en élevant au carré deux fois, il vient

$$(A+1)^2 = 4B - 2\sqrt{C},$$

ou enfin

$$(A+1)^2 - 4B^2 = 64C.$$

Or la condition précédente appliquée ici :

$$\frac{\Theta}{\Delta} = A + 1, \qquad \frac{\Phi}{\Delta} = A + B, \qquad \frac{\Delta}{\Delta} = C,$$

donne identiquement la même condition.

NOTE SUR LES CONIQUES

par M. **Georges Monnet**, élève de l'École Centrale

En considérant les coniques comme lieu des points dont le rapport des distances au foyer et à la directrice est constant, on peut établir directement la propriété de la tangente et ensuite celle des rayons vecteurs de la façon suivante :

Théorème. — *La tangente à une conique est bissectrice des rayons vecteurs.*

Soient Δ et Δ' les directrices, F et F' les foyers ; considérons une sécante MM'I (*fig.* 1).

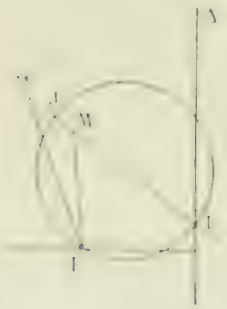


Fig. 1.

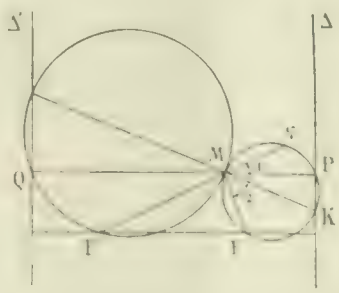


Fig. 2.

Si J est conjugué harmonique de I relativement à M et M', le cercle de diamètre IJ passera par F ; cela résulte des rapports connus

$$\frac{MF}{M'F} = \frac{MJ}{M'J} = \frac{MI}{M'I}.$$

Si M' se rapproche indéfiniment de M, la sécante MM' a pour limite la tangente en M et le cercle IJ a pour diamètre limite le segment MK (*fig.* 2).

Relativement à l'autre directrice on a un cercle analogue ; ces cercles passent évidemment par P et Q, pieds des perpendiculaires abaissées de M sur les directrices ; en outre ils sont tangents en M et par suite homothétiques par rapport à ce point.

Prolongeons MF jusqu'à sa rencontre φ avec le cercle MK, l'homothétie des deux cercles donne

$$\frac{M\varphi}{MF} = \frac{MP}{MQ}\,;$$

d'autre part la définition de la conique donne de suite

$$\frac{MF}{MF} = \frac{MP}{MQ}.$$

La comparaison de ces deux rapports montre que

$$M\varphi = MF,$$

et comme enfin MK est un diamètre il en résulte bien que les angles marqués 1 et 2 sont égaux.

Théorème. — *Si dans une courbe la tangente est bissectrice de deux rayons vecteurs, la somme ou la différence de ces rayons vecteurs est constante.*

Soient F et F′ (*fig.* 3) les deux points fixes ; considérons la podaire du point F relativement à la courbe donnée.

Sur la tangente MT on a un point P de la podaire et on sait que la normale en P passe par le milieu ω de MF, c'est-à-dire par le centre du cercle de diamètre FM. Dans le triangle isocèle MPω les angles 1 et 2 sont égaux; mais, d'après l'hypothèse faite sur la tangente, 2 et 3 le sont aussi ; donc $\widehat{1} = \widehat{3}$, et la droite MF′ est parallèle à Pω. Pω rencontre FF′ en un point O milieu de FF′ c'est-à-dire fixe, donc P décrit un lieu dont les normales sont concourantes : c'est un cercle.

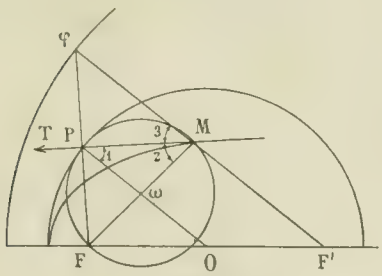


Fig. 3.

On voit de suite que le symétrique φ de F par rapport à P tombe sur MF′ et qu'on a

$$F'\varphi = 2OP = c^{te};$$

mais $\quad F'\varphi = MF + MF'.$

donc enfin $\quad MF + MF' = c^{te}.$

Le théorème se démontre d'une façon analogue si la tangente est bissectrice intérieure des rayons vecteurs ou si l'un des foyers est rejeté à l'infini.

Généralisation. — Ce dernier théorème peut se généraliser de la façon suivante :

Théorème. — *Étant donnés dans un plan une courbe* [C] *et un point* F *fixes, si on considère une courbe telle qu'en chacun de ses points* M *la tangente soit bissectrice de l'angle formé par* MF *et par la tangente* MQ *à la courbe* [C], *on a* $FM \pm MQ = -\text{arc } OQ + c^{te}$, O *étant fixe sur* C.

En effet, la podaire de F relativement à la courbe considérée (*fig.* 4) a pour normale au point P la droite PωQ′, parallèle à MQ; Q′ sera le milieu de FQ.

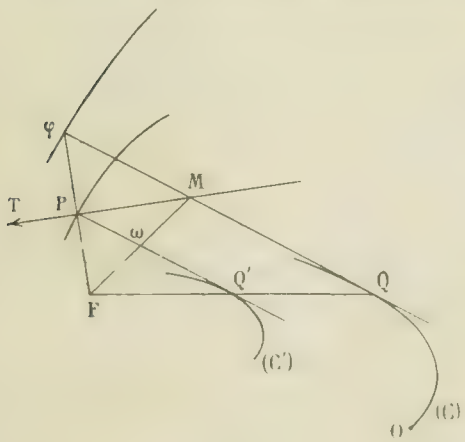


Fig. 4.

Il en résulte que F étant fixe, le point Q′ décrit l'homothétique [C′], moitié de [C]; les tangentes à ces homothétiques en Q et Q′ étant parallèles, PQ′ est tangente à [C′]; comme d'autre part elle est normale au lieu de P, P décrit une développante de [C′].

Le point φ, symétrique de F relativement à P, se trouve sur la droite MQ et décrit un lieu dont la normale est, par raison d'homothétie, parallèle à PQ′ ; c'est donc la droite MQ, et φ décrit une développante de [C].

Or on a $\quad MF + MQ = \varphi Q, \qquad \varphi Q = -\text{arc } OQ + c^{te};$

donc $\quad MF + MQ = -\text{arc } OQ + c^{te}.$

On peut remarquer que $MF = M\varphi$, et par suite que M peut être regardé comme le lieu des points équidistants de F et de la développante de [C]; dans le cas d'une ellipse [C] se réduit à un point, la développante devient un cercle et on retombe sur un théorème connu.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1052. — *On considère les coniques inscrites à un triangle équilatéral et passant par son centre de gravité. Lieu du point de concours des droites joignant les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés.*

Prenons pour axe des x l'un des côtés du triangle, pour axe des y la hauteur correspondante et désignons par $2a$ la longueur de l'un des côtés. Les trois côtés du triangle ont pour équations

$$y = 0, \qquad x\sqrt{3} + y - a\sqrt{3} = 0 \qquad \text{et} \qquad -x\sqrt{3} + y - a\sqrt{3} = 0.$$

Si nous posons

$$X = 2y, \qquad Y = -x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\,z, \qquad Z = x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\,z,$$

les coordonnées X, Y, Z seront les coordonnées barycentriques du point (x, y, z) par rapport au triangle choisi pour triangle de référence. Les coordonnées du centre du triangle sont alors 1, 1, 1 et l'équation générale des coniques inscrites

$$\alpha^2X^2 + \beta^2Y^2 + \gamma^2Z^2 - 2\beta\gamma YZ - 2\gamma\alpha ZX - 2\alpha\beta XY = 0.$$

En exprimant que ces coniques passent au point (1, 1, 1), nous avons la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha - 2\alpha\beta = 0.$$

L'équation de la droite qui joint l'un des sommets au point de contact avec le côté opposé, $Z = 0$, est $\alpha X - \beta Y = 0$; les équations des autres droites analogues sont $\beta Y - \gamma Z = 0$ et $\alpha X - \gamma Z = 0$. Le point de concours de toutes ces droites a donc pour coordonnées $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$. Nous voyons alors que le lieu de ce point a pour équation

$$\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{2}{YZ} - \frac{2}{ZX} - \frac{2}{XY} = 0,$$

ou

$$Y^2Z^2 + Z^2X^2 + X^2Y^2 - 2X^2YZ - 2Y^2ZX - 2Z^2XY = 0.$$

Ce lieu est donc une quartique qui a pour points doubles les trois sommets du triangle. Les deux tangentes au point $X = 0$, $Y = 0$ ont pour équation quadratique $X^2 + Y^2 - 2XY = 0$; elles sont confondues avec la droite $X - Y = 0$, c'est-à-dire avec la hauteur du sommet indiqué. La quartique a trois points de rebroussement aux sommets du triangle et les tangentes en ces points sont les hauteurs du triangle. Cela suffit pour affirmer que cette courbe est une hypocycloïde à trois rebroussements. Nous aurons une vérification en coupant par la droite de l'infini $X + Y + Z = 0$: en remplaçant Z par $-X - Y$, nous obtenons $(X^2 + Y^2 + XY)^2 = 0$; par conséquent la droite de l'infini est doublement tangente à la courbe aux points situés sur les droites $X^2 + Y^2 + XY = 0$. En portant dans cette équation les expressions de X et de Y et y faisant $z = 0$, nous obtenons $x^2 + y^2 = 0$, qui nous donne les deux directions isotropes.

La courbe est donc doublement tangente à la droite de l'infini aux points cycliques.

Nous avons reçu de M. E. Lemoine une solution toute semblable pour le cas d'un triangle quelconque. Seulement l'auteur emploie directement les coordonnées trilinéaires normales, sans indiquer le passage de ces coordonnées aux coordonnées cartésiennes ordinaires ; en outre, il n'étudie pas la nature du lieu.

Solutions analogues : MM. J. Marchal ; R. Bouvaist ; M. Laurence.

Solution géométrique. — Traitons le problème dans l'hypothèse plus générale où la forme du triangle ABC et la position du point P commun aux coniques sont quelconques.

Par la transformation tangentielle du deuxième ordre, corrélative de l'inversion triangulaire, les coniques S, inscrites au triangle et passant en P, se transforment en les points M de la conique Γ, transformée de P, quand que les droites qui se correspondent dans la transformation rencontrent un des côtés du triangle, BC par

exemple, en des points α_1, α_2 tels que $\widehat{BA\alpha_1} = -\widehat{CA\alpha_2}$. Si l'on applique cette propriété au point M et à la conique S, on voit que, α désignant le point de contact de S avec BC, $\widehat{BA\alpha} = -\widehat{CAM}$. Il en résulte immédiatement que le point de concours μ des droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, et le point M sont isogonaux, et que le lieu de μ est l'inverse triangulaire Σ de la conique Γ. C'est donc une quartique tricuspidale, dont les rebroussements sont les sommets A, B, C du triangle, les tangentes en ces points étant les droites PA, PB, PC.

Dans le cas particulier où ABC est équilatéral et où le point P est son centre, Γ, transformée de P, est le cercle inscrit au triangle, et Σ une hypocycloïde à trois rebroussements.

VASNIER.

1067. — *On considère l'hyperboloïde à une nappe*

$$x^2 + 2y^2 - 8z^2 - 1 = 0$$

et son cône asymptote.

1° *Trouver l'équation générale des sphères* (S) *passant par l'origine et par l'une des sections circulaires de ce cône. Trouver ensuite le lieu des centres de ces sphères et le lieu des pôles des plans tangents au cône asymptote par rapport à l'une d'elles. Expliquer géométriquement les résultats obtenus.*

2° *Trouver l'équation générale des sphères* (Σ) *orthogonales à toutes les sphères* (S). *On considère le système de cercles déterminés sur le plan des* xy *par celles de ces sphères qui ont leurs centres sur l'hyperboloïde. Former l'équation générale de ces cercles en fonction rationnelle d'un paramètre et trouver le lieu des points de rencontre de deux des cercles de ce système qui se coupent à angle droit.*

Les trois racines de l'équation en S sont -8, 1 et 2; la racine moyenne est 1 ; donc l'équation des plans cycliques réels est

$$x^2 + 2y^2 - 8z^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \equiv y^2 - 9z^2 = 0.$$

Ces deux plans ont donc pour équations respectives $y - 3z = 0$ et $y + 3z = 0$. Un plan quelconque de la première série est $y - 3z - \lambda = 0$; d'autre part, on a identiquement $x^2 + 2y^2 - 8z^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + y^2 - 9z^2$; par conséquent, pour les points de la section du cône asymptote par le plan λ, on a la relation

$$(1) \qquad S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(y + 3z) = 0.$$

C'est justement là l'équation de la sphère passant par l'origine et par le cercle envisagé. Toutes ces sphères forment un faisceau linéaire ayant pour cercle fixe un cercle infiniment petit déterminé dans le cône par le second plan cyclique $y + 3z = 0$.

Cela était évident géométriquement, car l'une de ces sphères coupant le cône suivant un cercle de l'une des séries doit le couper encore suivant un cercle de la deuxième série, et, comme elle passe au sommet du cône, ce cercle est infiniment petit.

Il résulte de là que le lieu des centres de ces sphères est la perpendiculaire élevée au plan du cercle fixe par son centre, c'est-à-dire la perpendiculaire au second plan cyclique menée par le sommet du cône.

Pour le vérifier analytiquement, annulons les trois dérivées partielles de (S) ; nous aurons

$$x = 0, \qquad 2y + \lambda = 0, \qquad 2z - 3\lambda = 0.$$

Le lieu du centre est donc la droite

$$(2) \qquad x = 0 \qquad 3y - z = 0.$$

Elle est dans le plan des yz et perpendiculaire à la trace du second plan cyclique sur ce plan ; c'est donc bien la droite que nous avions indiquée.

Soit x, y, z le pôle d'un plan tangent au cône asymptote par rapport à la sphère λ ; l'équation de ce plan sera

$$2xX + (2y + \lambda)Y + (2z + 3\lambda)Z + \lambda(y + 3z) = 0.$$

En exprimant qu'il vérifie les deux équations tangentielles du cône asymptote,

$$v = 0 \qquad \text{et} \qquad 8u^2 + 4v^2 - w^2 = 0,$$

nous aurons les deux équations du lieu :

$$(3)\qquad \begin{cases} y + 3z = 0, \\ 32x^2 + 42y^2 - \lambda^2 - (2z + 3y)^2 = 0. \end{cases}$$

Elles représentent une section plane de cône du second degré : la première donne le second plan cyclique qui passe au sommet du cône asymptote ; la seconde, le cône supplémentaire de ce cône asymptote et ayant pour sommet le centre de la sphère λ.

Ce résultat aussi est évident géométriquement. En effet tous les plans considérés passent au sommet du cône ; leurs pôles sont donc dans le plan polaire de ce point par rapport à la sphère λ, c'est-à-dire dans le plan tangent à l'origine, $y + 3z = 0$. En outre, le pôle de chacun d'eux est sur la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère λ sur ce plan ; or quand le plan considéré enveloppe le cône asymptote, cette perpendiculaire engendre le cône supplémentaire de celui-ci. Le lieu demandé est donc sa trace sur le plan $y + 3z = 0$: c'est une conique qui a un foyer à l'origine.

2° Soit $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$ une sphère Σ. En écrivant qu'elle est orthogonale à la sphère S, nous avons $\beta z + 3\gamma\lambda + \delta = 0$: cette relation doit être satisfaite quel que soit λ ; nous obtenons donc $\beta + 3\gamma = 0$ et $\delta = 0$, ce qui montre que la sphère Σ doit passer à l'origine et que son centre doit être situé dans le plan $y + 3z = 0$.

Ceci encore est évident géométriquement : car les sphères orthogonales à toutes les sphères d'un faisceau linéaire ont pour centres les divers points du plan radical commun et coupent à angle droit le cercle commun. Ici le plan radical a pour équation $y + 3z = 0$ et le cercle est un cercle-point ayant son centre à l'origine. Tout ce que nous avons vu s'ensuit.

Si on astreint maintenant le centre de la sphère Σ à être sur l'hyperboloïde, on a en outre

$$\alpha^2 + 2\beta^2 - 8\gamma^2 - 1 = 0,$$

et, en tenant compte de $\beta + 3\gamma = 0$,

$$\alpha^2 + 10\gamma^2 = 1.$$

L'équation générale des sphères cherchées est donc

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x + 2\gamma(3y - z) = 0,$$

avec

$$\alpha^2 + 10\gamma^2 = 1.$$

La seconde équation peut s'écrire

$$10\gamma^2 = 1 - \alpha^2, \qquad \frac{10\gamma}{1 - \alpha} = \frac{1 + \alpha}{\gamma} = t,$$

et les deux dernières relations donnent α et γ en fonction de t :

$$\alpha = \frac{t^2 - 10}{t^2 + 10}, \qquad \gamma = \frac{2t}{t^2 + 10}.$$

Le système de cercles indiqué a donc finalement pour équation générale

$$(4)\qquad x^2 + y^2 - 2\frac{t^2 - 10}{t^2 + 10}x + \frac{12t}{t^2 + 10}y = 0.$$

Désignons alors par t et t' les paramètres des deux cercles qui se coupent en un point (x, y) ; si nous exprimons que ces deux cercles sont orthogonaux, nous aurons la relation

$$(t^2 - 10)(t'^2 - 10) + 36tt' = 0,$$

ou

$$t^2t'^2 - 10t^2 + t'^2 + 36tt' - 100 = 0,$$

ou enfin

$$t^2t'^2 - 10t^2 + t'^2 + 36tt' + 100 = 0.$$

D'ailleurs l'équation (4), où l'on regarde x et y comme les coordonnées du point choisi, est celle qui donne les deux valeurs de t dont nous venons de parler ; elle peut s'écrire

$$(x^2 + y^2 - 2xt^2 + 12yt + 10x^2 + y^2 - 2xt^2 = 0,$$

et donne

$$t + t' = \frac{12y}{x^2 + y^2 - 2x}.$$

$$tt' = \frac{10(x^2 + y^2 + 2x)}{x^2 + y^2 - 2x}.$$

En portant ces valeurs dans la relation d'orthogonalité, nous aurons de suite l'équation du lieu qui, simplifiée et réduite, est

$$19(x^2 + y^2)^2 - 36(x^2 + y^2) = 0.$$

Elle se décompose en $x^2 + y^2 = 0$ et

$$(5) \qquad x^2 + y^2 = \frac{36}{19}.$$

Le lieu demandé est donc un cercle concentrique à l'origine.

La solution $y = ix$ provient des deux valeurs de t fournies par l'équation

$$t^2 - 6it - 10 = 0,$$

pour chacune desquelles le cercle (4) se décompose en $y - ix = 0$ et une autre droite; ces deux cercles se coupent orthogonalement puisque la droite $y - ix = 0$ est perpendiculaire à elle-même et ont en commun tous les points de cette droite. De même la solution $y + ix = 0$ provient des valeurs de t qui sont racines de l'équation

$$t^2 + 6it - 10 = 0.$$

Pour expliquer géométriquement ces derniers résultats, il suffit de remarquer que le centre de la sphère Σ décrit dans l'espace un cercle, le cercle d'intersection de l'hyperboloïde par le plan $y + 3z = 0$; par conséquent le centre du cercle de cette sphère qui est situé dans le plan des xy décrit une ellipse, la projection de ce cercle sur le plan des xy. Cette ellipse a son centre à l'origine et tous les cercles du système passent en ce point. La ligne des centres de deux cercles orthogonaux de ce système est donc une corde de l'ellipse vue du centre sous un angle droit; on sait qu'elle enveloppe un cercle concentrique à l'ellipse. La podaire par rapport au centre est donc le cercle lui-même et le lieu du second point de rencontre des deux cercles est un cercle homothétique à celui-ci, dans le rapport 2, par rapport à l'origine.

Quant à la solution exceptionnelle que nous avons rencontrée, il n'y a rien de plus à en dire que ce qui vient d'être dit.

G. FAUVERNIER.

Bonnes solutions : MM. J. Marchal; J. Haag, lycée de Nancy.

Solutions satisfaisantes : MM. J. Franceschini, lycée de Marseille; A. de Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux; J.-D. Dufaut, à Nontron; M. Laurence.

CONCOURS DE 1902

CONCOURS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Mathématiques (Paris et Départements).

1116. — 1° Soient Γ, Γ_1 les traces d'un ellipsoïde E et de son cône asymptote sur le plan Π qui passe par les extrémités A, B, C de trois diamètres conjugués ωA, ωB, ωC de cet ellipsoïde. — On sait que ces traces sont des coniques concentriques et homothétiques.

Démontrer que le rapport de similitude des coniques Γ, Γ_1 ne change pas quand on fait varier soit les trois diamètres conjugués ωA, ωB, ωC, soit l'ellipsoïde E.

2° Cela étant, on donne trois points A, B, C non en ligne droite et l'on considère tous les ellipsoïdes E dont trois diamètres conjugués ont pour extrémités les points A, B, C.

Démontrer que les ellipsoïdes E et leur cône asymptote sont coupés par le plan ABC suivant des coniques *fixes* Γ, Γ_1. — On désignera par 2α et par 2β les longueurs des axes de la conique Γ.

3° On prend pour axes de coordonnées les axes de symétrie Ox, Oy de la conique Γ et la perpendiculaire Oz au plan ABC; trouver l'équation de celui des ellipsoïdes E qui a pour centre un point donné ω de coordonnées x_1, y_1, z_1.

4° Soient P, Q, R les traces sur le plan ABC des axes de symétrie de cet ellipsoïde E ayant pour cen

tre [illegible], montrer que le triangle PQR est conjugué par rapport à la conique Γ_1. — Déterminer le cercle C_1 conjugué du même triangle PQR.

5° Montrer que les points P, Q, R peuvent, dès lors, être obtenus par l'intersection d'un cercle C_2 et d'une hyperbole équilatère H ayant ses asymptotes parallèles aux axes de symétrie de la conique Γ_1.

6° Le cercle C_2 coupe l'hyperbole équilatère H aux points P, Q, R et en un quatrième point S que l'on construira.

Déterminer les puissances, par rapport au cercle C_2, de l'origine O des coordonnées et du point de rencontre des hauteurs du triangle PQR. — Construire le cercle C_2.

7° Examiner le cas particulier où la conique Γ est un cercle.

(*26 mai, de 8 h. 1/2 à 4 h. 1/2.*)

Physique (Paris).

I. — Mesure de l'intensité de la pesanteur.

II. — **1117.** — On a constaté que, dans les limites où on veut l'employer, un certain ressort à boudin s'allonge proportionnellement à la force qui agit sur lui, l'allongement étant de 1 centimètre pour une force de 10^{6} dynes. L'une des extrémités du ressort est invariablement attachée à un point O ; à l'autre extrémité B on peut suspendre une masse.

Dans un endroit où l'accélération de la pesanteur est de 981 unités C.G.S., l'air sec, la température de 0°, la pression mesurée par une colonne de mercure à 0° de 76 centimètres de hauteur, on suspend au ressort un cube de 500 centimètres cubes et de masse spécifique 2. Avec un système optique formant un microscope à axe vertical, et dont l'objectif est à une distance invariable du point O, un observateur vise un micromètre porté par la face horizontale supérieure du cube et mesure le grandissement linéaire γ donné par l'objectif. On a, d'autre part, mesuré la distance du micromètre à l'objectif, laquelle est de $0^{cm},70$, et on sait que la convergence de l'objectif est de 250 dioptries.

On transporte le système dans un autre endroit, l'air étant toujours sec, la température 0° et la pression encore mesurée par une colonne de mercure de 76^{cm}. On ne trouve plus l'image au point ; il faut agir sur le tirage de l'oculaire et on trouve que le nouveau grandissement est le triple du premier. On demande quelle est, dans le second lieu, la valeur de l'accélération due à la pesanteur.

Ayant exprimé cette accélération en unités C.G.S., on cherchera quelle serait sa nouvelle expression si on prenait pour unité de temps la cent-millième partie du jour solaire moyen et comme unité de longueur la longueur du pendule simple qui, dans ce second lieu, effectuerait dans le vide une oscillation complète pendant la nouvelle unité de temps.

On établira l'équation exacte qui donnerait la valeur de l'accélération mais, dans le calcul numérique, on s'arrêtera au chiffre des unités dans le système C.G.S.

(*23 mai, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

Chimie (Paris).

I. — Étudier comparativement les conditions de formation, les procédés de préparation et les propriétés physiques et chimiques des acides fluorhydrique, chlorhydrique, bromhydrique, iodhydrique.

II. — **1118.** — Un certain poids de bioxyde de baryum pur et anhydre est chauffé modérément dans un courant d'oxyde azotique jusqu'à réaction complète. On ajoute au produit obtenu dissous dans l'eau et additionné d'acide sulfurique une liqueur titrée de permanganate de potassium jusqu'au moment où la liqueur prend une coloration persistante.

D'autre part, un même poids de bioxyde de baryum, mis sous la forme de bouillie, est décomposé par une quantité convenable d'une solution chlorhydrique et la liqueur, après précipitation par le sulfate d'argent, est titrée par le permanganate de potassium en présence d'acide sulfurique. Un litre et demi de liqueur titrée contenant $5^{gr},27$ de permanganate par litre sont décolorés dans ce dernier cas.

On demande :

1° Le poids de chacune des fractions de bioxyde de baryum :

2° La quantité de sulfure de plomb qui aurait pu être oxydée dans le second cas par la liqueur avant le traitement par le permanganate ;

3° Le volume d'oxyde azotique absorbé par le bioxyde de baryum ;

4° Le volume de la liqueur titrée de permanganate utilisé dans le premier cas.

Masses atomiques : K = 39, Mn = 55, Ba = 137, Pb = 207.

(*28 mai, de 1 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Mathématiques.

1119. — On donne, relativement à un système de trois axes rectangulaires $Oxyz$, un point P, de coordonnées a, b, c, et un cercle [C] défini par les équations

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0, \qquad z = 0.$$

1° Former l'équation du lieu des projections orthogonales du point P sur les droites qui rencontrent à la fois le cercle [C] et l'axe Oz. Reconnaître que ce lieu se compose d'une sphère et d'une surface du quatrième degré [S].

2° Trouver les sections de la surface [S] par les plans contenant Oz, et le lieu des centres de ces sections.

3° Déterminer les limites entre lesquelles sont compris les plans parallèles à xOy qui coupent la surface [S] en des points réels. Trouver les sections de cette surface par le plan xOy et par le plan, parallèle à ce dernier, qui contient le point P.

N. B. — Il sera tenu compte aux candidats des explications géométriques qu'ils pourront fournir des résultats trouvés par le calcul.

(30 mai, de 7 h. à 11 h.)

Physique et Chimie.

Physique : I. — Télescope de Newton.

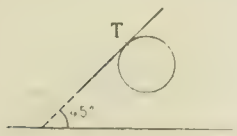
II. — Détermination du poids spécifique d'un corps solide par la méthode du flacon. Corrections à faire aux mesures.

Chimie : Préparation du formène (CH^4) et de l'éthylène (C^2H^4). — Analyse de ces deux corps. — Indiquer les propriétés qui permettent de les distinguer l'un de l'autre.

(31 mai, de 7 h. à 10 h.)

Épure.

1120. — La ligne de terre étant tracée à 22cm au-dessus du bord inférieur de la feuille, on donne une sphère de 4cm de rayon et dont le centre, ayant ses projections à 11cm du bord de droite de la feuille, est à 10cm au-dessus du plan horizontal et à 8cm en avant du plan vertical de projection. — Une seconde sphère, de 3cm de rayon, est tangente intérieurement à la première, au plus haut des deux points de son contour apparent vertical où la tangente T est inclinée à 45° sur la ligne de terre, comme l'indique la figure ci-contre.



I. — Représenter par ses projections la courbe d'intersection de la première sphère avec le cylindre circonscrit à la seconde, et dont les génératrices sont de front et parallèles à la tangente T.

On déterminera : un point quelconque (qui sera désigné par m) de la courbe, et la tangente en ce point (qu'on désignera par t) ; les points ($m_1, m_2, \ldots$) sur les contours apparents verticaux et les tangentes ($t_1, t_2, \ldots$) en ces points ; les points sur le contour apparent horizontal du cylindre et les tangentes à la projection verticale de la courbe aux projections verticales de ces points.

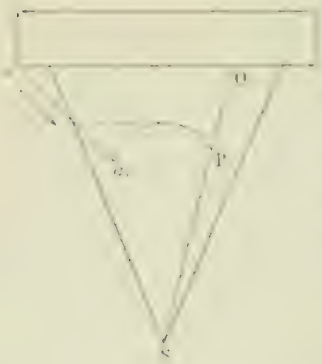
Les points sur le contour apparent horizontal de la sphère seront déduits du tracé de la projection verticale de la courbe. On indiquera la ligne des points doubles apparents en projection horizontale.

II. — On supposera ensuite que la sphère, entaillée par le cylindre, soit éclairée par des rayons lumineux parallèles aux génératrices du cylindre, et on figurera par des hachures l'ombre portée sur le plan horizontal par la sphère pleine ainsi trouée.

Pour la détermination des parties vues (en traits pleins noirs) et cachées (points ronds noirs), on supposera que les deux corps existent ; la seconde sphère sera considérée comme auxiliaire et sera représentée, en traits rouges, ainsi que toutes les constructions. Le cylindre sera prolongé dans les deux sens un peu au delà de la première sphère.

N. B. — Les candidats pourront indiquer dans une courte légende, en un coin de la feuille, les méthodes qu'ils emploieront.

(2 juin, de 7 h. à 11 h.)



Lavis.

Exécuter à teintes plates le lavis d'un cône de révolution surmonté par un prisme à base carrée.

L'axe du cône sera vertical et fera avec les génératrices un angle égal à un quart d'angle droit. Le sommet sera situé au-dessous du parallèle de base.

Le prisme reposera, par sa base, sur le plan de ce parallèle ; une de ses faces sera de front ; il possédera le même axe que le cône et il portera ombre sur ce dernier (ombre usuelle à 45°).

(3 juin, de 2 h. à 4 h.)

Calcul trigonométrique.

1121. — Dans un triangle, on donne deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$b = 548^m,55, \qquad c = 315^m,84, \qquad A = 59^\circ\,58'\,56'' = 66^{\text{grades}},6469.$$

I. — Calculer a, B et C, ainsi que la surface S à l'aide des formules

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}, \qquad a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}, \qquad S = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

II. — Calculer le rayon du cercle inscrit.

(3 juin, de 4 h. à 5 h.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Mathématiques.

1122. — On considère la courbe (C) décrite, lorsque α varie, par le point M, dont les coordonnées rectangulaires sont

$$x = \frac{\cos 4\alpha}{\cos^2\alpha}, \qquad y = \frac{\sin 4\alpha}{\cos^2\alpha};$$

on montrera que x, y s'expriment rationnellement au moyen de $t = \operatorname{tg}\alpha$; on formera l'équation en coordonnées polaires de la courbe (C) et on construira cette courbe.

Soit A le point double réel de la courbe (C) ; le lieu du point d'intersection P de la droite AM et de la droite dont l'équation est $y = x\operatorname{tg}\alpha$, lorsque α varie, est un cercle (K).

A chaque point M de la courbe (C) correspond par la construction précédente un point P du cercle (K) ; la droite OM, qui joint l'origine des coordonnées O au point M, rencontre la courbe (C) en trois points M_1, M_2, M_3, autres que le point M ; soient P_1, P_2, P_3 les points du cercle (K) qui correspondent respectivement aux points M_1, M_2, M_3 comme le point P correspond au point M.

On montrera que les coordonnées des points M_1, M_2, M_3 s'expriment rationnellement au moyen de $\operatorname{tg}\alpha$, et que les points P, P_1, P_2, P_3 sont les sommets d'un carré dont la grandeur est indépendante de α.

Quels sont les lieux décrits, lorsque α varie, par les points d'intersection de OM avec les diagonales du carré, de la droite dont l'équation est $y = x\operatorname{tg}\alpha$ avec les côtés du carré ?

Soit M_1 celui des points M_1, M_2, M_3 qui est du même côté que le point M par rapport au point O ; quels sont, lorsque α varie, le lieu du conjugué harmonique du point O par rapport aux points M, M_1 et le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée sur la droite OM du point d'intersection des tangentes en M, M_1 à la courbe (C) ?

(6 juin, de 8 h. à 2 h.)

Physique.

I. — Décrire brièvement les méthodes de Dumas et de Mayer pour la mesure de la densité des vapeurs.

II. — **1123.** — Un solide a la forme d'un prisme droit dont la base ABC, horizontale, est un triangle équilatéral dont la *hauteur* a 3 centimètres. Ce solide est monté sur un axe vertical, passant par le centre O de la base, qui permet de le faire tourner d'un mouvement uniforme, à raison de dix tours par seconde.

On suppose d'abord que ce prisme est formé d'une substance transparente et qu'il est éclairé par un fais-

ceau parallèle de rayons lumineux dirigés horizontalement. Pour ces rayons, qui sont monochromatiques, l'indice de la substance formant le prisme est égal à $\sqrt{3}$. A la suite de ce prisme tournant, on dispose une lunette astronomique dont l'axe optique est horizontal. Montrer que cet axe optique doit être incliné de 60 degrés au moins sur la direction des rayons incidents, pour que des rayons qui ont traversé le prisme sans subir aucune réflexion viennent converger au principal de l'objectif.

On recouvre maintenant les faces de ce prisme d'un vernis noir parfaitement absorbant, et on l'éclaire par le même faisceau. Etudier l'ombre portée par le solide tournant sur un écran normal à la direction des rayons incidents. (On admettra qu'un éclairement discontinu agissant pendant la fraction $\frac{1}{p}$ du temps total produit sur l'œil la même impression qu'un éclairement continu p fois plus faible).

On suppose enfin que les faces de ce prisme sont argentées et parfaitement réfléchissantes et qu'il est éclairé pendant sa rotation par une source lumineuse très petite placée en un point S, à trois centimètres de distance de l'axe de rotation. L'œil d'un observateur, placé de manière à recevoir des rayons réfléchis, aperçoit une ligne lumineuse. Montrer que cette ligne appartient à une courbe plane C dont on donnera la définition géométrique et dont on indiquera sommairement la forme. — Dans quelle région du plan horizontal passant par S devra être situé l'œil, pour qu'il aperçoive un point donné M de cette courbe?

Montrer qu'il y a un arc de cette courbe C, relative au point S, qui restera toujours invisible, quelle que soit la position de l'œil, si la source placée en S est réelle. Décrire un dispositif qui permettrait de rendre cet arc visible.

(17 juin, de 8 h. à 2 h.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1124. — Si par un point M variable sur la normale à une ellipse en un point P, on mène à cette ellipse les trois autres normales, le centre de gravité G des pieds de ces trois normales décrit le diamètre symétrique de celui qui aboutit en P par rapport aux axes. Quand le point G est au centre, le point M se trouve au milieu du segment de la normale PM compris entre les axes.

M. D'Ocagne.

1125. — Deux des cordes joignant les pieds des quatre normales menées d'un point M à une ellipse ne peuvent être parallèles entre elles qu'autant qu'elles le sont à une des directions des côtés du losange formé par les sommets. Le point M est alors sur le diamètre perpendiculaire à la seconde direction des côtés de ce losange.

M. D'Ocagne.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE (1901, 2e session).

Géométrie analytique.

1073. — *On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy. Sur l'axe des x on considère deux points A et B dont les distances à l'origine sont les racines de l'équation $d^2 - 2pd + q^2 = 0$. On projette les points A et B en a et b respectivement sur la droite $y = mx$. Ceci posé :*

1° *Former l'équation générale des coniques Δ circonscrites au quadrilatère AabB et distinguer les points du plan par lesquels passe une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

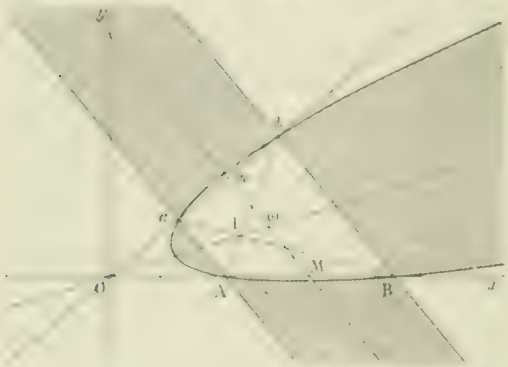
2° *Trouver le lieu γ des centres des coniques Δ et séparer sur ce lieu les points qui sont des centres d'ellipses de ceux qui sont des centres d'hyperboles.*

Démontrer géométriquement que si l'on fait varier m le lieu du centre de γ est un cercle.

3 *Indiquer, pour une valeur déterminée de m, une construction de l'hyperbole équilatère qui fait partie des coniques Δ ; puis déterminer et construire l'hyperbole équilatère dont les tangentes en a, b sont rectangulaires.*

4 *Former l'équation aux coefficients angulaires des normales menées de l'origine à l'hyperbole équilatère qui répond à $m = 1$, $q = 0$, et démontrer que deux seulement des coefficients angulaires sont réels.*

1 Soient d et d' les abscisses des points A et B ; l'équation du faisceau des droites Aa, Bb est de la forme



$$\left[y + \frac{1}{m}(x - d)\right]\left[y + \frac{1}{m}(x - d')\right] = 0,$$

ou, en développant,

$$\left(y + \frac{1}{m}x\right)^2 - \frac{1}{m}(d + d')\left(y + \frac{1}{m}x\right) + \frac{1}{m^2}dd' = 0.$$

Remplaçant dans cette équation $d + d'$ par $2p$, dd' par q^2, il vient

$$\left(y + \frac{1}{m}x\right)^2 - 2\frac{p}{m}\left(y + \frac{1}{m}x\right) + \frac{q^2}{m^2} = 0 ;$$

en sorte que l'équation des coniques Δ est de la forme

$$\left(y + \frac{1}{m}x\right)^2 - 2\frac{p}{m}\left(y + \frac{1}{m}x\right) + \frac{q^2}{m^2} + \lambda y(y - mx) = 0.$$

Deux de ces coniques se réduisent à des paraboles ; l'une correspond à $\lambda = 0$; elle se compose des deux droites Aa, Bb ; l'autre correspond à $\lambda = \frac{4(1 + m^2)}{m^2}$. C'est une véritable parabole dont la direction de l'axe est donnée par la médiane OI des triangles OAa, OBb. La séparation du plan en régions est faite par ces deux paraboles ; par un point P du plan passe une conique Δ : une ellipse si le point P est pris dans l'une des régions couvertes de hachures, une parabole si le point P est sur la séparatrice et une hyperbole dans tous les autres cas. Cette conique Δ peut se réduire à deux droites. Pour cela, il faut et il suffit que le point donné P soit en ligne droite avec deux des points A, B, a, b.

2. Le lieu γ des centres des coniques Δ est la conique des neuf points, ici décomposée en deux droites : l'une, la droite Mm qui joint les milieux des segments AB et ab ; c'est la ligne des centres pour la parabole réduite aux deux droites parallèles Aa et Bb ($\lambda = 0$) ; l'autre, la droite OI qui est dans toutes les coniques Δ le diamètre conjugué des cordes parallèles à Aa et Bb ; sur cette droite, les points situés à gauche de ω sont des centres d'hyperbole (le point O et le point I sont des centres d'hyperboles réduites à deux droites) ; les points situés à droite de ω sont des centres d'ellipses.

Le centre de la conique γ n'est autre que le point ω, milieu de Mm. Si Oab pivote autour du point O, le point m décrit le cercle de diamètre OM ; le point ω décrit le cercle homothétique par rapport à M, le rapport d'homothétie étant $\frac{M\omega}{Mm} = \frac{1}{2}$.

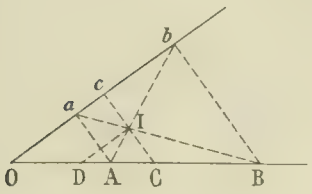
3 Pour une valeur donnée de m, on trouve une hyperbole équilatère passant par les quatre points A, B, a, b. Elle correspond à la valeur $\lambda = -\frac{1 + m^2}{m^2}$ du paramètre. Pour la construire, il suffira d'en connaître le centre. Un premier lieu du centre est la droite OI.

D'autre part, cette hyperbole équilatère étant circonscrite aux triangles rectangles Aab, Bba, est tangente en chacun des points a, b, à la hauteur abaissée de ce point sur l'hypoténuse correspondante. Le point de rencontre T des deux tangentes est le pôle de la corde ab et la droite Tm est le diamètre des cordes parallèles à ab. Le centre E de l'hyperbole équilatère est à l'intersection de OI avec Tm. Pour avoir les asymptotes, on décrira de m comme centre avec mE comme rayon une demi-circonférence qui rencontrera la droite Oab en deux points F et G ; les asymptotes sont les droites EF, EG.

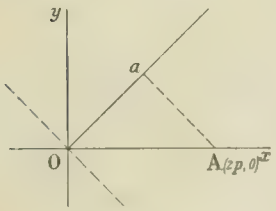
On sait qu'une hyperbole équilatère n'admet pas d'autres tangentes rectangulaires que ses deux asymptotes ; pour que les tangentes en a et b soient rectangulaires, il faudra nécessairement que l'hyperbole équilatère se réduise à ses asymptotes.

Reportons-nous à la construction précédente ; dire que les tangentes en a et b sont rectangulaires, c'est dire que Ab et Ba sont rectangulaires ; mais alors aT se confond avec aB, bT avec bA ; chacune de ces droites rencontrant l'hyperbole en trois points fait partie de la courbe, qui se trouve ainsi réduite aux deux droites Ab et Ba, rectangulaires.

Le problème se trouve donc ramené à construire la droite Oab de façon que l'angle AIB soit un angle droit. Un premier lieu du point I est le cercle décrit sur AB comme diamètre ; pour en avoir un second, menons par le point I la parallèle Cc aux droites Aa, Bb ; c'est la polaire du point O par rapport aux deux droites parallèles Aa, Bb. Le point C est un point fixe ; le point c, quand Oab pivote autour du point O, décrit un cercle de diamètre OC et par suite le point I milieu de Cc décrit un cercle homothétique, dont le diamètre est CD (D étant le milieu de OC). Le point I sera donc à l'intersection de deux cercles décrits respectivement sur AB et CD comme diamètres ; CI donne la direction Cc perpendiculaire à la droite Oab.



4. Pour $m = 1$, $q = 0$, la droite Oab est la première bissectrice ; l'un des points donnés, B par exemple, est en O et Bb se confond avec la seconde bissectrice. Les coniques Δ sont les coniques circonscrites au triangle rectangle isocèle OAa et tangentes en O à la seconde bissectrice.



L'hyperbole équilatère a pour équation

$$(x+y)^2 - 2p(x+y) - 2y(y-x) = 0.$$

c'est-à-dire (1) $$x^2 + 4xy - y^2 - 2p(x+y) = 0,$$

et il s'agit de lui mener des normales de l'origine. L'une de ces normales est la première bissectrice. Les pieds des trois autres seront donnés par l'intersection avec l'hyperbole d'Apollonius

$$x(2x - y - p) - y(x + 2y - p) = 0,$$

ou (2) $$2x^2 - 2xy - 2y^2 - p(x - y) = 0.$$

Les normales sont les droites qui joignent l'origine aux points de rencontre des courbes (1) et (2), distincts de l'origine ; le faisceau de ces droites a pour équation

$$(x - y)(x^2 + 4xy - y^2) - 4(x + y)(x^2 - xy - y^2) = 0,$$

ou encore $$-3x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 5y^3 = 0.$$

Leurs coefficients angulaires sont les racines de l'équation

$$5\mu^3 + 3\mu^2 + 3\mu - 3 = 0.$$

Pour avoir le nombre des racines réelles, il faut appliquer le théorème de Rolle ; l'équation dérivée,

$$15\mu^2 + 6\mu + 1 = 0,$$

a ses racines imaginaires. La suite de Rolle ne présente qu'un seul intervalle $(-\infty, +\infty)$ et l'équa-

tion considérée a une seule racine réelle, positive, d'ailleurs comprise entre 0 et 1. On peut donc mener, de l'origine, à l'hyperbole équilatère (1), deux normales réelles seulement.

P. L.

Solutions exactes : MM. Bouvaist ; J. Haag ; J. Marchal ; Léon Odou.

Trigonométrie.

Calcul

1077. — *Calculer les arcs compris entre 90° et 180° qui vérifient la formule*

$$\operatorname{tg}^2(3x+\alpha) = \frac{\cos^3\beta \operatorname{tg}\gamma}{\sqrt[3]{a}}.$$

$a = 0,542853.$ $\alpha = 72^\circ 30' 35'',4.$ $\beta = 210^\circ 38' 24'',5,$ $\gamma = 124^\circ 17' 41'',8.$

L'équation donnée peut s'écrire

$$\operatorname{tg}^2(3x+\alpha) = \frac{\cos^3(\beta-\pi) \cdot \operatorname{tg}(\pi-\gamma)}{\sqrt[3]{a}}.$$

Posant
$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\cos^3(\beta-\pi) \cdot \operatorname{tg}(\pi-\gamma)}{\sqrt[3]{a}},$$

on est ramené à l'équation
$$\operatorname{tg}^2(3x+\alpha) = \operatorname{tg}^2\varphi,$$

d'où
$$\operatorname{tg}(3x+\alpha) = \pm\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\pm\varphi),$$
$$3x+\alpha = k\pi \pm \varphi,$$
$$x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\alpha \mp \varphi}{3}.$$

Calculant l'angle φ au moyen des tables on trouve

$$\varphi = 56^\circ 47' 51'',06.$$

La formule $x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\alpha - \varphi}{3}$ donne deux valeurs entre 90° et 180° pour $k = 2$, $k = 3$, savoir

$$x_2 = 114^\circ 39' 5'',22 \quad \text{et} \quad x_3 = 174^\circ 39' 5'',22.$$

L'autre formule $x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\alpha + \varphi}{3}$ donne une seule valeur entre 90° et 180° pour $k = 3$, savoir

$$x_3' = 136^\circ 47' 11'',18.$$

P. L.

Problème

1078. — 1° *Calculer les côtés b, c d'un triangle ABC connaissant l'angle A, la hauteur h relative au côté BC et le rayon r' du cercle exinscrit situé dans l'angle A.*

2° *Condition entre les données A, h, r' pour que le problème soit possible.*

3° *Résolution graphique du triangle ABC ; discussion de la construction.*

4° *Calculer en fonction des données la distance des centres des deux autres cercles exinscrits au triangle ABC.*

1. *Calcul des côtés et discussion.* — Partons des relations

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bc\sin A = (p-a)r',$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2}.$$

Nous avons ainsi trois relations entre a, b, c et les éléments A, h, r' donnés. Les deux premières nous donnent

$$bc = \frac{ah}{\sin A}, \qquad b + c = \frac{a(h + r')}{r'}.$$

Portant dans la troisième, il vient $a^2 = a^2 \frac{(h + r')^2}{r'^2} - 2ah \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$,

d'où
$$a = \frac{2r'^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2}}{h + 2r'}.$$

On en déduit $\quad b + c = \frac{2(h + r')r'}{h + 2r'} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}, \qquad bc = \frac{hr'^2}{(h + 2r') \sin^2 \frac{A}{2}};$

b et c sont donc les racines d'une équation du second degré :

$$X^2 - \frac{2(h + r')r'}{h + 2r'} \operatorname{cotg} \frac{A}{2} X + \frac{hr'^2}{(h + 2r') \sin^2 \frac{A}{2}} = 0.$$

Pour que les valeurs de b et c soient acceptables, il faut et il suffit qu'elles soient réelles et positives. Ces conditions remplies, on est sûr que a, b, c vérifieront la double inégalité

$$| b - c | < a < b + c.$$

puisque les valeurs trouvées vérifient l'équation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

La condition de réalité est la suivante :

$$(h + r')^2 \cos^2 \frac{A}{2} - h(h + 2r') \geqslant 0,$$

ou encore, en remplaçant $\cos^2 \frac{A}{2}$ par $1 - \sin^2 \frac{A}{2}$,

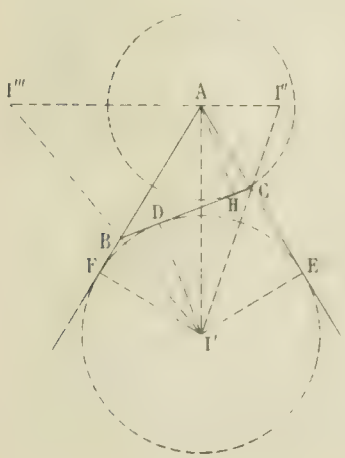
$$r'^2 - (h + r')^2 \sin^2 \frac{A}{2} \geqslant 0.$$

Elle exige que l'on ait $\qquad \sin \frac{A}{2} \leqslant \frac{r'}{h + r'}.$

Cette condition remplie, les valeurs de b et c seront nécessairement positives, puisque leur somme et leur produit sont positifs.

2. *Résolution graphique.* — Pour construire le triangle, on prendra un cercle I′ de rayon r' ; on circonscrira à ce cercle un angle A égal à l'angle donné. Ayant décrit de A comme centre avec h comme rayon un autre cercle, il suffira de mener une tangente commune intérieure à ces deux cercles pour obtenir en position la base BC du triangle.

Le problème n'est possible que si l'on a $\mathrm{AI}' \geqslant h + r'$;



or $\mathrm{AI}' = \frac{r'}{\sin \frac{A}{2}}$. On retrouve la condition précédente :

$$\sin \frac{A}{2} \leqslant \frac{r'}{h + r'}.$$

3. *Calcul de la distance* $d = \mathrm{I''I'''}$ *des centres des deux autres cercles exinscrits.* — Désignant par r'', r''' les rayons de ces deux cercles, on aura

$$r'' = \mathrm{AI''} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \mathrm{AI''} \cos \frac{A}{2}.$$

$$r''' = \mathrm{AI'''} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \mathrm{AI'''} \cos \frac{A}{2}.$$

d'où
$$d = \mathrm{I''I'''} = \mathrm{AI''} + \mathrm{AI'''} = \frac{r'' + r'''}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Or on a

$$r + r' = \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = \frac{Sa}{(p-b)(p-c)} = a\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} = a \operatorname{cotg}\frac{A}{2},$$

d'où

$$d = \frac{a \operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{2r'^2 \cos\frac{A}{2}}{(h-2r')\sin^2\frac{A}{2}}.$$

P. L.

Bonnes solutions de MM. R. Bouvaist ; H. Janois, Section normale, Châlons-sur-Marne ; R. Manen, petit séminaire de Massals ; Maréchal ; F. Pégorier, à Carcassonne.

Physique.

1074. — *D'un point A on laisse tomber un corps sans vitesse initiale, et d'un point B situé plus bas, sur la même verticale, à la distance a, on lance un corps verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale v_0 ; on demande :*

1° *D'écrire les formules du mouvement des deux mobiles ;*

2° *Où et à quelle époque se fera la rencontre, et quelles seront alors les vitesses respectives des deux mobiles ? Quelle doit être la vitesse initiale pour que la rencontre ait lieu au milieu de AB ?*

3° *Quelle doit être la vitesse initiale pour que la rencontre ait lieu à l'instant où les mobiles sont animés de vitesses égales et de signes contraires (époque et lieu de la rencontre dans cette hypothèse) ?*

1. Prenons le sens AB pour sens positif. Les équations du mouvement du premier corps seront, avec A comme origine,

$$e_1 = \frac{1}{2}gt^2, \qquad v_1 = gt,$$

et celles du mouvement du second corps, avec B comme origine,

$$e_2 = \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t, \qquad v_2 = gt - v_0.$$

2. Quand les deux mobiles se rencontreront, on aura

$$e_1 - e_2 = a, \quad \text{d'où} \quad v_0 t = a \quad \text{et} \quad t = \frac{a}{v_0},$$

puis, en portant cette valeur de t dans l'expression de e_1,

$$e_1 = \frac{1}{2}\frac{a^2 g}{v_0^2}.$$

La vitesse du premier mobile sera $v_1 = \frac{ag}{v_0}$, celle du second, $v_2 = \frac{ag}{v_0} - v_0 = \frac{ag - v_0^2}{v_0}$.

Pour que la rencontre ait lieu au milieu de AB, on doit avoir

$$\frac{1}{2}\frac{a^2 g}{v_0^2} = \frac{1}{2}a, \qquad \text{d'où} \qquad v_0 = \sqrt{ag};$$

alors la vitesse du second mobile est nulle.

3. Pour que les vitesses soient égales et de signes contraires au moment de la rencontre, on doit avoir

$$\frac{ag}{v_0} = \frac{v_0 - ag}{v_0}, \qquad v_0 = \sqrt{2ag};$$

alors l'époque de la rencontre sera $t = \sqrt{\frac{a}{2g}}$.

et la distance du point de rencontre au point A sera

$$e_1 = \frac{1}{2} g \frac{a}{2g} = \frac{a}{4}.$$

M. LAURENCE.

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist, H. Lacape, F. Loire, R. Manen, M. Souls, P. Thonet, P. Tribier, Vial.

Chimie.

1075. — *Soit un réservoir vide de gaz ayant 60 mètres cubes de capacité. On se propose de le remplir d'air formé de 76,9 d'azote et de 23,1 d'oxygène, en poids, à la pression 750mm, à la température de 15° et d'état hygrométrique* $e = \frac{3}{4}$.

Pour cela on décompose de l'azotate d'ammonium pur et sec. La vapeur d'eau résultant de cette décomposition sera entièrement condensée et envoyée ensuite dans le réservoir. Le gaz provenant de la décomposition de l'azotate sera chauffé au rouge très vif.

1° *Quel poids d'azotate d'ammonium faudra-t-il décomposer?*

2° *Quel poids de phosphore blanc faudra-t-il brûler pour enlever l'excès d'oxygène ?*

3° *Quel poids de chaux anhydre faudra-t-il pour absorber l'excès de vapeur d'eau ?*

Coefficient de dilatation de l'air : $\alpha = 0{,}00367$.

Densité de la vapeur d'eau, 0,625. *Masse du litre d'air,* 1gr,293.

Tension de la vapeur saturée à 15°, 0m,0127.

Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

V désignant le volume du réservoir, t la température, a la masse du litre d'air *normal*, P, P′, P″, les masses respectives des trois éléments de l'air qu'il s'agit de reconstituer, d, d', d'' leurs densités, h, h', h'' leurs pressions dans le mélange, on a

$$P = Vda\frac{h}{760}\frac{1}{1+\alpha t}, \qquad P' = Vd'a\frac{h'}{760}\frac{1}{1+\alpha t}, \qquad P'' = Vd''a\frac{h''}{760}\frac{a}{1+\alpha t}.$$

Les densités d et d' de l'azote et de l'oxygène se calculent à l'aide des données, si l'on exprime que les densités des gaz sont entre elles comme les poids moléculaires ; on a ainsi

$$d = 0{,}625 \times \frac{28}{18} \qquad \text{et} \qquad d' = 0{,}625 \times \frac{32}{18}.$$

Pour la vapeur d'eau, on a $d'' = 0{,}625$ et $h'' = \frac{3}{4} \times 12{,}7 = 9{,}5$.

On en conclut

(1) $$h + h' = 750 - 9{,}5 = 740{,}5.$$

D'autre part, $\frac{P}{P'}$ exprime la composition de l'air sec et, en faisant le quotient des deux premières expressions, on a $\frac{P}{P'} = \frac{dh}{d'h'}$, d'où, en se servant des données,

(2) $$\frac{h}{h'} = \frac{769}{231} \times \frac{32}{28}.$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$h = 586{,}4, \qquad h' = 154{,}1$$

et l'on a ainsi toutes les données numériques pour le calcul de P, P′, P″. On trouve :

Azote : $P = 55\,158$ grammes
Oxygène : $P' = 16\,569$
Eau $P'' = 574$ —

La décomposition de l'azotate d'ammonium au rouge vif s'exprime par l'équation suivante, au-dessous de laquelle on a écrit les masses respectives des corps formulés :

$$AzO\,AzH^4 = Az^2 + O + 2H^2O.$$
$$80 \qquad 28 \quad 16 \quad 36$$

On en déduit aisément :

Poids d'azotate fournissant $55\,158^{gr}$ d'azote. . . . . $157\,593^{gr}$,
Poids d'oxygène fourni en même temps . . . . . $31\,519$,
Poids de vapeur d'eau . . . . . $70\,917$.

Le poids d'oxygène à absorber est donc

$$31\,519 - 16\,569 = 14\,950^{gr};$$

or la combustion du phosphore produit de l'anhydride phosphorique P^2O^5 dans lequel le poids du phosphore est à celui de l'oxygène comme 62 est à 80 ; le poids de phosphore nécessaire pour enlever l'excès d'oxygène est donc

$$\frac{62}{80} \times 14\,950 = 11\,586^{gr}.$$

Le poids de vapeur d'eau à absorber est

$$70\,917 - 574{,}47 = 70\,342^{gr};$$

or l'extinction de la chaux vive produit de la chaux éteinte $CaOH^2O$ dans laquelle le poids d'oxyde de calcium est à celui de l'eau comme 56 est à 18 ; le poids de chaux nécessaire pour enlever l'excès de vapeur d'eau est donc

$$\frac{56}{18} \times 70\,342 = 218\,843^{gr}.$$

Ceci suppose, bien entendu, qu'on ne tienne pas compte de l'eau qui aura été absorbée par l'anhydride phosphorique.

(Dans la solution envoyée par M. Souris il n'a pas été tenu compte des conditions de température et de pression indiquées par l'énoncé.)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1090. — *On considère une parabole* P *et un cercle* C *ayant son centre au sommet de* P. *Lieu du point de rencontre d'une tangente à* C *et de la tangente à* P *qui lui est perpendiculaire. Construire la courbe lorsque le cercle* C *passe par le foyer de* P.

Soit $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole P rapportée aux axes habituels ; l'équation du cercle C est alors $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

Une tangente quelconque à ce cercle a pour équation

$$(1) \qquad x \cos\varphi + y \sin\varphi - R = 0.$$

Le coefficient angulaire est $-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$. La tangente à la parabole perpendiculaire à cette tangente a pour coefficient angulaire $\operatorname{tg}\varphi$; son équation est, d'après une formule connue,

$$(2) \qquad y = x \operatorname{tg}\varphi + \frac{p}{2\operatorname{tg}\varphi}.$$

Nous aurons l'équation du lieu en éliminant φ entre les équations (1) et (2). Ce calcul peut se faire aisément de la manière suivante.

L'équation (2) peut s'écrire $2x\sin^2\varphi - 2y\sin\varphi\cos\varphi + p\cos^2\varphi = 0$, et l'équation (1) rendue homogène en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ devient

$$(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 - R^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0$$

ou

$$(y^2 - R^2)\sin^2\varphi + 2xy\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi(x^2 - R^2) = 0.$$

Nous avons ainsi deux équations homogènes et du deuxième degré par rapport à $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$. Il suffit d'égaler à zéro le résultant de ces trinomes, ce qui nous donne

$$[2x(x^2 - R^2) - p(y^2 - R^2)]^2 + 4y^2(2x^2 + y^2 - R^2)(x^2 - R^2 + px) = 0.$$

Cette équation est fort compliquée, et il serait pénible d'en déduire la forme de la courbe qu'elle représente.

Pour construire cette courbe il sera beaucoup plus aisé de résoudre les équations (1) et (2) par rapport à x et y, ce qui donne

$$x = \frac{(2R - p\cos\varphi)\cos\varphi}{2}, \qquad y = \frac{p\cos^2\varphi + 2R\sin^2\varphi}{2\sin\varphi},$$

et d'étudier les variations de x et de y quand on fait varier φ.

Comme $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ sont fonctions rationnelles d'un même paramètre $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, x et y sont aussi fonctions rationnelles de ce paramètre, par suite la courbe est unicursale et du sixième degré.

En changeant φ en $\varphi + 2\pi$, x et y ne sont pas modifiés; par suite, pour avoir toute la courbe il suffit de faire varier φ dans un intervalle d'étendue égale à 2π. Mais comme en changeant φ en $-\varphi$, x ne change pas et y change simplement de signe, la courbe est symétrique par rapport à Ox. Si l'on fait varier φ dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, à toute valeur de φ appartenant à l'intervalle $(-\pi, 0)$ correspond une valeur égale et de signe contraire comprise dans l'intervalle $(0, \pi)$, et ces valeurs donnent des points de la courbe symétriques par rapport à Ox.

Pour avoir toute la courbe il suffira donc de faire varier φ dans l'intervalle $(0, \pi)$, de construire la portion de courbe correspondante et de tracer la symétrique de cette portion par rapport à Ox.

Nous ferons cette construction seulement dans le cas où $R = \frac{p}{2}$; les valeurs de x et de y sont dans ce cas :

$$x = \frac{p(1 - \cos\varphi)\cos\varphi}{2}, \qquad y = \frac{p(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}{2\sin\varphi};$$

les dérivées de x et de y par rapport à φ sont

$$x' = \frac{p(2\cos\varphi - 1)\sin\varphi}{2}, \qquad y' = \frac{p\cos\varphi(2\cos^3\varphi - \cos^2\varphi - 3\cos\varphi + 1)}{2\sin^2\varphi}.$$

x s'annule pour $\varphi = 0$ et pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$; y devient infini pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$. Son numérateur $\cos^3\varphi + \sin^2\varphi$ est toujours positif quand φ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; lorsque φ varie de $\frac{\pi}{2}$ à π, $\cos^3\varphi$ décroît de 0 à -1 et $\sin^2\varphi$ décroît de 1 à 0, donc $\cos^3\varphi + \sin^2\varphi$ décroît de 1 à -1, et, par suite s'annule pour une valeur de φ comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π. Nous désignerons cette valeur par α.

D'autre part x' s'annule pour les valeurs $0, \frac{\pi}{3}, \pi$; y' s'annule pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et pour les racines de l'équation

$$F(\varphi) = 2\cos^3\varphi - \cos^2\varphi - 3\cos\varphi + 1 = 0.$$

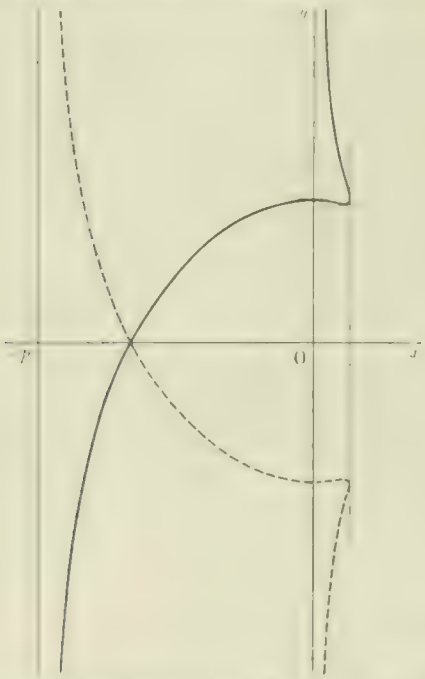
Substituons dans cette équation les nombres

$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$

les résultats de substitution ont respectivement les signes

$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+\infty$

φ	0		$\frac{\pi}{3}$		β		$\frac{\pi}{2}$		α		π
x'	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0
y'		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
x	0	croît	$\frac{p}{8}$ (*max*)	décroît		décroît	0	décroît		décroît	$-p$
y	$-\infty$	décroît	$\frac{7p}{8\sqrt{3}}$	décroît	*min*	croît	$\frac{p}{2}$ (*max*)	décroît	0	décroît	$-\infty$



Cette équation du troisième degré en $\cos\varphi$ a donc ses racines réelles; une seule est à considérer, c'est celle qui est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$. Sa valeur est le cosinus d'un angle aigu supérieur à $\frac{\pi}{3}$, nous désignerons cet angle par β. Nous pouvons maintenant dresser le tableau ci-dessus des signes de x' et de y', et par suite des variations de x et de y.

Il est alors aisé de tracer la courbe, et on achève par symétrie.

J. HAAG, lycée de Nancy.

Bonnes solutions par MM. B. Bouvaist; M. Laurence, lycée de Bordeaux; J. Marchal; Soules, à Condom.

QUESTIONS PROPOSÉES

1126. — On considère une ellipse et deux sommets de cette ellipse, A et B, situés respectivement sur le grand et le petit axe.

1° Trouver l'équation générale des hyperboles équilatères qui passent aux points A et B et au centre de l'ellipse, ainsi que le lieu de leurs centres.

2° Chacune de ces hyperboles coupe l'ellipse en deux nouveaux points A_1 et B_1. Trouver l'équation de A_1B_1, l'enveloppe de cette droite et le lieu des points M et N où se coupent AA_1 et BB_1 d'une part, AB_1 et BA_1 d'autre part.

3° Trouver l'équation de la droite MN et le lieu du point de rencontre de MN avec A_1B_1. E. H.

1127. — Une droite Δ coupe une hyperbole en M et M' et les asymptotes OS et OS' de cette hyperbole en N et N'.

La parallèle menée par N à la tangente en M et la parallèle menée par M à l'asymptote OS' se coupent en un point du diamètre conjugué de Δ. P. Tribier.

Errata. — Dans l'énoncé de la question 1109, au lieu de centre de gravité il faut lire *centre des moyennes distances des sommets.*

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Imprimerie Gauthier-Villars.

12e Année. N° 11 Août 1902.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

CORRESPONDANCES SUR CONIQUES
EXTENSION DES POLYGONES DE PONCELET

par M. G. Fontené.

§ I.

Correspondances doublement quadratiques entre points de deux coniques.

1. Soit $f(x, y, z)$ une forme quadratique ; nous désignerons par $f(x, x')$ la forme polaire $axx' + \ldots$, de sorte que $f(x, x)$ sera la forme donnée. Si l'on considère la conique $f = 0$, l'équation du système des deux tangentes issues d'un point donné est

$$f(x,x) \times f(x',x') - f^2(x,x') = 0,$$

ou encore cette relation exprime que la droite joignant les points M et M′ est tangente à la conique ; si donc on désigne par $F(u,v,w) = 0$ l'équation tangentielle de la conique, on a l'identité

$$F(yz' - zy', \ldots) = \begin{vmatrix} f(x,x) & f(x,x') \\ f(x',x) & f(x',x') \end{vmatrix} \times \text{c}^{\text{te}}.$$

Si F est la forme adjointe de la forme f sans facteur parasite, $F = Au^2 + \ldots$ avec les notations habituelles, le facteur constant de l'identité précédente est l'unité ; nous supposons qu'il en est ainsi.

Si le point M ou le point M′ est sur la conique $f = 0$, on a

$$F[(yz' - zx'), \ldots] = -f^2(x,x'),$$

comme on le voit d'ailleurs directement ; F est alors un carré parfait.

2. Considérons trois coniques S_1, S_2, S_3 inscrites à un même quadrilatère ; leurs équations tangentielles sont

$$F_1(u,v,w) = 0, \qquad F_1 - k^2F_3 = 0, \qquad F_3(u,v,w) = 0 :$$

en écrivant qu'un point A′ de S_1 et un point C′ de S_3 déterminent une droite b tangente à S_2, on a

$$F_1(y_1z_3 - z_1y_3), \ldots - k^2F_3(y_1z_3 - z_1y_3), \ldots = 0,$$

ou, A′ étant sur S_1, C′ étant sur S_3,

$$f_1(x_1,x_1) - k^2 f_3(x_1,x_3) = 0,$$

ou

$$(1) \qquad f_1(x_1,x_3) \pm k f_3(x_1,x_3) = 0.$$

Donc : *Étant données trois coniques S_1, S_2, S_3 inscrites à un même quadrilatère, la correspondance établie entre un point A′ de S_1 et un point C′ de S_3 par la condition que la droite A′C′ ou b soit tangente à la conique S_2, se décompose en deux correspondances doublement quadratiques.*

Une tangente b à la conique S_2 donne sur S_1 deux points $\pm A'$, sur S_3 deux points $\pm C'$ et l'une des deux correspondances associe les points de même signe, l'autre associant les points de signes contraires ; le passage du couple $(+, +)$ au couple $(-, -)$ dans la première correspondance se fait

par une tangente commune, d'où *la nécessité de ces tangentes communes* pour la décomposition de la correspondance (A′, C′) en deux correspondances doublement quadratiques.

3. Appelons *élément* d'une courbe l'ensemble (A', a') d'un point de cette courbe et de la tangente en ce point ; dans chacune des deux correspondances entre (A', a') et (C', c'), les tangentes communes aux coniques S_1 et S_3 sont des droites *unies* de la correspondance, c'est-à-dire qu'une tangente commune se correspond à elle-même ; les points communs aux deux coniques S_1 et S_3 sont également des points unis, comme le montre la relation (1) ; nous dirons que l'on a une *correspondance doublement quadratique unie.*

Réciproquement, *si les éléments* (A', a') *et* (C', c') *de deux coniques* S_1 *et* S_3 *ont une correspondance doublement quadratique unie* (sept conditions et non huit), *l'enveloppe de la droite* A′C′ *ou* b *est une conique* S_2 *touchant les quatre tangentes communes aux deux premières.* Une correspondance doublement quadratique s'exprime en effet, pour deux courbes unicursales, par une relation de la forme

$$t'^2(At^2 + Bt + C) + t'(A't^2 + \ldots) + (A''t^2 + \ldots);$$

elle dépend donc de huit paramètres ; mais les relations doublement quadratiques, en nombre infini, qui admettent sept solutions données, ont une huitième solution commune, comme l'a remarqué M. Raoul Bricard (Voir *Nouvelles Annales*, 1900, p. 407, d'après une communication faite en juin 1899) ; en effet, si les deux relations doublement quadratiques $\varphi(t, t') = 0$, $\psi(t, t') = 0$ ont sept solutions communes, la relation doublement quadratique la plus générale qui admet ces sept solutions est $\varphi + k\psi = 0$. Cela étant, si l'on considère entre (A', a') et (C', c') une correspondance doublement quadratique avec *sept* éléments unis, on pourra choisir une conique S_2 qui soit tangente à l'une des droites A′C′ ou b prise arbitrairement, et la correspondance établie par le moyen de cette conique se décomposera en deux correspondances doublement quadratiques dont l'une sera identique à la correspondance considérée ; cette correspondance aura d'ailleurs un huitième élément uni.

4. Corrélativement, *étant données trois coniques* S_1, S_2'', S_3 *qui ont quatre points communs, la correspondance établie entre une tangente* a *de la conique* S_1 *et une tangente* c *de la conique* S_3 *par la condition que le point* (a', c') *ou* B′ *soit sur la conique* S_2'', *se décompose en deux correspondances doublement quadratiques,* qui sont d'ailleurs des correspondances unies. *Réciproquement*, ...

5. Si l'on reprend les trois coniques S_1, S_2, S_3 du n° 2, et la correspondance (A′, C′) établie par le fait que la droite A′C′ ou b soit tangente à S_2, les deux coniques S_2'' qui forment, d'après ce qu'on vient de voir, le lieu du point B′ commun aux tangentes a' et c', sont identiques. En effet, les équations tangentielles des coniques données étant

$$a_1^2u^2 + b_1^2v^2 - w^2 = 0, \qquad a_3^2u^2 + b_3^2v^2 - w^2 = 0,$$
$$(a_1^2u^2 + \ldots) - k^2(a_3^2u^2 + \ldots) = 0,$$

la correspondance (A′C′) s'exprime par la relation

$$a_1b_1\left(\frac{x_1x_3}{a_1^2} + \frac{y_1y_3}{b_1^2} - z_1z_3\right) \pm ka_3b_3\left(\frac{x_1x_3}{a_3^2} + \ldots\right) = 0.$$

Les équations ponctuelles des trois coniques S_1', S_2'', S_3' étant

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - z^2 = 0, \qquad \frac{x^2}{a_3^2} + \frac{y^2}{b_3^2} - z^2 = 0,$$
$$h^2\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \ldots\right) - \left(\frac{x^2}{a_3^2} + \ldots\right) = 0,$$

la correspondance (a', c') donnée par la conique S_2'' s'exprime par la relation

$$\pm\frac{h}{a_1b_1}\left(a_1u_1u_3 + b_1v_1v_3 - u_3w_3\right) + \frac{1}{a_3b_3}(a_3u_1u_3 + \ldots) = 0.$$

Comme les coordonnées des tangentes a' et c' sont liées à celles des points de contact par les relations

$$u_1 = \frac{x_1}{a_1^2}, \qquad v_1 = \frac{y_1}{b_1^2}, \qquad w_1 = z_1, \qquad u_3 = \frac{x_3}{a_3^2}, \quad \ldots, \quad \ldots,$$

cette dernière relation devient

$$\pm \frac{h}{a_1^2 b_1^2}\left(\frac{x_1 x_3}{a_3^2} + \ldots\right) + \frac{1}{a_3^2 b_3^2}\left(\frac{x_1 x_3}{a_1^2} + \ldots\right) = 0;$$

en prenant $h^2 = k^2$, on voit que les deux correspondances doublement quadratiques établies par la conique S_2'' sont identiques à celles qu'établit la conique S_2. Il arrive ceci : si l'on se donne un point A' sur S_1', on a deux points B'' et $\overline{B''}$ sur la conique S_2'' ; l'un donne $+C'$ et $-C'$ sur S_3', l'autre donne $+\overline{C'}$ et $-\overline{C'}$; les droites joignant A' aux points $+C'$ et $-\overline{C'}$ se confondent, etc.

Les deux coniques S_1' et S_2' sont polaires réciproques par rapport à quatre coniques Σ qui ont pour équations

$$\pm \frac{x^2}{a_1 a_3} \pm \frac{y^2}{b_1 b_3} - 1 = 0;$$

les deux coniques S_2 et S_2' sont polaires réciproques par rapport à ces mêmes coniques Σ, comme il est facile de s'en assurer.

§ II.

Polygones de n côtés liés à deux systèmes de n coniques.

6. *Soit une chaîne de $2n$ coniques,*

$$S_1', S_2, S_3', S_4, \ldots, S_{2n-1}', S_{2n},$$

conjuguées à un même triangle $OO'O''$, chaque conique d'indice pair S (y compris S_{2n}) touchant les quatre tangentes communes aux deux coniques voisines S', chaque conique d'indice impair S' (y compris S_1') passant aux quatre points communs aux deux coniques voisines S. On peut d'abord remarquer que les $2n$ conditions indiquées se réduisent à $2n-1$ conditions distinctes. Soient

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - z^2 = 0, \qquad \frac{u^2}{a_2^2} + \frac{v^2}{b_2^2} - w^2 = 0, \quad \ldots,$$

les équations des $2n$ coniques ; les trois premières coniques donnent la condition

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & b_1^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a_2^2 & b_2^2 & \\ a_3^2 & b_3^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1^2 a_2^2 & b_1^2 b_2^2 & 1 \\ a_2^2 a_3^2 & b_2^2 b_3^2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

les $2n-1$ premières conditions se résument dans l'écriture

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1^2 a_2^2 & b_1^2 b_2^2 & 1 \\ a_2^2 a_3^2 & b_2^2 b_3^2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n}^2 a_1^2 & b_{2n}^2 b_1^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et la dernière condition se trouve réalisée, comme on le voit en prenant la première ligne du détermi-

nant, la dernière et la seconde. Si l'on se donne le triangle conjugué OO'O'', on aura chacune des deux coniques S_1 et S_2 avec deux paramètres, chacune des $2n-3$ coniques $S_3, S_4, \ldots, S_{2n-1}$ avec un paramètre, en tout $2n+1$ paramètres, et il existera une conique S_{2n}, conjuguée au triangle OO'O'', vérifiant les deux conditions auxquelles se réduisent les trois conditions apparentes concernant la suite

$$S_{2n-2},\ S_{2n-1},\ S_{2n},\ S_1,\ S_2.$$

7. Proposons-nous d'obtenir *un polygone de n côtés*

$$A'_1,\ a_2,\ A'_3,\ a_4,\ \ldots,\ A'_{2n-1},\ a_{2n},$$

dont les n sommets A' soient sur les n coniques S', dont les n côtés a soient tangents aux n coniques S, en fixant d'avance celle des deux correspondances quadratiques à laquelle devra satisfaire le couple (A_1, A_2), et en faisant de même pour les couples (a_2, a_3), (A_3, A_4), ..., (A_{2n-1}, A_1); on n'a pas à considérer la correspondance (a_{2n}, a_2), de sorte que l'on n'a pas à utiliser ici la remarque du n° 6. Si l'on se donne arbitrairement le point A_1, si l'on prend l'une des deux positions possibles de a_2, on a un seul point A_3, une seule tangente a_4, ..., une seule tangente a_{2n} et un seul point A''_1 en revenant à la conique S_1; on aura une solution si A''_1 se confond avec A_1. Comme la correspondance entre A'_1 et A''_1 est une correspondance doublement quadratique, *le problème admet généralement quatre solutions.*

8. J'ai montré ailleurs (*Nouvelles Annales*, 1897, p. 449) que, SOUS UNE CONDITION UNIQUE, le problème précédent s'indétermine, de sorte que *l'on a un polygone mobile dont les n sommets décrivent les coniques S, dont les n côtés roulent sur les coniques S*; le triangle conjugué OO'O'' étant donné, le système de coniques dépend de $2n$ paramètres. Je me bornerai ici à vérifier le fait sur l'un des deux systèmes de coniques auxquels on est conduit dans le cas du triangle, et sur un cas particulier de l'autre système; je désignerai les sommets du triangle par A', B', C', ses côtés par a, b, c, et les coniques de la chaîne par

$$S_1,\ S_3,\ S_5,\ S_1,\ S'_3,\ S_2.$$

Si l'on se donne les coniques S_1, S_2, S_3 avec quatre points communs, et une conique S'' passant par ces points communs (12 paramètres) et si d'un point Ω de S'' on mène aux coniques S' les tangentes $\pm a'$, $\pm b'$, $\pm c'$, dont les points de contact sont $\pm A'$, $\pm B'$, $\pm C'$, il arrive ceci. La correspondance entre B' et C' par exemple se décompose, comme on l'a vu, en deux correspondances doublement quadratiques unies, et l'enveloppe de la droite B'C' est une conique S_1 qui touche les tangentes communes à S_1 et à S_3; on a de même les coniques S_2 et S_3. On voit que *les sommets du triangle A'B'C' décrivent les coniques S_1, S_2, S_3, tandis que ses côtés roulent sur les coniques S_1, S_2, S_3.*

Les équations des coniques S' étant

$$(S)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0,\qquad \frac{x^2}{a'^2}+\ldots=0,\qquad \frac{x^2}{a''^2}+\ldots=0,$$

sous la condition qu'elles fassent partie d'un faisceau ponctuel, l'équation de la conique S'' étant

$$(S'')\qquad \frac{x^2}{\lambda^2a^2a'^2a''^2}+\frac{y^2}{\mu^2b^2b'^2b''^2}-z^2=0,$$

sous la condition qu'elle fasse partie du faisceau précédent, comme les coniques S_1 et S'_3 sont polaires réciproques par rapport aux mêmes coniques que S_2 et S_3 (fin du n° 5), on peut écrire l'équation de la conique S_1, et l'on a pour les coniques S_1, S_2, S_3,

$$(S)\qquad \lambda^2a^2x^2+\mu^2b^2y^2-z^2=0,\qquad \lambda^2a'^2x^2+\ldots=0,\qquad \lambda^2a''^2x^2+\ldots=0;$$

ces coniques S sont polaires réciproques des coniques S' par rapport aux quatre coniques Σ qui ont pour équations

$$(\Sigma)\qquad \lambda^2x^2+\mu^2y^2-z^2=0;$$

la conique Σ passe par les points communs à S_1 et à S_3, ..., et les trois coniques S ont quatre tangentes communes. D'ailleurs, de même que les tangentes a, b, c en A, B, C concourent en un point Ω de la conique S'' qui fait partie du faisceau ponctuel défini par les coniques S, les points de contact A, B, C

des côtés a, b, c avec leurs enveloppes sont à chaque instant sur une même droite ω dont l'enveloppe est une conique appartenant au faisceau tangentiel défini par les coniques S, conique qui est polaire réciproque de la conique S″ par rapport aux coniques Σ.

Si l'on se donne le sommet A′ sur S'_1 et si l'on choisit le point Ω sur S″, on a le choix entre deux points B′, et aussi entre deux points C′; on obtient donc quatre espèces de triangles.

Les trois couples de coniques

$$(S'_1, S_1), \qquad (S'_2, S_2), \qquad (S'_3, S_3)$$

sont définis par les propriétés suivantes : *si l'on prend une conique de chaque couple, on a trois coniques formant un faisceau ponctuel ou un faisceau tangentiel selon que le nombre des coniques accentuées est impair ou pair ;* on peut se donner par exemple S'_1 et S_2, S'_3 avec un paramètre, S_1 avec un paramètre, S_2 est déterminée, et les quatre conditions relatives à S_1 se réduisent à deux, comme on peut le voir (n° 6) en considérant les deux chaînes de coniques

$$S'_1, S_1, S'_2, S_1, S'_3, S_2 \qquad \text{et} \qquad S_1, S'_1, S_2, S_1, S_3, S'_2,$$

dont la seconde se déduit de la première en échangeant les coniques S_2 et S'_2, S_3 et S'_3. *On peut prendre comme coniques décrites par les sommets d'un triangle variable l'un quelconque des quatre systèmes de coniques*

$$(S'_1, S'_2, S'_3), \qquad (S'_1, S_2, S_3), \qquad (S_1, S'_2, S_3), \qquad (S_1, S_2, S'_3),$$

les côtés du triangle roulant sur les coniques du système complémentaire ; la conique S″ varie naturellement d'un système à un autre.

9. Dans le système précédent, les triangles évanouissants sont des systèmes de trois droites concourantes a, b, c, les points de concours étant les points communs aux coniques S′, et des systèmes de trois points en ligne droite A′, B′, C′, les droites de collinéation étant les tangentes communes aux coniques S. Il existe un autre système de coniques pour lequel on a des triangles bi-évanouissants, deux sommets étant confondus, ainsi que les côtés opposés. On obtient ce système en supposant que *les six coniques de la chaîne sont telles que les quatre tangentes communes à* S_1 et S_2 *passent respectivement aux quatre points d'intersection de* S'_1 et S'_2, *auquel cas les quatre tangentes communes à* S_2 *et* S_3 . . . . On a alors deux espèces de triangles.

Le cas singulier où les coniques satisfont à la fois aux conditions du premier cas étudié et à celles du cas actuel peut servir d'exemple. Les coniques S′ et les coniques S étant dans les conditions du premier cas, supposons que l'une des quatre coniques Σ passe aux points M, N, P, Q qui sont communs aux coniques S′; les tangentes communes aux coniques S, polaires réciproques des coniques S′ par rapport à cette conique Σ, seront les tangentes m, n, p, q à la conique Σ aux points M, N, P, Q, de sorte que l'on sera dans le cas indiqué ci-dessus (avec 11 paramètres seulement au lieu de 12). Des quatre systèmes de triangles dont l'existence résulte de ce que les coniques sont dans les conditions du premier cas, l'un a pour triangles évanouissants des triangles dont les sommets se confondent en M, ou N, ou P, ou Q, en même temps que les côtés se confondent avec m, ou n, ou p, ou q; ce système est en même temps l'un des deux systèmes dont l'existence résulte de ce que les coniques sont dans les conditions du second cas; mais il en existe un autre, pour lequel les tangentes en A′, B′, C′, au lieu de concourir en un point Ω de la conique S″, forment un triangle A′B′C′ inscrit à cette conique, en même temps que les points de contact des côtés a, b, c avec les coniques S forment un triangle circonscrit à une conique fixe.

En effet, laissons de côté pour un instant les considérations qui précèdent; prenons un système de Poncelet formé de deux coniques S'_1, S'_2, d'une conique S″ passant par les points communs aux deux premières, enfin de l'une des deux coniques S'_3 qui forment l'enveloppe complète du côté libre d'un triangle A″B″C″ inscrit à S″, le côté C″B″ roulant sur S'_1, le côté C″A″ roulant sur S'_2. Si A′, B′, C′ sont les points de contact des côtés avec leurs enveloppes, le triangle A′B′C′ se déplace en ayant ses som-

mets sur les coniques S′ et ses côtés tangents à trois coniques S; ce système de six coniques rentre dans celui dont on a écrit plus haut les équations; mais il dépend seulement de 11 paramètres, et les triangles obtenus ici diffèrent de ceux dont on a parlé, le point Ω étant remplacé par les trois points A, B, C. Si l'on met le point A′ en M, il est aisé de voir que les points C′ et B′ y sont aussi, de sorte que les droites AB et AC ou c et b se confondent en une tangente commune aux coniques S_2 et S_3; il suit de là que les tangentes communes aux coniques S passent par les points communs aux coniques S. L'une des coniques Σ passe par les points M, N, P, Q, etc. On peut voir que les triangles ABC sont conjugués par rapport à cette conique; en outre, la droite B′C′ par exemple coupe encore les coniques S_2 et S_3 en deux points B'_0 et C'_0, le triangle $A'B'_0C'_0$ est un triangle A′B′C′, et les deux triangles A′B′C′ et $A'B'_0C'$ appartiennent à l'une des trois séries de triangles dont l'existence est indépendante de l'hypothèse actuelle; on a les deux autres séries au moyen de C′A′ et de A′B′.

10. Voici un exemple de coniques du second système qui ne sont pas en même temps des coniques du premier système. *On considère trois coniques* U, V, W *conjuguées à un même triangle, telles que chaque tangente commune à* U *et* V *a son point de contact avec* U *situé sur* W, *chaque tangente commune à* V *et* W *a son point de contact avec* V *situé sur* U, *auquel cas chaque tangente commune à* W *et* U *a son point de contact avec* W *situé sur* V. ***Si l'on prend un point quelconque*** A ***sur*** U, ***la tangente en*** A ***coupe*** V ***en*** *deux points* B, *les tangentes en ces points coupent* W *en quatre points* C, *et les tangentes en deux de ces points passent en* A.

§ III.

Complément à une enveloppe connue.

11. Considérons toujours le cas du triangle, avec les notations du n° 8, et supposons que les coniques S_2 et S_3 se confondent en une même conique S′, sans que S_1 se confonde avec elles; les coniques S_1 et S_2 doivent alors se confondre en une même conique S. Posons-nous ce problème : *Les sommets* B *et* C *d'un triangle variable* A′B′C′ *décrivent une même conique* S′, *et les côtés* c *et* b *de ce triangle roulent sur une même conique* S; *le sommet* A′ *décrivant une conique* S_1 *qui fait partie du faisceau tangentiel déterminé par* S′ *et* S, ***trouver l'enveloppe du côté*** A.

Les équations des coniques S'_1 et S′ étant

$$(S'_1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

$$(S')\qquad x^2+y^2-z^2=0,$$

l'équation tangentielle de la conique S est

$$(S)\qquad k^2\left(\frac{u^2}{b^2c^2}+\frac{v^2}{c^2a^2}-\frac{w^2}{a^2b^2}\right)-(u^2+v^2-w^2)=0;$$

le côté A′B′ sera tangent à la conique S si l'on a

$$k^2\left(\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}-\frac{z_1z_2}{c^2}\right)-(x_1x_2+y_1y_2-z_1z_2)=0;$$

on a une relation analogue pour A′C′, avec l'indice 3 au lieu de l'indice 2, et ε' au lieu de ε, *les couples* (A′, B′) *et* (A′, C′) *pouvant appartenir à des systèmes différents.* Si l'on pose

$$x_1=a\cos\alpha,\qquad y_1=b\sin\alpha,\qquad z_1=c;$$

$$x_2=1-t^2,\qquad y_2=2t,\qquad z_2=1+t^2;\qquad x_3=1-t'^2,\qquad y_3=2t',\qquad z_3=1+t'^2,$$

les deux conditions deviennent

$$\left(a+\frac{k}{a}\right)(1-t^2)\cos\alpha+\left(b+\frac{k}{b}\right)2t\sin\alpha-\left(c+\frac{k}{c}\right)(1+t^2)=0,$$

$$\left(a+\frac{k}{a}\right)(1-t'^2)\cos\alpha+\left(b+\frac{k}{b}\right)2t'\sin\alpha-\left(c+\frac{k}{c}\right)(1+t'^2)=0.$$

Supposons choisis ε et ε'. Si l'on se donne un point B', on obtient deux points A', et chacun de ces points A' donne un seul point C' en supposant que l'on ne prend pas C' sur A'B'; on obtient donc entre B' et C' une correspondance doublement quadratique. L'élimination de α donnera la relation entre t et t' qui exprime cette correspondance.

12. *Soit d'abord* $\varepsilon' = \varepsilon$. Quand on élimine α entre les relations

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha - C = 0, \qquad A'\cos\alpha + B'\sin\alpha - C' = 0,$$

on obtient

$$(BC' - CB')^2 + (AC' - CA')^2 - (AB' - BA')^2 = 0;$$

cela donne ici, après suppression du facteur $(t' - t)^2$,

$$\frac{(1 - tt')^2}{\left(a + \frac{\varepsilon k}{a}\right)^2} + \frac{(t + t')^2}{\left(b + \frac{\varepsilon k}{b}\right)^2} - \frac{(1 + tt')^2}{\left(c + \frac{\varepsilon k}{c}\right)^2} = 0;$$

la correspondance obtenue est donc symétrique, comme on devait le prévoir, de sorte que l'enveloppe de la droite B'C' est une conique. Les coordonnées u, v, w de la droite B'C' sont d'ailleurs $1 - tt'$, $t + t'$, $1 + tt'$; donc cette droite a pour enveloppe la conique

$$(S_1) \qquad \frac{u^2}{\left(a + \frac{\varepsilon k}{a}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(b + \frac{\varepsilon k}{b}\right)^2} - \frac{w^2}{\left(c + \frac{\varepsilon k}{c}\right)^2} = 0;$$

on a une conique S_1 pour $\varepsilon = +1$, une autre pour $\varepsilon = -1$. Pour vérifier que ces deux coniques passent par les points communs aux coniques S et S', on est conduit à vérifier que l'on a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{b^2c^2}{k^2 - b^2c^2} & \dfrac{c^2a^2}{k^2 - c^2a^2} & \dfrac{a^2b^2}{k^2 - a^2b^2} \\ a^2 + \dfrac{k^2}{a^2} & b^2 + \dfrac{k^2}{b^2} & c^2 + \dfrac{k^2}{c^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est immédiat en ordonnant par rapport à la première ligne.

13. Les coniques obtenues pour $\varepsilon' = \varepsilon$ rentrent dans le second des deux cas généraux qui ont été indiqués; on les trouve dans le *Traité des Sections coniques de Salmon*, 2e édition française, p. 599. On va obtenir, *pour* $\varepsilon\varepsilon' = -1$, un système de coniques qui rentre dans le premier cas. Le facteur à supprimer, dans la relation entre t et t' fournie par l'élimination de α, est ici le facteur qui s'annule quand la droite B'C' est tangente à S; nous procéderons un peu autrement. La relation complète entre t et t', pour $\varepsilon' = -\varepsilon$, est

$$\left[\left(bc - \frac{k^2}{bc}\right)(t - t')(1 - tt') + \varepsilon k\left(\frac{c}{b} - \frac{b}{c}\right)(t + t')(1 + tt')\right]^2$$
$$+ \left[\left(ca - \frac{k^2}{ca}\right)(t^2 - t'^2) + \varepsilon k\left(\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right)(1 - t^2t'^2)\right]^2$$
$$- \left[\left(ab - \frac{k^2}{ab}\right)(t - t')(1 + tt') + \varepsilon k\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)(t + t')(1 - tt')\right]^2 = 0.$$

On constate d'abord que les doubles produits fournis par les trois carrés ont une somme nulle, de sorte que ε disparaît; *a priori*, comme on peut échanger B' et C' sans que l'enveloppe change, il en devait être ainsi.

Les coordonnées u, v, w de la droite B'C' sont $1 - tt'$, $t + t'$, $1 + tt'$, et l'on a

$$(t - t')^2 = (1 - tt')^2 - (1 + tt')^2 + (t + t')^2 = u^2 + v^2 - w^2,$$

la relation entre t et t' donne donc

$$u^2+v^2-w^2\left[\left(bc-\frac{k^2}{bc}\right)^2u^2+\left(ca-\frac{k^2}{ca}\right)^2v^2-\left(ab-\frac{k^2}{ab}\right)^2w^2\right]$$
$$+k^2\left[\left(\frac{c}{b}-\frac{b}{c}\right)^2v^2w^2+\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)^2w^2u^2-\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2u^2v^2\right]=0.$$

ou

$$k^2(u^2+v^2-w^2)\left(\frac{u^2}{b^2c^2}+\frac{v^2}{c^2a^2}-\frac{w^2}{a^2b^2}\right)$$
$$-k^2\left[(u^2+v^2-w^2)^2-\left(\frac{c}{b}-\frac{b}{c}\right)^2v^2w^2-\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)^2w^2u^2+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2u^2v^2\right]$$
$$+(u^2+v^2-w^2)(b^2c^2u^2+c^2a^2v^2-a^2b^2w^2)=0.$$

Cette enveloppe complète contient *a priori* la conique S_1, qu'il faut écarter : la relation précédente doit donc être

$$\left[k^2\left(\frac{u^2}{b^2c^2}+\frac{v^2}{c^2a^2}-\frac{w^2}{a^2b^2}\right)+(u^2+v^2-w^2)\right]\times(k^2u^2+v^2-w^2)-(b^2c^2u^2+c^2a^2v^2-a^2b^2w^2)=0;$$

c'est en effet ce qui a lieu, la vérification se bornant à celle du terme en k^2 pour laquelle on doit avoir et l'on a

$$\left(\frac{u^2}{b^2c^2}+\frac{v^2}{c^2a^2}-\frac{w^2}{a^2b^2}\right)(b^2c^2u^2+c^2a^2v^2-a^2b^2w^2)-(u^2+v^2-w^2)^2$$
$$=-\left(\frac{c}{b}-\frac{b}{c}\right)^2v^2w^2-\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)^2w^2u^2+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2u^2v^2.$$

On a ainsi pour l'équation de l'enveloppe cherchée

$$(\overline{S_1})\qquad b^2c^2u^2+c^2a^2v^2-a^2b^2w^2-k^2(u^2+v^2-w^2)=0;$$

cette conique est polaire réciproque de la conique S_1 par rapport aux quatre coniques Σ relativement auxquelles S et S′ le sont également ; elle fait partie du faisceau ponctuel déterminé par S et S′.

Si l'on se donne un point A′ sur S_1, en menant de ce point deux tangentes c et b à S, on a sur S′ les points $+B'$, $+C'$; l'enveloppe de la droite $(+B', +C')$ est une conique, on a une autre conique avec $(-B', -C')$, et les deux droites $(+B', -C')$ et $(-B', +C')$ ont la même enveloppe $\overline{S_1}$. En partant d'une tangente a à la conique $\overline{S_1}$, on obtient sur la conique S′ deux points $+B'$ et $-C$ qui conduisent *à un point* A′ de la conique S_1, et ces mêmes points, désignés par $-B'$ et $+C'$, conduisent à *un autre point* A′ de la conique S_1 ; cela correspond aux deux façons dont on peut avoir $\alpha'=\pm 1$.

GÉOMÉTRIE

1097 — *Deux coniques* U *et* V *se coupent aux quatre points* O, A, B, C ; *par l'un de ces points*, O, *on mène une sécante qui rencontre les coniques* U *et* V *en* P *et* Q, *puis une nouvelle sécante qui les rencontre en* P′ *et* Q′.

Démontrer que les droites OP, OP′, PP′, QQ′ *et les trois côtés du triangle* ABC *sont tangentes à une même conique.*

Première solution. — On sait que si deux triangles sont inscrits dans une conique, il existe une conique tangente aux six côtés de ces triangles.

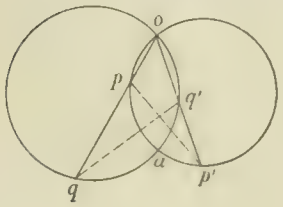
Les deux triangles ABC et OPP′ sont inscrits dans U ; il y a donc une conique U′ tangente aux côtés du triangle ABC et aux droites OP, OP′, PP′.

Les triangles ABC et OQQ′ sont inscrits dans V, il y a donc une conique V′ tangente aux côtés de ABC et aux droites OQ, OQ′, QQ′.

Or les coniques U′ et V′ ont cinq tangentes communes, savoir, les trois côtés du triangle ABC et les droites OPQ et OP′Q′, donc elles coïncident, et par suite les trois côtés du triangle ABC et les droites OP, OP′, PP′, QQ′ sont tangentes à une même conique.

J. MARCHAL.

Deuxième solution. — Projetons les points B et C aux points cycliques ; les coniques U et V se transforment en deux cercles qui se coupent aux points o et a, transformés des points O et A. Soient opq et $op'q'$ les projections des droites OPQ et OP′Q′. Tout revient à démontrer qu'il existe une parabole ayant pour foyer le point a et tangente aux droites op, op', pp' et qq'.



Or il existe une parabole et une seule qui soit tangente aux quatre droites op, op', pp', qq' ; le foyer de cette parabole doit être situé sur les cercles circonscrits aux triangles opp' et oqq', d'après une propriété bien connue.

Ce foyer est donc le point a, et la proposition est démontrée.

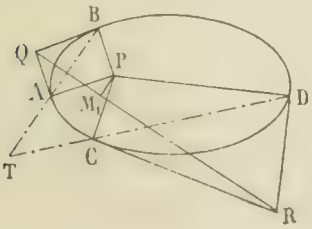
M. REBEIX.

Bonnes solutions par : MM. R. Bouvaist ; Dulimbert, à Grenoble ; G. Gourdel, lycée de Marseille ; J. Haag, lycée de Nancy ; T. Lemoyne, à Troyes ; P. Thonet ; P. Verjus, lycée de Marseille.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1064. — *Par un point* P *on mène les quatre normales* PA, PB, PC, PD *à une ellipse. Les cercles circonscrits aux triangles* PAB, PCD *se coupent en* P *et en un autre point* M_1 ; *de même, les cercles circonscrits aux triangles* PAC, PBD *se coupent en* M_2 ; *puis ceux qui sont circonscrits aux triangles* PAD, PBC *se coupent en* M_3.

Trouver le lieu des points P *pour lesquels les trois points* M_1, M_2, M_3 *sont en ligne droite et, dans ces conditions, l'enveloppe de la droite* $M_1M_2M_3$.



Supposons l'ellipse rapportée à ses axes. Q et R étant les pôles des cordes AB et CD, les droites PQ, PR sont respectivement deux diamètres des cercles PAB, PCD. Le deuxième point d'intersection M_1 des deux cercles est le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur QR. Or QR est la polaire de T, pôle double de l'ellipse

$$E = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

et de l'hyperbole d'Apollonius relative au point $P(\alpha, \beta)$

$$H = c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

Les points M sont donc les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur les côtés du triangle conjugué à E et à H. Appelons x_0, y_0 les coordonnées d'un sommet T de ce triangle, et soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite $M_1M_2M_3$. Cette droite, la droite QR et la perpendiculaire abaissée de P sur QR, droites qui ont respectivement pour équations

$$b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0, \qquad a^2y_0(x - \alpha) - b^2x_0(y - \beta) = 0,$$

doivent être concourantes, ce qui donne la condition :

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ b^2x_0 & a^2y_0 & -a^2b^2 \\ a^2y_0 & -b^2x_0 & b^2x_0\beta - a^2y_0\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

ou $$S(x_0, y_0) = (\beta v + w)b^2x^2 + (\alpha u + w)a^2y^2 - (\beta u + \alpha v)(a^2b^2x_0y_0 + a^2b^2(b^2ux_0 + a^2vy_0)) = 0.$$

Cette équation devant être vérifiée par les coordonnées x_0, y_0 des trois sommets du triangle conjugué représente, si l'on y regarde x_0, y_0 comme coordonnées courantes, une conique circonscrite au triangle conjugué. Or, en égalant deux à deux les rapports des dérivées partielles de E et de H,

$$\frac{E'_x}{H'_x} = \frac{E'_y}{H'_y} = \frac{E'_z}{H'_z},$$

on a les équations de trois coniques circonscrites à ce triangle :

$$\begin{cases} f_1 = b^2\beta x^2 - a^2\alpha xy + a^2c^2y - a^2b^2\beta = 0, \\ f_2 = -a^2\alpha y^2 + b^2\beta xy + b^2c^2x - a^2b^2\alpha = 0, \\ f_3 = c^2(b^2x^2 - a^2y^2) - a^2b^2(\alpha x + \beta y) = 0. \end{cases}$$

Comme la conique $S(x, y) = 0$ passe en outre par l'origine, son premier membre devra être, à un facteur constant près, identique à

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0,$$

γ étant un coefficient à déterminer, ou

$$S' = (\alpha\beta + \gamma c^2)(b^2x^2 - a^2y^2) + (b^2\beta^2 - a^2\alpha^2)xy + (c^2\beta - \gamma a^2\alpha)b^2x + (c^2\alpha - \gamma b^2\beta)a^2y = 0.$$

On voit d'abord que dans $S = 0$ le rapport des coefficients de x^2 et y^2 doit être $-\frac{b^2}{a^2}$, ce qui donne

(1) $$a^2\alpha u + b^2\beta v + (a^2 + b^2)w = 0.$$

Si nous comparons dans S et S' les coefficients de x et y, nous avons

$$\frac{c^2\beta - \gamma a^2\alpha}{u} = \frac{c^2\alpha - \gamma b^2\beta}{v},$$

d'où nous tirons $$\gamma = \frac{c^2(\alpha u - \beta v)}{b^2\beta u - a^2\alpha v}.$$

S' devient alors

$$(b^2\beta u - a^2\alpha v)(\alpha\beta + c^2(\alpha u - \beta v))(b^2x^2 - a^2y^2) + (b^2\beta u - a^2\alpha v)(b^2\beta^2 - a^2\alpha^2)xy + c^2(b^2\beta^2 - a^2\alpha^2)(b^2ux + a^2vy) = 0,$$

et, en tenant compte de la relation (1) qui donne

$$b^2(\beta v + w) = -a^2(\alpha u + w) = \frac{1}{2}(-a^2\alpha u + b^2\beta v - c^2w),$$

nous pouvons écrire l'équation de S sous la forme

$$(a^2\alpha u - b^2\beta v + c^2w)(b^2x^2 - a^2y^2) - 2(b^2\beta u + \alpha v)xy - 2a^2b^2(b^2ux + a^2vy) = 0.$$

Si l'on égale dans les équations de S et S' les rapports du coefficient de xy au coefficient de $(b^2ux + a^2vy)$, on a

$$\frac{b^2\beta u - a^2\alpha v}{c^2} = \frac{\beta u + \alpha v}{-1},$$

ou

(2) $$\alpha\beta u - b^2\alpha v = 0.$$

Cette équation, rapprochée de (1), détermine u, v, w en fonction de α, β, et réciproquement :

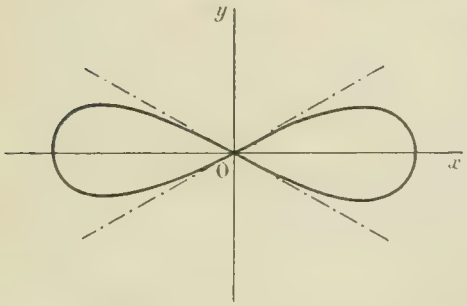
(3) $$\frac{a^2u}{\alpha} = \frac{b^2v}{\beta} = -\frac{(a^2 + b^2)w}{\alpha^2 + \beta^2},$$

ou

(4) $$\frac{\alpha}{a^2u} = \frac{\beta}{b^2v} = -\frac{(a^2 + b^2)w}{a^4u^2 + b^4v^2}.$$

Il nous reste pour achever l'identification des coniques S et S', à égaler dans leurs équations les rapports du coefficient de $(b^2x^2 - a^2y^2)$ au coefficient de $(b^2ux + a^2vy)$. Nous obtenons ainsi

$$2[(b^2\beta u - a^2\alpha v)\alpha\beta + c^4(\alpha u - \beta v)]a^2b^2 + c^2(b^2\beta^2 - a^2\alpha^2)(a^2\alpha u - b^2\beta v + c^2w) = 0.$$



Si nous éliminons u, v, w au moyen des équations (3), nous avons

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2b^2}(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2) = 0,$$

lieu des points P. C'est une courbe fermée du quatrième ordre, ayant un point double à l'origine, les tangentes en ce point étant les diagonales du rectangle des axes de l'ellipse E.

Si, au contraire, nous éliminons α, β au moyen des équations (4), nous trouvons

$$c^2(a^2u^2 - b^2v^2) - (a^2 + b^2)w^2 = 0.$$

L'enveloppe des droites $M_1M_2M_3$ est donc une hyperbole coaxiale à l'ellipse E.

On peut remarquer que la droite $M_1M_2M_3$, dont l'équation est

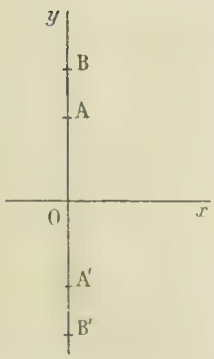
$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2 + b^2} = 0,$$

est parallèle à la polaire du point P par rapport à E.

VASNIER.

1068. — *Une droite Δ est rencontrée par une série d'hyperboles semblables et par leurs asymptotes en quatre points fixes. Montrer que les points de contact des tangentes parallèles à Δ et les pôles de Δ sont sur des cercles fixes, et que les hyperboles sont tangentes à deux cercles fixes sur des droites passant par un point fixe.*

Soient A et A' les deux points autour desquels pivote l'hyperbole, B et B' les deux points autour desquels pivotent les deux asymptotes. Prenons la droite qui porte ces points pour axe des y, le milieu commun aux deux segments AA' et BB' pour origine des coordonnées et la perpendiculaire à Oy pour axe des x ; posons $OA = a$, $OB = b$ et désignons par m et m' les coefficients angulaires des deux asymptotes. Ces droites auront alors pour équations $y - b - mx = 0$ et $y + b - m'x = 0$, et l'hyperbole elle-même sera représentée par



$$(y - b - mx)(y + b - m'x) + h = 0,$$

h étant une certaine constante que nous déterminons en exprimant que l'hyperbole passe aux points A et A' ; nous trouvons ainsi $h = b^2 - a^2$. L'équation de l'hyperbole est donc finalement

$$(y - b - mx)(y + b - m'x) + b^2 - a^2 = 0,$$

ou

(1) $$mm'x^2 - (m + m')xy + y^2 + (m' - m)bx - a^2 = 0.$$

Il nous reste maintenant à exprimer que toutes ces hyperboles sont semblables à une hyperbole donnée, c'est-à-dire que l'angle des asymptotes est donné ; cela nous fournit la relation $\frac{m' - m}{1 + mm'} = k$

ou (2) $$m' - m = k(1 + mm').$$

1. Pour avoir le lieu des points de contact des tangentes parallèles à Oy, nous éliminerons m et m' entre les deux équations (1) et (2) et l'équation du diamètre conjugué des cordes parallèles à Oy,

$f'_y = 0$. Cette dernière équation est $2y - (m + m')x = 0$; elle donne

$$m + m' = \frac{2y}{x} ;$$

les deux autres donnent

$$m' - m = k\frac{x^2 + y^2 + a^2}{x^2 + kbx},$$

et

$$mm' = \frac{y^2 + a^2 - kbx}{x^2 + kbx}.$$

Nous aurons donc le lieu en écrivant que $(m + m')^2 - (m - m')^2 = 4mm'$; ce calcul nous donne

$$\frac{4y^2}{x^2} - k^2\left(\frac{x^2 + y^2 + a^2}{x^2 + kbx}\right)^2 - 4\frac{y^2 + a^2 - kbx}{x^2 + kbx} = 0,$$

et, en posant $\dfrac{x^2 + y^2 + a^2}{x + kb} = u$, puis changeant tous les signes,

$$\frac{k^2u^2}{x^2} + \frac{4u}{x} - 4\frac{x^2 + y^2}{x^2} = 0.$$

Cette équation se réduit finalement à

(3) $$k^2u^2 - 4kbu + 4a^2 = 0 ;$$

elle donne pour u deux valeurs constantes, ce qui prouve que le lieu se décompose en deux cercles : $ku - 2b = \pm 2\sqrt{b^2 - a^2}$. Nous ne nous arrêterons pas à placer ces deux cercles d'après les équations trouvées : la solution géométrique nous permettra de voir beaucoup plus facilement ce dernier point.

2. Pour avoir le lieu du pôle de Oy, il faut éliminer m et m' entre $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ et la relation (2). Cette élimination se fait par le même procédé que tout à l'heure : on trouvera successivement $m + m' = \dfrac{2y}{x}$, $m' - m = \dfrac{2a^2}{bx}$ et $mm' = \dfrac{2a^2}{kbx} - 1$; puis, finalement,

$$\frac{4y^2}{x^2} - \frac{4a^4}{b^2x^2} = 4\left(\frac{2a^2}{kbx} - 1\right).$$

Cette équation, simplifiée, est

(4) $$b^2(x^2 + y^2) - \frac{2a^2bx}{k} - a^4 = 0 ;$$

elle représente un cercle dont le centre est situé sur Ox comme pour les deux cercles précédents.

3. Il nous reste enfin à trouver l'enveloppe des hyperboles du faisceau. Pour cela nous poserons $m + m' = \lambda$, $mm' = \mu$, et nous écrirons la relation (2) ainsi :

$$m' - m = k(1 + mm')^2,$$

puis

$$\lambda^2 - k(1 + \mu)^2 4\mu = 0 ;$$

quant à l'équation de l'hyperbole, elle s'écrira

$$y^2 - a^2 + \mu x^2 - \lambda xy + kbx(1 + \mu) = 0.$$

Nous pourrions obtenir l'équation de l'enveloppe en ajoutant à ces deux équations celle qu'on obtient en égalant les rapports des dérivées par rapport à λ et par rapport à μ et éliminant ensuite λ et μ ; or l'équation que nous venons d'indiquer est

$$\frac{x^2 + kbx}{k(1 + \mu)^2} = \frac{xy}{\lambda} ;$$

elle se décompose en $x = 0$, qui donne les points caractéristiques fixes A et A', et une autre droite

$$\frac{x + kb}{k(1 + \mu)^2} = \frac{y}{\lambda},$$

qui donne les vrais points de contact de l'hyperbole avec son enveloppe. Cette droite tourne autour d'un point fixe, le point $x = -kb$, $y = 0$.

Mais, pour avoir l'enveloppe elle-même et montrer qu'elle se décompose en deux cercles, il vaut mieux procéder autrement.

On remarquera d'abord que la relation

$$\lambda^2 - k^2(1+\mu)^2 - 4\mu = 0$$

s'écrit

$$\frac{\lambda - k(1+\mu)}{\mu} = \frac{4}{\lambda + k(1+\mu)};$$

on désigne par t la valeur commune de ces deux rapports et on calcule λ et μ en fonction de t, ce qui donne

$$\lambda = \frac{4k + 4t - kt^2}{2kt + t^2}; \qquad \mu = \frac{4 - 2kt}{2kt + t^2};$$

par conséquent l'équation de l'hyperbole est exprimée rationnellement à l'aide d'un paramètre t et s'écrit alors

$$(y^2 - a^2 + kbx + kxy)t^2 + 2[k(y^2 - x^2 - a^2) - 2xy]t + 4(x^2 + kbx - kxy) = 0;$$

son enveloppe s'obtient ensuite immédiatement en écrivant que l'équation précédente a une racine double en t; on trouve ainsi

$$[k(y^2 - x^2 - a^2) - 2xy]^2 - 4(x^2 + kbx - kxy)(y^2 - a^2 + kbx + kxy) = 0.$$

Après diverses modifications, cette équation devient

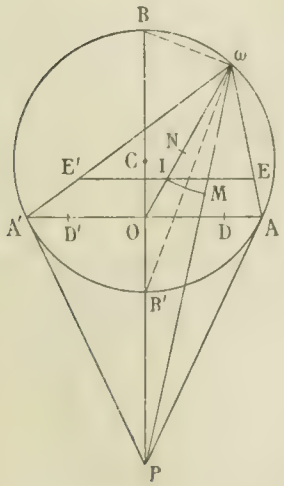
$$(5) \qquad [k(x^2 + y^2 - a^2) - bx]^2 = 4(b^2 - a^2)(1 + k^2)x^2,$$

et il est visible alors qu'elle se décompose en deux cercles.

Bonnes solutions : MM. G. Fauvernier ; Cans ; A. de Sainte-Laguë, élève au lycée de Bordeaux ; J. Marchal ; J. Haag, lycée de Nancy.

Solution géométrique. — Les points fixes A, A′, autour desquels pivotent les asymptotes, et les points fixes D, D′ des hyperboles sont tels que $DA = -D'A'$. De plus, l'angle des asymptotes ωA, $\omega A'$ étant constant, le lieu du centre ω des hyperboles est un cercle C (*) passant par A, A′.

Soient O le milieu de AA′ et I le point de contact d'une hyperbole et d'une tangente EE′ parallèle à AA′.



D'après une propriété de l'hyperbole, on a

$$\overline{IE}^2 = A'D.DA = a^2 - d^2 = a'^2.$$

IE étant constant, $\frac{I\omega}{O\omega}$ ou $\frac{IE}{OA}$ l'est également, et le lieu du point I est un cercle homothétique au cercle (C), le centre d'homothétie étant en O. Le lieu du point de contact I′ de la seconde tangente parallèle à AA′ est aussi un cercle homothétique à (C).

Le pôle de AA′ par rapport à l'hyperbole est un point N du diamètre $O\omega$, tel que $\omega N.\omega O = \overline{\omega I}^2$. Il en résulte que $\frac{\omega N}{\omega I}$ est constant, et que le lieu de N est un cercle homothétique à (C), le centre d'homothétie étant encore O.

Joignons ω au pôle P de AA′ par rapport au cercle (C). Nous allons montrer que l'hyperbole touche les deux cercles en M, M′ sur la droite ωP. En effet les droites ωB, $\omega B'$, rectangulaires et conjuguées dans l'angle $O\omega P$, sont les bissectrices de cet angle. Comme elles le sont également de l'angle $A'\omega A$, les diamètres ωO, ωP de l'hyperbole sont symétriques par rapport à ses axes, et l'on a $\omega M = \omega M' = \omega I$. Or $\frac{\omega P}{\omega O}$ ou $\frac{BO}{BP}$ étant constant, il en est de même de $\frac{\omega M}{\omega P}$, et le lieu des points M, M′ se compose de deux cercles homothétiques à (C), le centre d'homothétie étant le point P. Mais la tangente en M à l'hyperbole, symétrique de EE′ par rapport à $\omega B'$, est parallèle à la tangente en ω au cercle (C), droite antiparallèle à AA′ dans l'angle $A\omega A'$. Elle coïncide donc avec la tangente au cercle lieu de M, ce qui montre que l'hyperbole est tangente en M, M′ à deux cercles fixes. La droite MM′ est, comme on voit, un diamètre de l'hyperbole, passant par le point fixe P (**).

VASNIER.

Bonnes solutions géométriques : MM. L. Bickart ; M. Rebeix ; P. Tribier. G. Fauvernier.

(*) Tous les résultats doivent être doublés par symétrie autour de AA′.

(**) Les rapports d'homothétie des cercles trouvés au cercle (C) sont respectivement $1 \mp \frac{a'}{a}$, $\frac{d'}{a'}$, $1 \mp \frac{a'c}{aR}$.

CONCOURS DE 1902 (*Suite*)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires (*).

Étant donnés, dans un plan, un cercle fixe (ω) de centre O et un cercle fixe (γ) de centre C, d'un point P du cercle (γ), on mène les tangentes au cercle (ω) qui coupent le cercle (γ) en Q et R.

1° Trouver l'enveloppe des cercles circonscrits aux triangles PQC et PRC, ainsi que le lieu géométrique de leurs centres, lorsque le point P décrit le cercle (γ).

Distinguer sur l'enveloppe et le lieu les portions qui correspondent à des triangles réels.

2° Calculer, en fonction de l'angle OCP, les angles et les longueurs des côtés du triangle PQR.

Étudier la variation de la longueur du côté QR lorsque $\widehat{OCP}$ varie.

3° Des points Q et R on mène les deux tangentes au cercle (ω) autres que PQ et PR.

Trouver le lieu géométrique du point d'intersection M de ces deux tangentes, dans le cas particulier où le cercle (γ) passe par le centre O du cercle (ω).

(*30 juin, de 7 h. à 2 h.*)

Mathématiques spéciales.

1128. — Étant donnée la surface du second ordre S qui, rapportée à un système de trois axes rectangulaires, a pour équation

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-2x=0,$$

on considère les deux coniques C et C′ d'intersection de cette surface par les plans xOy et xOz et une droite D située dans le plan yOz et passant par l'origine des coordonnées.

1° Trouver l'équation de tout plan P tel que, si M est l'un de ses points d'intersection avec la conique C, M′ l'un de ses points d'intersection avec la conique C′ et N son point d'intersection avec la droite D, les trois points M, M′ et N soient en ligne droite.

2° Trouver l'enveloppe des plans P.

3° Trouver le lieu Σ des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe A de l'espace sur les plans P.

Montrer qu'il existe une infinité de plans Q, passant par A, qui coupent cette surface Σ suivant deux cercles.

Trouver l'enveloppe de ces plans Q et le lieu de la corde commune aux deux cercles.

4° Que deviennent les résultats précédents dans le cas particulier où la surface du second ordre S est un paraboloïde ?

(*1er juillet, de 7 h. à 2 h.*)

Composition sur l'analyse et ses applications géométriques.

Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy, on considère une courbe C telle que la tangente MT et la normale MN menées à cette courbe en un point M forment avec l'axe Ox un triangle MNT dont l'aire reste constante (et égale à la moitié de l'aire d'un carré de côté donné a) lorsque M décrit C.

1° Exprimer les coordonnées x et y, par rapport à Ox et Oy, d'un point M de la courbe C en fonction du coefficient angulaire t de la tangente en M ; construire la courbe.

2° Exprimer ensuite les coordonnées x et y considérées en fonction *uniforme* d'un paramètre u à l'aide des fonctions introduites par Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques.

3° Calculer en fonction de u le rayon de courbure relatif au point M de la courbe C et examiner s'il s'exprime en fonction uniforme de u.

4° Démontrer que, si l'on désigne par M′ le centre de courbure de la courbe C relatif au point M et par P la projection de M sur Ox, l'aire du triangle MNP ne varie pas avec le point M ; indiquer quelle est la valeur constante de cette aire.

5° Calculer en fonction de u la longueur de l'arc de la courbe C compris entre un point donné M_0 et le point M correspondant à la valeur u du paramètre.

(*) Des solutions étudiées de la question de Mathématiques élémentaires sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

6° Soit M un point de la courbe C correspondant à la valeur u du paramètre et situé du même côté de l'axe Ox qu'un point donné M_0 de cette courbe ; on suppose de plus que l'arc de la courbe C qui joint M_0 et M n'est pas rencontré, entre M_0 et M, par les portions MP, M_0P_0 des ordonnées de M et de M_0 limitées à l'axe Ox ; calculer en fonction de u l'aire dont le contour est formé par la portion PP_0 de l'axe Ox, par les portions MP, M_0P_0 des ordonnées de M et de M_0 et par l'arc de la courbe C joignant les points M_0 et M.

(2 juillet, de 7 h. à 2 h.)

Mécanique rationnelle.

I. Un corps homogène pesant de révolution est suspendu par un point O de son axe : étudier son mouvement, sachant que l'axe est assujetti par une liaison sans frottement à rester dans un plan P passant par la verticale du point O et tournant autour de cette verticale avec une vitesse angulaire constante ω. Dans quelles conditions le mouvement relatif du corps par rapport au plan P se réduit-il à une rotation permanente autour de son axe ?

II. Un disque circulaire homogène, infiniment mince, de masse M et de rayon R, se meut, assujetti à rester dans un plan où sont tracés deux axes rectangulaires fixes Ox, Oy. A un certain moment, le centre du disque est en O ; la vitesse v de ce centre est dirigée suivant Ox, et la vitesse angulaire de rotation du disque autour de son centre est ω. Au même instant, on rend immobile, par une liaison sans frottement, un point A du disque, défini par ses coordonnées polaires $OA = \rho$, $\widehat{xOA} = \alpha$. Déterminer la percussion que subit le disque, le nouvel état des vitesses des points du disque après la percussion, et la variation de force vive qui se produit.

(3 juillet, de 7 h. à 2 h.)

BOURSES DE LICENCE PRÈS LES FACULTÉS DES SCIENCES

Mathématiques.

1129. — 1° Combien, par un point du plan, peut-on mener de tangentes réelles à la courbe (C) dont l'équation est

$$y = x^3 \ ?$$

On examinera le cas particulier où le point d'où l'on mène les tangentes est situé sur la courbe (C).

2° Soit A un point d'abscisse a, situé sur la courbe (C) ; par ce point, on mène une sécante, de coefficient angulaire m, qui rencontre la courbe en deux points P, Q autres que A. On mène les tangentes à la courbe aux points P, Q ; soit M leur point d'intersection. Du point M, on peut mener à la courbe (C) une tangente autre que les tangentes MP, MQ ; soit R son point de contact.

On demande d'exprimer au moyen de a et de m les coordonnées des points M, R.

3° Lorsque m varie, le point M décrit une parabole (H). Sur quelle partie de cette parabole le point M se trouve-t-il lorsque les points P, Q sont réels ? lorsque le point A est entre P et Q ?

Quelles sont les abscisses des points communs à la courbe (C) et à la parabole (H) ?

4° Quels sont les lieux décrits, lorsque a varie, par les points d'intersection de la parabole (H) et des droites qui joignent le point A aux points communs à cette parabole et à la courbe (C) ?

(24 juin, de 8 h. à midi.)

Sciences physiques.

Physique.

I. — Télescope de Foucault.

II. — **1130.** Un baromètre à siphon est maintenu à la température de 0° ; la branche ouverte à l'air est cylindrique et a 15^{cq} de section ; la branche fermée, également cylindrique, a 3^{cq} de section. Ces deux branches ont leur axe vertical.

Au début, la chambre barométrique est vide de tout gaz et a alors une capacité de 2l. On introduit dans cette chambre barométrique 1^{gr} d'air sec. On demande de combien descendra le niveau du mercure dans la branche fermée ?

L'intensité de la pesanteur à l'endroit où a lieu l'expérience est 980. On sait que la masse d'un litre d'air à 0° sous la pression qu'exerce à Paris une colonne de mercure de 76^{cm} à 0° est $1^{gr},293$; l'intensité de la pesanteur à Paris est 981.

Chimie.

I. — Propriétés chimiques de l'iode.

II. — **1131.** On verse dans une grande quantité d'eau un mélange de trichlorure et de pentachlorure de phosphore.

Pour neutraliser le liquide acide ainsi obtenu avec une dissolution normale de soude (NaOH = 40gr par litre), on trouve qu'il faut employer 100cc de cette dissolution pour la neutralisation au méthylorange ou 120cc pour la neutralisation à la phtaléine du phénol.

On demande :

1° Le poids du mélange de trichlorure et de pentachlorure de phosphore employé ;

2° La composition de ce mélange.

(24 juin, de 8 h. à midi.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Épure.

On donne les points

(o, o')	$x = 0,$	$y = 10,$	$z = 10^{cm}$;
(a, a')	$x = 8,$	$y = 18,$	$z = 10$;
(f, f')	$x = -7,$	$y = 17,$	$z = 10$.

On considère :

1° La sphère ayant pour centre (o, o') et passant par le point (a, a') ;

2° Le paraboloïde équilatère ayant pour sommet (a, a'). Une section principale de ce paraboloïde est horizontale, et elle admet pour foyer le point (f, f').

Le paraboloïde étant supposé primitivement solide en (f, f'), on représentera la partie solide de la sphère extérieure au paraboloïde.

On indiquera à l'encre la construction d'un point quelconque de la courbe, avec sa tangente, ainsi que celle de tous les points remarquables avec leurs tangentes.

Enfin on calculera, en degrés ou en grades, les angles des tangentes en a' à la projection verticale de la courbe avec la ligne de terre.

(22 juillet, de 8 h. à midi.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1132. — Étant donnés un cercle (C) de centre O et un point A, fixes tous les deux, on joint un point variable M au pôle de AM par rapport à (C) ; on obtient ainsi une droite Δ.

1° Trouver l'enveloppe de la droite Δ quand le point M décrit une droite D ; c'est une conique (Γ) ; dans quel cas est-ce une parabole ? Quand D se déplace de façon qu'il en soit ainsi, quel est le lieu du foyer ?

2° On fait tourner D autour d'un point fixe ; montrer que le lieu des centres des coniques (Γ) est une droite parallèle à OA.

3° On suppose que le centre du cercle (C) se déplace sur une parallèle à la droite fixe D, de façon que la polaire P du point A reste fixe ; on demande le lieu des projections du point de rencontre de D et de P sur sa polaire par rapport à la conique variable (Γ).

M. Rebeix.

* **1133.** — Deux cubiques circonscrites à un même quadrilatère complet se coupent en trois points différents des sommets du quadrilatère. Le triangle formé par ces points et le quadrilatère sont circonscrits à une même conique.

E. Duporcq.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1079. — *On donne deux cercles, l'un de centre* O *et de rayon* R, *l'autre de centre* O′ *et de rayon* $R' = R\sqrt{7}$.

La distance d *des centres* O *et* O′ *est égale à* 4R.

D'un point A *pris sur la ligne des centres, on mène à ces deux cercles les tangentes* AB, AC, AB′ *et* AC′ *qui les touchent en* B, C, B′, C′.

Déterminer la distance $OA = x$ *de manière que la somme des aires des quadrilatères* OBAC *et* O′B′AC′ *soit égale au double de l'aire du carré circonscrit au cercle de centre* O.

Examiner si les valeurs de x *mises en évidence par l'application du théorème de Rolle conviennent à la question.*

(*École des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, 1901.*)

Désignons par x la valeur algébrique du segment OA $(x = \overline{OA})$. Les aires S et S′ ont pour expressions :

$$S = R.AB = R\sqrt{x^2 - R^2},$$

$$S' = R'.AB' = R'\sqrt{(d-x)^2 - R'^2} = R\sqrt{7}.\sqrt{(4R-x)^2 - 7R^2}.$$

Enfin l'aire du carré circonscrit au cercle de centre O est égale à $4R^2$. L'équation du problème est donc

$$R\sqrt{x^2 - R^2} + R\sqrt{7}\sqrt{(4R-x)^2 - 7R^2} = 8R^2,$$

ou, en supprimant le facteur commun R,

$$(1) \qquad \sqrt{x^2 - R^2} + \sqrt{7}\sqrt{(4R-x)^2 - 7R^2} = 8R.$$

Isolons le second radical dans le premier membre ; l'équation devient

$$(1') \qquad \sqrt{7}\sqrt{(4R-x)^2 - 7R^2} = 8R - \sqrt{x^2 - R^2},$$

d'où, en élevant les deux membres au carré et réduisant,

$$(2) \qquad 8R\sqrt{x^2 - R^2} = 28Rx - 3x^2.$$

Élevons de nouveau les deux membres au carré et nous aurons l'équation rationnelle

$$64R^2(x^2 - R^2) = (28Rx - 3x^2)^2,$$

ou encore

$$(3) \qquad (3x^2 - 28Rx)^2 - 64R^2(x^2 - R^2) = 0,$$

qui, ordonnée, prend la forme

$$(3') \qquad 9x^4 - 168Rx^3 + 720R^2x^2 + 64R^4 = 0.$$

Cette équation (3) est du quatrième degré ; elle présente une lacune entre les deux derniers termes, indiquant l'existence de deux racines imaginaires. La transformée en $-x$ n'ayant pas de variations, l'équation n'a pas de racine négative ; elle a donc 0 ou deux racines réelles positives.

Appliquons le théorème de Rolle. La dérivée est

$$4 . 9x^3 - 3 . 168Rx^2 + 2.720R^2x = 36x(x^2 - 14Rx + 40R^2),$$

dont les racines sont 0, 4R, 10R et on a

$$f(0) = 64R^4, \qquad f(4R) = -3136R^4, \qquad f(10R) = -5936R^4.$$

$f(+\infty)$ étant d'ailleurs positif, l'équation (3) admet deux racines réelles positives, l'une x' comprise entre 4R et 10R, l'autre x'' supérieure à 10R.

Une première condition à imposer à la racine, c'est de correspondre à un point A extérieur aux deux cercles, c'est-à-dire de donner des valeurs réelles à chacun des deux radicaux qui figurent dans l'équation (1). Les deux racines x' et x'' étant supérieures à 4R donnent une valeur réelle au premier radical $\sqrt{x^2 - R^2}$; il en sera de même pour le second, car l'équation (3) équivalant à l'une des quatre équations

$$\pm\sqrt{x^2 - R^2} \pm \sqrt{7}\sqrt{(4R - x)^2 - 7R^2} = 8R,$$

le second radical $\sqrt{(4R - x)^2 - 7x^2}$ sera réel en même temps que le premier.

Il reste à voir maintenant si les racines de l'équation (3) conviennent au problème proposé, c'est-à-dire si elles vérifient l'équation (1).

Cherchons d'abord si elles vérifient l'équation (2) ; une racine x de l'équation (3) ne peut vérifier l'équation (2) que si l'on a

$$28Rx - 3x^2 > 0,$$

c'est-à-dire

$$0 < x < \frac{28R}{3}.$$

Or on a $4R < \frac{28R}{3} < 10R$; donc la racine x'' ne vérifie pas l'équation (2), mais l'équation

$$(2') \qquad -8R\sqrt{x^2 - R^2} = 28Rx - 3x^2,$$

qui équivaut à

$$(1'') \qquad \pm\sqrt{7}\sqrt{(4R - x)^2 - 7R^2} = 8R + \sqrt{x^2 - R^2}.$$

On ne peut évidemment pas prendre le signe — ; donc x'' vérifie l'équation

$$\sqrt{7}.\sqrt{(4R - x)^2 - 7R^2} = 8R + \sqrt{x^2 - R^2},$$

qui exprime que $S' - S = 8R^2$.

Revenons maintenant à la racine x'. Formons $f\left(\frac{28R}{3}\right)$, en prenant l'équation sous la forme (3),

$$f\left(\frac{28R}{3}\right) = -64R^2\left[\left(\frac{28R}{3}\right)^2 - R^2\right] < 0 ;$$

donc x' est inférieur à $\frac{28R}{3}$ et par suite convient à l'équation (2). Pour que x convienne à l'équation (1), ou, ce qui revient au même, à l'équation (1'), il faut que l'on ait

$$8R - \sqrt{x'^2 - R^2} > 0,$$

c'est-à-dire

$$x' < R\sqrt{65}.$$

Formons $f(R\sqrt{65})$ en prenant toujours l'équation sous la forme (3) :

$$f(R\sqrt{65}) = 65R^4(3\sqrt{65} - 28)^2 - 64R^2 . 64R^2.$$

Nous avons à chercher le signe de la différence de deux carrés :

$$65(28 - 3\sqrt{65})^2 - 64^2,$$

ou (en observant que $28 - 3\sqrt{65} > 0$) le signe de la différence des valeurs absolues des termes, savoir

$$\sqrt{65}(28 - 3\sqrt{65}) - 64 = 28\sqrt{65} - 259 = 7(4\sqrt{65} - 37) :$$

cette différence est négative, donc on a $f(R\sqrt{65}) < 0$, et par suite

$$x' < R\sqrt{65}.$$

La racine x', vérifiant l'équation (1), convient au problème proposé : $S + S' = 8R^2$.

P. L.

Bonne solution : M. R. Bouvaist

GÉOMÉTRIE

1095. — *Dans un triangle* ABC *la bissectrice intérieure de l'angle* A, AD, *a une longueur constante et ses extrémités fixes ; en outre la différence des angles* B *et* C *est constante. Trouver :*

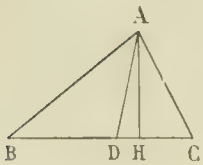
1° *Le lieu des sommets* B *et* C ;

2° *Le lieu du milieu de* BC ;

3° *Le lieu de l'orthocentre du triangle* ABC.

Soit AH la hauteur issue du sommet A. Dans le triangle ADH on a

$$\widehat{DAH} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ADH}.$$



Or l'angle $\widehat{ADH}$, extérieur au triangle ABD est égal à $B + \frac{A}{2}$, par suite

$$\widehat{DAH} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - B = \frac{B+C}{2} - B = \frac{C-B}{2}.$$

Il en résulte que l'angle $\widehat{DAH}$ a une valeur constante.

Comme AD est constante en grandeur et en position, les droites AH et DH sont fixes. Dès lors la droite DH est le lieu des points B, C et du milieu de BC, et la droite AH est le lieu de l'orthocentre du triangle ABC.

R. BOUVAIST.

Solutions semblables par MM. H. Janois, section normale à Châlons-sur-Marne; Léon Odoc, pensionnat Valbenoîte, à St-Etienne, D. Tissuzian, lycée Hoche, à Versailles.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1081. — *On donne deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy *et deux points fixes* A *et* B *sur* Oy. *On considère les paraboles passant en* A *et* B, *tangentes à* Ox, *et l'on demande :*

1° *Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe* P *de* Oy ;

2° *Le lieu des foyers de ces paraboles.*

L'équation générale des paraboles du plan est

$$(y - mx)^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0 :$$

en cherchant les ordonnées des points de rencontre de ces lignes avec Oy, on obtient l'équation

$$y^2 + 2\beta y + \gamma = 0,$$

qui doit avoir deux racines fixes, les ordonnées des points donnés A et B ; ces points sont forcément d'un même côté de l'axe Ox, quand ils sont réels ; nous pouvons les placer sur la partie positive de l'axe des y et, par suite, désigner β par $-a$ et γ par b^2, a et b étant deux nombres positifs donnés. La condition de contact avec Ox est alors $\alpha^2 = b^2m^2$; elle se dédouble en $\alpha = bm$ et $\alpha = -bm$; le problème se décompose donc en deux autres ; mais il suffira de résoudre l'un d'eux, celui qui correspond à $\alpha = bm$, par exemple, puis de changer dans les résultats obtenus b en $-b$ pour avoir ceux qui correspondent au second problème.

L'équation générale du faisceau des paraboles à considérer est donc

$$(y - mx)^2 + 2bmx - 2ay + b^2 = 0.$$

1. Cela posé, la polaire d'un point fixe de l'axe des y, $(0, h)$, par rapport à l'une de ces paraboles a pour équation

$$hf'_y - f' = 0,$$

ou

$$h(y - mx - a) - bmx - ay + b^2 = 0,$$

et nous aurons le lieu des points de contact des tangentes issues du point choisi en éliminant m entre cette équation et celle de la parabole. Nous obtenons d'abord

$$mx = \frac{(h - a)y - ah - b^2}{h - b},$$

puis,

$$y - mx = \frac{(a - b)y + ah - b^2}{h - b};$$

le lieu a donc pour équation

$$(1) \qquad (a - b)y + ah - b^2)^2 + 2b(h - b)[(h - a)y - ah + b^2] - (h - b)^2(2ay - b^2) = 0,$$

et nous voyons qu'il se compose de deux droites parallèles à l'axe des x.

Le lieu total comprend encore deux autres droites parallèles à Ox qui correspondent au second faisceau de paraboles et qui se déduisent des précédentes en changeant b en $-b$ dans l'équation (1).

2. En partant de l'identité

$$(y - mx)^2 + (my + x)^2 = (1 + m^2)(x^2 + y^2),$$

l'équation de la parabole s'écrit

$$(1 + m^2)(x^2 + y^2) + 2bmx - 2ay + b^2 - (my + x)^2 = 0,$$

ou, en ajoutant une constante arbitraire λ à la fonction linéaire $my + x$,

$$(1 + m^2)(x^2 + y^2) + 2bmx - 2ay + b^2 + 2\lambda(my + x) + \lambda^2 - (my + x + \lambda)^2 = 0.$$

Cette forme met en évidence les cercles focaux de la parabole :

$$(1 + m^2)(x^2 + y^2) + 2bmx - 2ay + b^2 + 2\lambda(my + x) + \lambda^2 = 0;$$

nous aurons le lieu des foyers en écrivant que l'un de ces cercles a un rayon nul et en cherchant le lieu de son centre ; il suffit pour cela d'annuler les trois dérivées partielles de l'équation précédente et d'éliminer entre elles les paramètres λ et m. Les trois équations ainsi obtenues sont

$$(1 + m^2)x + bm + \lambda = 0, \qquad (1 + m^2)y - a + \lambda m = 0, \qquad (bm + \lambda)x + (\lambda m - a)y + b^2 + \lambda^2 = 0;$$

les deux premières donnent x et y et en portant les valeurs ainsi trouvées dans la troisième, nous avons

$$(bm + \lambda)^2 + (\lambda m - a)^2 - (b^2 + \lambda^2)(1 + m^2) = 0,$$

puis

$$2\lambda m = a + b;$$

celle-ci donne

$$2\lambda = \frac{a + b}{m},$$

et les valeurs de x et de y deviennent alors

$$(2) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{2bm^2 + a + b}{2m(1 + m^2)}, \\[2ex] y = \dfrac{a - b}{2(1 + m^2)}. \end{cases}$$

Ces deux équations représentent, à l'aide du paramètre m, une ligne unicursale du troisième ordre.

Pour obtenir son équation cartésienne ordinaire, nous éliminons m entre les deux équations précédentes en les divisant membre à membre ; nous avons d'abord

$$\frac{y}{x} = \frac{b - am}{2bm^2 + a + b};$$

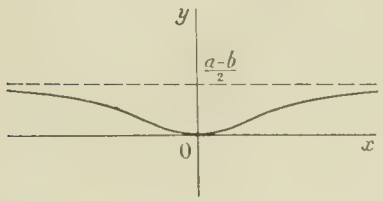
remplaçons ensuite dans cette équation $1+m^2$ par $\frac{a-b}{2y}$ et supprimons le facteur $a-b$, nous obtiendrons

$$b+y+mx=0, \qquad m=-\frac{b+y}{x};$$

il n'y a plus qu'à porter cette valeur de m dans la seconde des équations (2) pour avoir l'équation cartésienne du lieu des foyers :

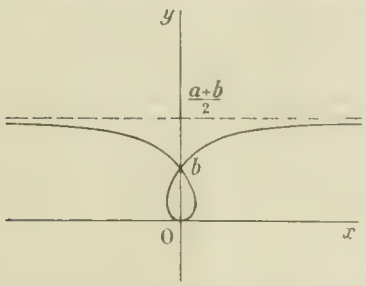
$$(3) \qquad y[x^2+(b+y)^2]=\frac{a-b}{2}x^2.$$

Cette équation représente une cubique circulaire ayant pour point double le point $x=0$, $y=-b$ et pour axe de symétrie l'axe des y; elle passe à l'origine où elle admet pour tangente l'axe des x; elle admet pour direction asymptotique Ox et l'asymptote parallèle à cet axe est $y=\frac{a-b}{2}$; l'ordonnée de cette droite est plus grande que celle du point double; cela suffit à montrer que ce point est un point isolé, ce qu'on peut d'ailleurs voir autrement en portant les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point et constatant que les tangentes sont imaginaires.



Quant au lieu qui correspond au second faisceau de paraboles et qu'on obtient en changeant b en $-b$ dans l'équation précédente, il a un point double ordinaire, comme on s'en assure aisément en remarquant que $a>b$ (si toutefois les points A et B sont réels).

Les deux lieux sont figurés à côté. On peut encore vérifier la forme générale en étudiant la fonction x^2 de y tirée de l'équation (3).



Lorsque les points A et B sont imaginaires conjugués, on peut toujours supposer $a>0$, mais alors on a $a<b$; la première ligne garde la même forme, mais passe au-dessous de Ox; la seconde admet alors un point double isolé, reste au-dessus de Ox et prend la forme de la première.

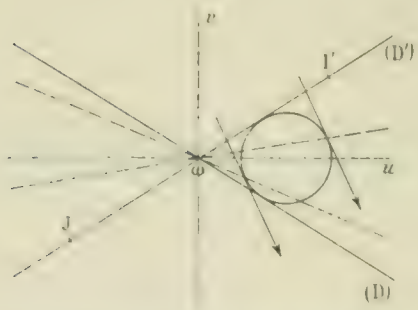
Dans le cas particulier où $a=b$, c'est-à-dire où les points A et B sont confondus, les paraboles du premier faisceau se réduisent toutes à des droites doubles passant par le point A et les problèmes posés n'ont plus de sens pour ce faisceau. Le premier lieu devient indéterminé; le second le devient aussi, car il ne faut pas oublier que l'on a supprimé le facteur $a-b$ qui s'annule dans ce cas.

Le second faisceau de paraboles renferme seul des paraboles proprement dites. Le premier lieu se compose de deux droites parallèles à Ox, dont l'une est la droite $y=a$, qui correspond à la parabole impropre qu'on obtient en faisant $m=0$, $(y-a)^2=0$. Le second lieu se dédouble en $y-a=0$ et le cercle $x^2+y(y-a)=0$ décrit sur OA comme diamètre. Ce dernier résultat est évident géométriquement.

Bonnes solutions : MM. P. Thonet; J. Haag, lycée de Nancy.

Solution géométrique. — Les lecteurs de la première partie suivront avec intérêt la solution géométrique que nous allons donner de cette question.

Plaçons-nous dans le cas où les points A et B sont distincts et effectuons sur la première figure une transformation homographique telle que les points correspondants de A et B soient dans la seconde figure les deux



points cycliques. L'axe des x deviendra une certaine droite (D), la droite de l'infini de la première figure deviendra une certaine droite (D') et la parabole se transformera en un cercle tangent aux deux droites (D) et (D').

Or les points à l'infini de Ox et de Oy étaient harmoniques par rapport aux points I et J ; le premier est devenu le point de rencontre de (D) et (D'), le point ω; le second est à l'infini sur (D'); les points I' et J', homologues de I et J, sont donc deux points de la droite (D') ayant leur milieu en ω.

Les cercles tangents aux deux droites se groupent en deux systèmes ayant leurs centres, l'un sur la bissectrice ωu, l'autre, sur la bissectrice ωv. Etudions le premier système. Au point fixe de Oy correspond maintenant un point fixe à l'infini ; par conséquent nous avons à trouver le lieu des points de contact des tangentes aux cercles considérés parallèles à une direction donnée ; comme tous ces cercles sont deux à deux homothétiques, le lieu de ces points de contact se compose de deux droites passant en ω.

Le lieu des foyers des paraboles du système qui correspond au faisceau de cercles envisagés est devenu le lieu du point de rencontre des tangentes menées de I' et de J' au cercle qui décrit le faisceau. Or si l'on mène une droite quelconque par l'un des points I' ou J', il y a deux cercles du faisceau ωu tangents à cette droite, donc deux droites passant par l'autre point et qui lui correspondent ; les deux faisceaux de tangentes menées par les points I' et J' sont donc reliés par une correspondance (2, 2) ; d'autre part, quand le cercle devient infiniment petit, les deux rayons issus de I' et de J' viennent coïncider avec I'J' ; les deux faisceaux ont donc un rayon commun qui se correspond à lui-même. Il en résulte que le lieu total de l'intersection de deux rayons homologues se compose de la droite I'J' et d'une cubique qui passe aux deux points I' et J' ; elle passe aussi au point ω, car les deux rayons homologues se coupent en ce point quand le cercle est infiniment petit. Enfin si on mène par le point I' ou J' une parallèle à ωu, les deux cercles qui la touchent sont égaux et les tangentes menées par l'autre point sont confondues ; il en résulte que si l'on considère les deux rayons parallèles à ωu, chacun d'eux a pour homologues deux rayons confondus avec l'autre. Le point à l'infini sur ωu est donc un point double du lieu.

En résumé, le lieu des foyers dans la première figure est une cubique circulaire unicursale ayant son point double sur Oy et sa direction asymptotique réelle parallèle à Ox.

Quand les deux points A et B sont confondus, le problème peut se traiter directement par la géométrie sans aucune difficulté.

P. NEGRE, élève du lycée Louis-le-Grand.

CONCOURS DE 1902 (*Suite*)

ÉCOLE CENTRALE (Première session.)

Mathématiques.

(*3 juillet, de 7 h. à 10 h.*)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET CINÉMATIQUE.

1134. — 1° Étant donnée la relation $\rho = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2\sin\theta}$, on propose d'examiner comment varie la fonction ρ quand la variable θ croît de 0 à 2π.

2° Considérant la ligne S représentée en coordonnées polaires par l'équation proposée, déterminer la position de la tangente en un point arbitraire. En particulier, construire les tangentes aux points situés sur la perpendiculaire menée par le pôle à l'axe polaire.

3° Construire les asymptotes de la ligne S, ainsi que les tangentes parallèles à ces droites et tracer la ligne S.

4° Un point parcourt la ligne S de sorte que le rayon vecteur tourne uniformément autour du pôle avec une vitesse angulaire égale à l'unité ; on prend comme origine du temps l'instant où l'angle θ égale $\frac{\pi}{2}$. Un second mobile, occupant la position M $\left(\rho = \sqrt{2},\ \theta = \frac{\pi}{4}\right)$ à l'instant $-\frac{\pi}{6}$ parcourt, dans le plan de S, une ligne S′ d'un mouvement tel que S soit son hodographe. Représenter les vecteurs vitesse et accélération dans ce mouvement au temps $-\frac{\pi}{6}$.

Mécanique.

1135. — 1° Démontrer qu'un système de forces quelconques appliquées à un corps solide est équivalent à une force unique égale à leur somme géométrique, appliquée en un point arbitraire et à un couple unique dont l'axe est le moment résultant par rapport à ce même point.

2° On suppose un cube, OABC O′A′B′C′, dont les milieux des arêtes OA et A′B′ sont D et E.

Ce solide étant sollicité par trois forces, représentées en mégadynes par les vecteurs $\overline{O'E}$, $\overline{CD}$, $\overline{C'B}$, on réduit ces forces à une force F passant par le point O, et à un couple dont l'axe passe par ce point O. Calculer l'intensité de F et le moment du couple.

3° Le cube étant figuré par un croquis en perspective, tracer la force F et l'axe du couple.

Physique et Chimie.

I. — Décrire les organes d'une machine électrique à frottement et d'une machine à influence. — Machine de Holtz.

II. — **1136.** — Deux tubes verticaux, cylindriques, de même section, peuvent communiquer par un conduit à robinet adapté à la partie inférieure de l'un et de l'autre. Les fonds de ces tubes sont dans un même plan horizontal.

L'un des tubes est fermé à sa partie supérieure ; sa longueur est un mètre. Il renferme une colonne d'air de 25^{cm} de hauteur à la pression atmosphérique 75^{cm} et une colonne de mercure de 75^{cm} de hauteur.

Au commencement de l'expérience, le conduit à robinet est plein de mercure et le robinet est fermé.

On ouvre le robinet de communication ; une partie du mercure passe dans le second tube vertical qui n'en contenait pas et qui communique avec l'atmosphère par son extrémité supérieure. L'équilibre s'établit ; on demande quelle est alors la différence de niveau du mercure dans les deux tubes ?

III. — Anhydride hypochloreux.

IV. — **1137.** — On demande de préparer les corps suivants en prenant pour chaque expérience une molécule-gramme de mispickel ou arsenio-sulfure de fer natif, de formule AsSFe :

1° L'arsenic ;

2° L'arséniure d'hydrogène gazeux ;

3° Le trisulfure d'arsenic (autrement que par la combinaison directe de l'arsenic et du soufre) ;

4° L'anhydride arsénique.

Indiquer la marche des expériences, écrire les équations et calculer les poids des composés obtenus sauf pour l'arséniure d'hydrogène dont on déterminera le volume sans faire de corrections.

(Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.)

(3 juillet, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

Géométrie descriptive.

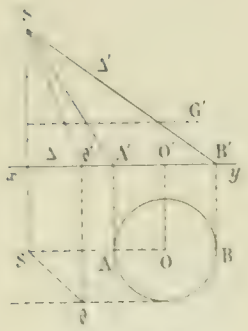
INTERSECTION D'UN CÔNE AVEC UN PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE

1138. — On demande de déterminer l'intersection d'un cône circulaire avec un paraboloïde hyperbolique, les deux surfaces étant définies de la manière suivante :

1° Le cône a pour sommet le point (S, S′) et pour base le cercle de centre O situé dans le plan horizontal.

2° Le paraboloïde hyperbolique a comme plan directeur le plan horizontal et pour directrices rectilignes les deux droites Δ, Δ' et (Sθ, S′θ'.)

La droite Δ, Δ' est dans le plan vertical de projection, elle se confond en projection *verticale* avec la génératrice S′B′ du cône.



La droite SO, S'O' qui passe par le sommet du cône est définie par sa trace horizontale OO'.

On représentera seulement la portion du cône extérieure au paraboloïde comprise entre le sommet et le plan horizontal.

On déterminera les asymptotes de la courbe d'intersection dont les parties extérieures au solide limité comme il vient d'être dit, se figureront en traits bleus.

On tracera en particulier la génératrice horizontale du paraboloïde à 50mm au-dessus du plan horizontal de projection, sur laquelle on déterminera rigoureusement le point de contact du plan tangent vertical et du plan tangent à 45° sur le plan horizontal.

Tableau des données : Ligne de terre xy parallèle aux petits côtés du cadre, à 160mm du côté supérieur; distance de la projetante de SS' au côté gauche : 25mm; distance de la projetante de θ au côté gauche : 85mm; longueur horizontale SO, parallèle à xy, 160mm; éloignement de S et de O : 100mm; éloignement de θ : 160mm; cote de S : 160mm; rayon du cercle O : 60mm; cadre de 27cm sur 45cm.

Titre extérieur : Géométrie descriptive. — Titre intérieur : Cône et paraboloïde hyperbolique.

(1 juillet, de 7 h. à 11 h.)

Trigonométrie.

Problème

1139. — Dans un trapèze ABCD, on donne les deux bases, $DA = d$, $BC = b$, le côté $AB = a$ et la surface S :

1° Calculer les angles et le côté CD du trapèze;

2° Calculer les angles et le côté CD dans l'hypothèse

$$S = \frac{d+b}{2}\sqrt{a^2-(d-b)^2}\ ;$$

3° Construire les solutions précédentes sur les données suivantes :

$$a = 8^{cm}, \qquad b = 4^{cm}, \qquad d = 7^{cm}.$$

(1 juillet, de 2 h. 1/2 à 4 h. 1/2.)

Calcul

1140. — Calculer le plus petit des angles positifs qui satisfont à l'équation

$$\log \sin^2 x = (\log a)^2 \operatorname{tg} x.$$

$$x = 146°38'27''13, \qquad a = 1,240561.$$

(1 juillet, de 4 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1141. — On considère deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et un cercle tangent à Ox en O, de rayon R, qui rencontre à nouveau l'axe Oy en un point A.

1° Former l'équation générale des coniques osculatrices au cercle en O et le rencontrant en outre au point A. Trouver le lieu du point de contact avec cette conique variable de la tangente commune au cercle et à la conique, autre que Ox.

2° Trouver les paraboles du faisceau et le lieu de leurs foyers, quand R varie.

3° Trouver le lieu des pieds des normales abaissées du point A sur ces coniques et construire ce lieu.

E. H.

1142. — Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant son hypoténuse a et la somme des volumes engendrés par ce triangle tournant successivement autour de chacun des côtés de l'angle droit, $\frac{1}{3}\pi a^3$.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. IMP. GAUTHIER-VILLARS.

12e Année. N° 12 Septembre 1902

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

ROTATIONS DANS UN PLAN

par M. L. Bickart.

J'ai démontré dans un précécent article (voir le n° de mai 1900 de la *Revue*) que deux figures semblables peuvent être amenées en coïncidence par une rotation autour d'un certain axe, suivie d'une homothétie par rapport à un point de cet axe.

L'étude analytique d'une telle variation demande l'établissement préalable d'un certain nombre de formules relatives au déplacement d'un point. Ce sont les formules relatives au déplacement du point dans un plan fixe que le présent article a pour objet d'établir.

Une rotation. — Soit a un point de coordonnées a, b et m un point de coordonnées x, y. On fait tourner am autour de a d'un angle φ et sur la demi-droite obtenue on porte

$$\overline{am'} = \alpha \times \overline{am}.$$

On demande les coordonnées x', y' de m'.

Soit $\overline{am} = \rho$, et appelons θ l'angle de am avec l'axe des x.

On a

$$\begin{cases} x = a + \rho\cos\theta, \\ y = b + \rho\sin\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = a + \alpha\rho\cos(\theta+\varphi), \\ y' = b + \alpha\rho\sin(\theta+\varphi). \end{cases}$$

Posons

$$\begin{cases} x + iy = u, \\ x - iy = v. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' + iy' = u', \\ x' - iy' = v', \end{cases} \qquad \begin{cases} a + ib = p, \\ a - ib = q; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = p + \rho e^{i\theta}, \\ v = q + \rho e^{-i\theta}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = p + \alpha\rho e^{i(\theta+\varphi)}, \\ v' = q + \alpha\rho e^{-i(\theta+\varphi)}. \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \rho e^{i\theta} = \lambda, \\ \rho e^{-i\theta} = \mu, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha e^{i\varphi} = h, \\ \alpha e^{-i\varphi} = k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = p + \lambda, \\ v = q + \mu, \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = p + h\lambda, \\ v' = q + k\mu, \end{cases}$$

d'où

$$(1) \qquad \begin{cases} u' = hu + (1 - h)p, \\ v' = kv + (1 - k)q, \end{cases}$$

équations qui résolvent la question en fonction des données.

Deux rotations. — Soient deux centres de rotation a_1, a_2 et deux couples de constantes de rotations correspondantes (h_1, k_1), (h_2, k_2). Un point m_0, après rotation autour de a_1, vient en m_1. Le point m_1, après rotation autour de a_2, vient en m_2. Cherchons les coordonnées de m_2.

La forme des équations ci-dessus permet de ne considérer qu'une coordonnée, u par exemple

m_0 est donné par $\qquad u_0 = p_1 + \lambda_1$;

on a pour m_1 $\qquad u_1 = p_1 + h_1\lambda_1$.

Mais soit $\qquad u_1 = p_2 + \lambda_2$,

on aura $\qquad u_2 = p_2 + h_2\lambda_2$.

d'où la suite d'équations

$$\left\{\begin{aligned} u_0 &= p_1 + \lambda_1, \\ p_1 + h_1\lambda_1 &= p_2 + \lambda_2, \\ p_2 + h_2\lambda_2 &= u_2. \end{aligned}\right.$$

Multiplions les deux membres de l'avant dernière par h_2, de la première par h_1h_2 et ajoutons membre à membre pour éliminer λ_1 et λ_2. Il vient

$$u_2 = h_1h_2u_0 + h_2(1 - h_1)p_1 + (1 - h_2)p_2 ;$$

de même $\qquad v_2 = k_1k_2v_0 + \ldots$

Cas général : n rotations. — Soient n centres de rotations et un point m_0. Après les n rotations effectuées dans l'ordre des indices, m_0 vient en m_n. Cherchons u_n, v_n.

On a comme plus haut

$$\begin{array}{l|l} u_0 = p_1 + \lambda_1, & h_1h_2 \ldots h_n \\ p_1 + h_1\lambda_1 = p_2 + \lambda_2, & h_2h_3 \ldots h_n \\ p_2 + h_2\lambda_2 = p_3 + \lambda_3, & h_3 \ldots h_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ p_{n-2} + h_{n-2}\lambda_{n-2} = p_{n-1} + \lambda_{n-1}, & h_{n-1}h_n \\ p_{n-1} + h_{n-1}\lambda_{n-1} = p_n + \lambda_n, & h_n \\ p_n + h_n\lambda_n = u_n & \end{array}$$

Pour éliminer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, multiplions les deux membres de chacune de ces équations par le facteur correspondant inscrit à droite du trait vertical, puis ajoutons membre à membre ; il vient

$$u_n = (h_1h_2 \ldots h_n)u_0 + (h_2 \ldots h_n)(1 - h_1)p_1 + (h_3 \ldots h_n)(1 - h_2)p_2 + \ldots + h_n(1 - h_{n-1})p_{n-1} + (1 - h_n)p_n.$$

Centre résultant. — Y a-t-il un point qui se trouve ramené à sa place primitive après les n rotations ? S'il existe, il suffira pour le déterminer de poser

$$u_n = u_0 = U,$$

d'où

$$U = \frac{h_2 \ldots h_n(h_1 - 1)p_1 + h_3 \ldots h_n(h_2 - 1)p_2 + \ldots h_n(h_{n-1} - 1)p_{n-1} + (h_n - 1)p_n}{(h_1h_2 \ldots h_n) - 1}.$$

Posons $\qquad h_1h_2 \ldots h_n = H$;

nous pouvons mettre u_n sous la forme

$$u_n = Hu_0 + (1 - H)U.$$

Il résulte de cette formule, d'après les équations (1), que tout se passe comme si le point m_0 avait tourné autour du point U, V, les coordonnées de la rotation étant

$$\left\{\begin{aligned} H &= h_1h_2 \ldots h_n, \\ K &= k_1k_2 \ldots k_n. \end{aligned}\right.$$

Ainsi donc une suite de rotations peut se composer en une seule, dont les caractéristiques sont

$$\left\{\begin{aligned} A &= \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n, \\ \Phi &= \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n, \end{aligned}\right.$$

autour d'un point U, V, qu'on peut appeler le centre résultant du mouvement.

Cas particulier. — Supposons toutes les rotations simples $(\alpha = 1)$ et de même angle :

$$h_1 = h_2 = \ldots = h = e^{i\varphi},$$
$$k_1 = k_2 = \ldots = k = e^{-i\varphi},$$
$$hk = 1\,;$$

il vient

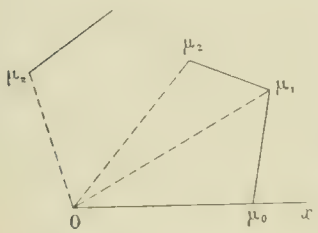
$$U = \frac{p_1 h^{n-1} + p_2 h^{n-2} + \ldots + p_{n-1} h + p_n}{h^{n-1} + h^{n-2} + \ldots + h^2 + h + 1},$$

$$V = \frac{q_n h^{n-1} + q_{n-1} h^{n-2} + \ldots + q_2 h + q_1}{h^{n-1} + h^{n-2} + \ldots + h^2 + h + 1},$$

formules d'où résulte que si φ varie, le centre résultant décrit une courbe unicursale d'ordre $n-1$, qui passe par le centre de gravité du polygone formé par les n centres de rotation, comme on peut le vérifier pour $h = 1$.

Cette propriété peut s'énoncer autrement : Soit P un polygone fermé. Sur chaque côté et dans un même sens de rotation, construisons des triangles isocèles semblables entre eux, d'angle au sommet φ. Soit Π le polygone formé par les sommets de ces triangles. Si nous supposons ce polygone Π donné et que φ varie, les sommets de P décriront chacun une courbe unicursale d'ordre $n-1$, n étant le nombre des sommets de Π et de P. Les polygones P ont d'ailleurs tous pour centre de gravité commun celui de Π.

Représentation du mouvement. — Soit Ox un axe polaire, μ_0 un point de cet axe, à la distance ρ_0 de l'origine.



Effectuons successivement sur ce point toutes les rotations en conservant O pour centre commun ; μ_0 vient d'abord en μ_1 tel que

$$O\mu_1 = \rho_1 = \alpha_1 \rho_0, \qquad \widehat{\mu_0 O \mu_1} = \varphi_1,$$

puis en $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$

Appelons *hodographe* l'ensemble des positions du point μ.

La position de μ_0 est d'ailleurs arbitraire : il est même inutile de prendre μ_0 sur Ox.

Les caractéristiques de la rotation résultante sont

$$A = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = \frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{\rho_2}{\rho_1}\ldots\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} = \frac{\rho_n}{\rho_0},$$

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \widehat{\mu_0 O \mu_n}.$$

Mouvement continu. — Supposons que $a_1, a_2, \ldots$ soient les points successifs d'une courbe que nous appellerons *base*, et supposons que α et φ varient d'une façon continue. Autrement dit, supposons que l'hodographe et la base se correspondent point par point.

Soit φ l'angle polaire de l'hodographe. L'angle de la rotation sera $d\varphi$. L'autre caractéristique sera

$$\alpha = \frac{\rho + d\rho}{\rho} = 1 + \frac{d\rho}{\rho}.$$

Cherchons u_n, v_n et U, V.

Le calcul de u_n revient à celui de U d'après une des formules ci-dessus, mais nous calculerons u_n et U séparément.

Calcul de U. — Le numérateur de U peut s'écrire

$$(h_1 h_2 \ldots h_n)p_1 + (h_2 \ldots h_n)(p_2 - p_1) + (h_3 \ldots h_n)(p_3 - p_2) + \ldots + h_n(p_n - p_{n-1}) - p_n\,;$$

mais

$$p_{i+1} - p_i = dp_i\,;$$

d'où

$$(H - 1)U = (h_1 h_2 \ldots h_n)p_1 + (h_2 \ldots h_n)dp_1 + (h_3 \ldots h_n)dp_2 + \ldots + h_n dp_{n-1} - p_n.$$

$$\frac{\Pi - 1)U - \Pi p_1 + p_n}{\Pi} = \frac{dp_1}{h_1} + \frac{dp_2}{h_1 h_2} + \ldots + \frac{dp_{n-1}}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}}.$$

Or

$$h_1 = \alpha_1 e^{i\alpha_1} = \frac{\rho_1}{\rho_0} e^{i\alpha_1},$$

$$h_1 h_2 = \alpha_1 \alpha_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{\rho_2}{\rho_0} e^{i\widehat{\alpha_0 \alpha_2}},$$

$$h_1 h_2 \ldots h = \frac{\rho}{\rho_0} e^{i\widehat{\alpha_0 \alpha}} = \frac{\rho}{\rho_0} e^{i\varphi - \varphi_0} = \frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho_0 e^{i\varphi_0}},$$

ρ_0, φ_0 étant les coordonnées du point de l'hodographe qui correspond à a_0. D'où

$$\frac{dp_1}{h_1} + \frac{dp_2}{h_1 h_2} + \ldots + \frac{dp}{h_1 h_2 \ldots h} = \rho_0 e^{i\varphi_0}\left(\frac{dp_1}{\rho_1 e^{i\varphi_1}} + \frac{dp_2}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} + \ldots + \frac{dp}{\rho e^{i\varphi}}\right),$$

$$= \rho_0 e^{i\varphi_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{dp}{\rho e^{i\varphi}},$$

par définition de l'intégrale définie.

Posons $\rho e^{i\varphi} = \pi$; remarquons que $\Pi = \frac{\pi}{\pi_0}$; il vient finalement

$$U = \frac{\frac{p}{\pi} - \frac{p_0}{\pi_0} - \int_{\pi_0}^{\pi} \frac{dp}{\pi}}{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi_0}}.$$

Calcul de u_n. — La formule

$$u' = hu + (1 - h)p$$

s'écrit, en observant que $u' = u + du$,

$$(1 - h)u + du = (1 - h)p;$$

d'ailleurs

$$h = \left(1 + \frac{d\rho}{\rho}\right)e^{id\varphi} = \left(1 + \frac{d\rho}{\rho}\right)(1 + id\varphi) = 1 + \frac{d\rho}{\rho} + id\varphi,$$

aux infiniment petits supérieurs près. Mais nous avons posé

$$\rho e^{i\varphi} = \pi,$$

d'où

$$\frac{d\rho}{\rho} + id\varphi = \frac{d\pi}{\pi}$$

et

$$\frac{u\,d\pi}{\pi} + du = p\frac{d\pi}{\pi},$$

$$\frac{\pi du - u d\pi}{\pi^2} = -p\frac{d\pi}{\pi^2},$$

$$d\frac{u}{\pi} = pd\frac{1}{\pi};$$

intégrons :

$$\frac{u}{\pi} = \int pd\frac{1}{\pi} + C = \frac{p}{\pi} - \int \frac{dp}{\pi} + C,$$

d'où

$$u = p - \int \frac{dp}{\pi} + C\pi;$$

pour calculer C, plaçons-nous à l'origine du mouvement : l'intégrale est nulle, puisque ses limites se confondent, et

$$u_0 = p_0 + C\pi_0, \qquad C = \frac{u_0 - p_0}{\pi_0},$$

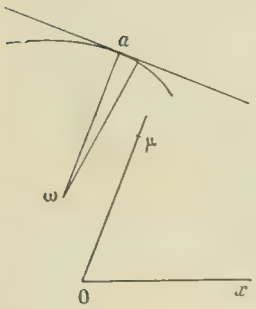
$$\frac{u - p}{\pi} = \frac{u_0 - p_0}{\pi_0} - \int_{\pi_0}^{\pi} \frac{dp}{\pi}.$$

formule qu'on peut aussi écrire

$$u = p + \mathrm{H}(u_0 - p_0) - \pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{dp}{\pi}.$$

et qui permet de trouver le lieu de m lorsqu'on connaît la base, l'hodographe et la loi de correspondance entre les deux courbes.

Exemple. — Supposons que le rayon polaire de l'hodographe soit parallèle à la normale en a à la base et de longueur égale au rayon de courbure en a.



Soit

$$\text{(T)} \qquad x \cos t + y \sin t = f(t)$$

l'équation de la tangente en a à la base :

$$\varphi = t\,;$$

$$\rho = \text{rayon de courbure} \quad \omega a = f + f'',$$

$$p = (f + if')e^{it}.$$

Pour établir ces deux formules, il suffit de remarquer que le point a est le point de contact de la droite T avec son enveloppe, c'est-à-dire à l'intersection de T et de

$$\text{(N)} \qquad -x \sin t + y \cos t = f'(t),$$

puis de remarquer que la droite N est perpendiculaire à T, c'est-à-dire justement la normale en a ; par suite le centre de courbure ω est à l'intersection de N et de

$$-x \cos t - y \sin t = f''(t),$$

équation obtenue en dérivant celle de N.

Cela posé,

$$dp = i(f + f'')e^{it}dt,$$

$$\pi = \rho e^{i\varphi} = (f + f'')e^{it},$$

et

$$u = p + \pi \frac{u_0 - p_0}{\pi_0} - \pi \int_{t_0}^{t} i\,dt,$$

$$= p + \pi \frac{u_0 - p_0}{\pi_0} - \pi i(t - t_0).$$

Autre exemple. — Supposons que l'hodographe soit un cercle de rayon 1, c'est-à-dire que nous ayons affaire à des rotations ordinaires. Prenons φ pour variable indépendante, en établissant la même loi de correspondance $\varphi = t$ avec $\varphi_0 = 0$.

On trouve

$$\mathrm{U} = \frac{(f + if') - (f_0 + if_0') - i\int_0^t (f + f'')dt}{e^{-it} - 1},$$

$$= \frac{f - f_0 - i\int_0^t f\,dt + i(f' - f_0') - \int_0^t f''dt}{e^{-it} - 1};$$

la quantité entre crochets est nulle ; d'où

$$\mathrm{U} = \frac{\left[f - i\int_0^t f\,dt\right]_0^t}{e^{-it} - 1}.$$

Soit $f = \mathrm{F}'$. La courbe qui a pour tangente

$$x \sin t - y \cos t = \mathrm{F}(t)$$

est une développante de la base, et il est facile de voir que pour un point de cette courbe,

$$\mathrm{P} = (\mathrm{F}' - i\mathrm{F})e^{it};$$

d'ailleurs
$$f - i\int f\,dt = F - i\int F\,dt = F' - iF = Pe^{-it},$$
en supposant $F(0) = 0$; d'où, pour u,
$$u = Hu_0 + (1 - H)U = e^{it}u_0 + \left[\frac{1 - e^{it}}{e^{-it} - 1}Pe^{-it}\right]_0^t = e^{it}u_0 + P - P_0.$$

On peut supposer en tous les cas $u_0 = v_0 = 0$;
d'où
$$u = P - P_0.$$

Ainsi donc le point m décrit dans ce cas une développante de la base, tournée d'un certain angle.

Relation entre trois points u, u', u''.

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{u}{\pi} - \frac{u_0}{\pi_0} = \frac{p}{\pi} - \frac{p_0}{\pi_0} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\pi},\\ &\frac{u'}{\pi} - \frac{u'_0}{\pi_0} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ &\frac{u''}{\pi} - \frac{u''_0}{\pi_0} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{aligned}\right.$$

d'où
$$\frac{u - u'}{\pi} = \frac{u_0 - u'_0}{\pi_0}, \qquad \frac{u - u''}{\pi} = \frac{u_0 - u''_0}{\pi_0};$$

on en déduit
$$\frac{u - u'}{u - u''} = \frac{u_0 - u'_0}{u_0 - u''_0},$$

ou
$$\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ u_0 & u'_0 & u''_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

relation linéaire et homogène, exprimant que le triangle $uu'u''$ est semblable au triangle $u_0u'_0u''_0$.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1063. *On considère un plan* P *et une sphère de centre* A, *tout entière d'un même côté du plan. Soit* O *la projection du centre de la sphère sur le plan* P.

1° *On demande l'équation générale des paraboloïdes circonscrits à la sphère, passant en* O *et coupant le plan* P *suivant une ellipse dont les axes ont des directions données.*

2° ***Trouver le lieu des sommets de ces paraboloïdes.***

3° *On considère les sphères inscrites dans l'un de ces paraboloïdes et, en particulier, celle qui passe en* O. ***Trouver le lieu du cercle de contact de cette sphère avec le paraboloïde et le lieu de son centre.***

4° ***Trouver le lieu des foyers de ces paraboloïdes.***

Prenons le plan P pour plan des xy et pour axe des z la perpendiculaire OA à ce plan, pour axes des x et des y les parallèles menées par le point O aux axes de l'ellipse intersection du paraboloïde avec le plan P, et désignons par a la cote du point A, par R le rayon de la sphère.

1. Nous aurons pour équation de la sphère
$$S = x^2 + y^2 + (z - a)^2 - R^2 = 0,$$
et pour équation du paraboloïde
$$\lambda S = (ux + vy + wz + r)^2 = 0$$

En exprimant d'abord que l'ensemble des termes du second degré se décompose en un produit de deux facteurs, ou, ce qui revient au même, que la forme quadratique correspondante a une solution double, nous obtenons $\lambda = u^2 + v^2 + w^2$, et la solution double qui donne la direction de l'axe est

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w}.$$

La section faite par le plan $z = 0$ a pour équation

$$(u^2 + v^2 + w^2)(x^2 + y^2 + a^2 - R^2) - (ux + vy + r)^2 = 0,$$

et la condition pour qu'elle ait ses axes parallèles à Ox et à Oy est $uv = 0$, ce qui nous donne $u = 0$ ou $v = 0$; le problème se décompose donc en deux autres; mais il suffit d'en considérer un, car rien ne distingue l'axe des x de l'axe des y et, par suite, le plan des zx du plan des zy. Nous prendrons $v = 0$.

La condition pour que le paraboloïde passe à l'origine se réduit alors à

$$r^2 = (a^2 - R^2)(u^2 + w^2);$$

d'après l'hypothèse faite sur la position de la sphère par rapport au plan P, $a^2 - R^2$ est positif; nous désignerons ce nombre par k^2, et la relation précédente nous donnera alors

$$u = \frac{r}{k}\cos\varphi, \qquad w = \frac{r}{k}\sin\varphi.$$

Finalement l'équation générale des paraboloïdes indiqués est

$$\Pi \equiv x^2 + y^2 + (z - a)^2 - R^2 - (x\cos\varphi + z\sin\varphi + k)^2 = 0.$$

2. Le sommet de chaque paraboloïde est à l'intersection de cette surface avec l'axe; or l'axe est la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan des contacts; il a donc pour équations $y = 0$ et $\dfrac{x}{\cos\varphi} = \dfrac{z - a}{\sin\varphi}$. Par conséquent le lieu des sommets est une courbe du plan des zx que nous obtiendrons en faisant $y = 0$ dans Π, puis en éliminant φ entre l'équation restante et celle que nous venons d'écrire. La première se simplifie et s'écrit

$$(x\sin\varphi - z\cos\varphi)^2 - 2az - 2k(x\cos\varphi + z\sin\varphi) = 0.$$

En faisant passer $2k(x\cos\varphi + z\sin\varphi)$ dans le second membre, en élevant au carré et rendant homogène à l'aide de la relation $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, nous n'avons plus qu'à remplacer ensuite $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ par les quantités proportionnelles x et $z - a$ pour avoir l'équation du lieu. Ceci nous donne

$$(1) \qquad [a^2x^2 - 2az(x^2 + (z - a)^2)]^2 = 4k^2(x^2 + z^2 - az)^2(x^2 + (z - a)^2),$$

équation du sixième degré qui représente une ligne ayant un point double à l'origine et un point quadruple au point A.

3. L'équation Π est de la forme $S - P^2 = 0$, P désignant une fonction linéaire; elle peut s'écrire

$$S + 2\mu P + \mu^2 - (P + \mu)^2 = 0.$$

Sous cette forme, on voit de suite que la sphère variable $S + 2\mu P + \mu^2 = 0$ décrit, quand μ varie, toute la série des sphères inscrites dans Π. Celle qui passe au point O correspond à la valeur de μ que l'on obtient en annulant le terme constant, $\mu = -k$; son équation est donc

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az - 2k(x\cos\varphi + z\sin\varphi) = 0;$$

elle a d'ailleurs pour plan de contact $P + \mu = 0$, ici $P - k = 0$ ou $x\cos\varphi + z\sin\varphi = 0$. Par conséquent le lieu du cercle de contact est la sphère

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0,$$

qui a pour centre le point A et pour rayon OA.

Le plan du cercle de contact tourne autour de Oy : il est dès lors évident que le lieu du centre de ce cercle est le cercle du plan des zx décrit sur OA comme diamètre.

Quant au centre de la sphère elle-même, il a pour coordonnées $x = k\cos\varphi$, $y = 0$ et $z = a + k\sin\varphi$; il décrit donc, dans le plan des zx, le cercle

$$(3) \qquad x^2 + (z - a)^2 = k^2,$$

qui a pour rayon k et pour centre le point A.

4. L'équation générale des sphères inscrites dans le paraboloïde est

$$S + 2\mu P + \mu^2 = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az + k^2 + 2\mu(x\cos\varphi + z\sin\varphi - k) + \mu^2 = 0.$$

Le foyer est le centre de celle qui a un rayon nul ; nous aurons donc ce point en prenant le centre de la sphère précédente et en exprimant qu'il est sur cette sphère, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}f_t = 0$.

Nous trouvons ainsi successivement

$$x = -\mu\cos\varphi, \qquad y = 0, \qquad z = a - \mu\sin\varphi,$$

et

$$-az + \mu(x\cos\varphi + z\sin\varphi) + k^2 + 2\mu k + \mu^2 = 0.$$

L'élimination de μ et de φ entre ces équations est très facile : nous remplaçons d'abord $\mu\cos\varphi$, $\mu\sin\varphi$ et μ^2 par leurs valeurs en fonction de x et de z, et nous avons

$$-az - x^2 - z(z - a) + k^2 + 2\mu k + x^2 + (z - a)^2 = 0,$$

puis

$$2\mu k = 2az - k^2 - a^2 ;$$

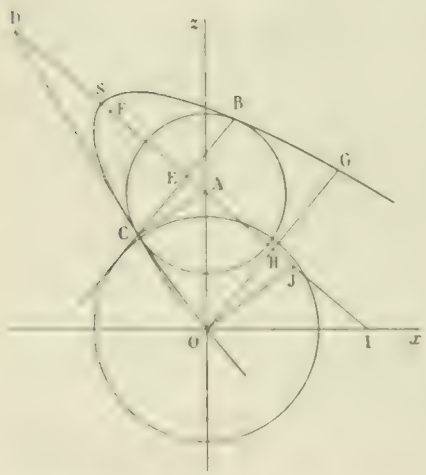
il ne reste plus qu'à élever au carré et à remplacer μ^2 par $x^2 + (z - a)^2$. Le lieu est donc une courbe du plan des zx qui a pour équation

$$(4) \qquad 4k^2(x^2 + (z - a)^2) = (2az - a^2 - k^2)^2.$$

C'est une conique ayant pour foyer le point A, pour directrice la droite $z = \frac{a^2 + k^2}{2a}$, et pour excentricité $e = \frac{a}{k}$; ce nombre est plus grand que 1 ; donc la conique est une hyperbole.

Très bonne solution : M. J. Marchal.

Solution géométrique. — La projection de l'axe d'un paraboloïde de révolution sur le plan d'une section plane coïncide avec l'un des axes de cette section ; donc l'axe du paraboloïde se trouve soit dans le plan des zx, soit dans le plan des yz. Rien ne distingue ces deux cas l'un de l'autre. Choisissons alors le premier ; l'axe de la parabole méridienne sera alors une certaine droite du plan des zx passant par le centre de la sphère, A.



Figurons dans le plan des zx le cercle méridien de la sphère et le cercle orthogonal à celui-ci et ayant pour centre le point O ; figurons en outre la parabole doublement tangente au cercle A et passant par le point O, avec son axe, AS, son sommet, S, la corde des contacts, BC, le pôle de cette droite, D, et le pied E de l'axe sur la corde des contacts.

Nous savons que le sommet S est le milieu de ED, le foyer F, le milieu de AD, car A est le pied de la normale à la parabole au point C. Nous savons aussi que la racine carrée de la puissance du point O de la parabole par rapport au cercle focal A est égale à la distance de ce point O à la corde des contacts ; donc cette droite BC enveloppe le cercle O.

Alors le lieu du point D est la polaire réciproque du cercle O par rapport au cercle A ; c'est une hyperbole ayant pour foyer le point A et pour directions asymptotiques les perpendiculaires aux tangentes au cercle O menées par le point A, c'est-à-dire les tangentes au cercle A menées par le point O. La directrice est la polaire du point O par rapport au cercle A ; c'est donc l'axe radical des deux cercles. Les projections du foyer A sur les asymptotes sont sur la directrice ; par consé-

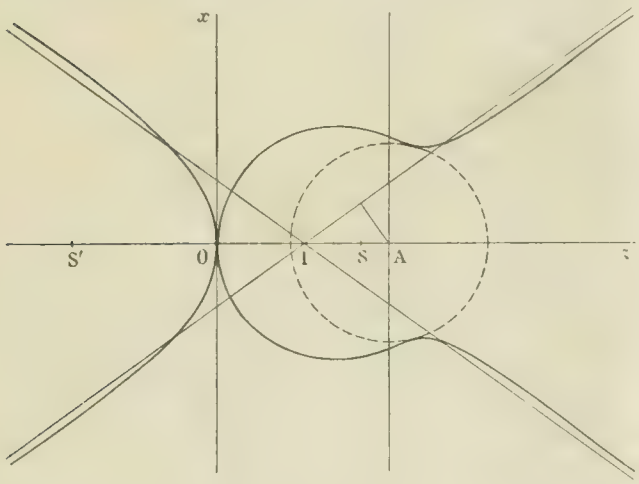
quent les asymptotes elles-mêmes sont les tangentes au cercle A issues de O et le point O est le centre.

Le lieu du foyer de la parabole est l'homothétique du précédent dans le rapport $\frac{1}{2}$ par rapport au point A ; c'est donc une hyperbole semblable à la précédente et ayant pour foyers A et O. C'est le quatrième lieu demandé.

La trace du plan du parallèle qui passe au point O est la parallèle OG à BC menée par O. On a évidemment AG = AO ; le lieu de ce parallèle est donc la sphère de centre A et de rayon AO.

Le centre de ce parallèle est le point de rencontre de OG avec l'axe de la parabole ; c'est le milieu de OG. Son lieu est donc le cercle du plan des zx décrit sur OA comme diamètre.

Le centre de la sphère inscrite le long du parallèle OG est le point J où la normale en O rencontre l'axe.



D'après la propriété de la sous-normale, EA = HJ = p ; donc AJ = EH ; mais EH, qui est égal à OB, est constant et égal au rayon du cercle O. Le lieu du point J est donc un cercle du plan des zx ayant pour centre le point A et pour rayon le rayon du cercle O.

D'autre part, on a AE.AD = R^2 ; le lieu du point E est donc l'inverse de celui de D, avec R^2 comme puissance d'inversion, et le lieu du sommet S est le lieu des milieux de DE, ce qui donne un mode de génération du lieu des sommets. En outre le lieu de E est aussi la podaire du cercle O par rapport au point A ; c'est donc un limaçon de Pascal ayant pour axe Oz et pour point double le point A.

Pour compléter l'étude du lieu des sommets, nous prendrons pour pôle le point A et pour axe polaire Az ; nous aurons $AE = k - a\cos\omega$, puis $AD = \frac{R^2}{k - a\cos\omega}$; par conséquent

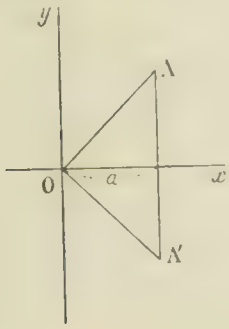
$$\rho = \frac{1}{2}\left(k - a\cos\omega + \frac{R^2}{k - a\cos\omega}\right).$$

C'est l'équation polaire du lieu ; elle permet de le construire aisément. Nous nous bornons à donner la forme de cette courbe telle qu'elle nous a été envoyée par un de nos abonnés de Grenoble, M. Delimbert, qui nous a fait parvenir en même temps une excellente solution analytique.

Bonne et complète solution de M. J. Haag, à Nancy.

1071. — *Par un point* M *du plan d'un triangle rectangle isocèle, il passe deux paraboles circonscrites à ce triangle. Trouver et construire la courbe lieu des points* M *tels que ces deux paraboles soient égales.*

Nous prendrons pour axes de coordonnées la hauteur du triangle et la parallèle à l'hypoténuse menée par le sommet O. Les coordonnées des sommets A, A′ seront $x = a$, $y = \pm a$.



Cela posé, l'équation d'une parabole étant

$$(y - tx)^2 + \lambda x + \mu y + \nu = 0,$$

les conditions qui expriment qu'elle est circonscrite au triangle OAA′ sont

$$\lambda = -a(t^2 + 1), \qquad \mu = 2at, \qquad \nu = 0.$$

Pour avoir le paramètre de la parabole, nous pouvons employer la méthode élémentaire qui consiste à rapporter la courbe à son axe et à la tangente au sommet, en écrivant son équation ainsi :

$$(y - tx + \rho a)^2 - (t^2 + 1 - 2\rho t)ax + 2a(t - \rho)y - \rho^2 a^2 = 0.$$

La condition de perpendicularité des deux droites détermine ρ :

$$t(t^2 + 1 - 2\rho t) + 2(t - \rho) = 0, \qquad \text{d'où} \quad \rho = \frac{t(t^2 + 3)}{2(t^2 + 1)}$$

On peut alors écrire l'équation

$$\frac{(y - tx + 2a)^2}{t^2 + 1} + \frac{a(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x + ty + \ldots}{(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

ce qui montre que le carré du double du paramètre est égal à

$$\frac{a^2(t^2 - 1)^2}{t^2 + 1}.$$

Or, x, y étant les coordonnées d'un point M du lieu cherché, il passe par ce point deux paraboles dont les t sont les racines t_1, t_2 de l'équation

$$(y - tx)^2 - a(t^2 + 1)x + 2aty = 0,$$

ou

$$x(x - a)t^2 - 2(x - a)yt + y^2 - ax = 0.$$

Pour que les deux paraboles soient égales, il faut qu'on ait

$$\frac{(t_1^2 - 1)^2}{(t_1^2 + 1)^3} = \frac{(t_2^2 - 1)^2}{(t_2^2 + 1)^3},$$

ou, après avoir chassé les dénominateurs et divisé par $t_1^2 - t_2^2$,

$$(1) \qquad t_1^2 t_2^2 - 10t_1^2 t_2^2 - 2t_1^2 t_2^2(t_1^2 + t_2^2) + (t_1^2 + t_2^2)^2 + 2(t_1^2 + t_2^2) + 5 = 0.$$

On a d'ailleurs $\qquad t_1 + t_2 = \frac{2y}{x}, \qquad t_1 t_2 = \frac{y^2 - ax}{x(x - a)}.$

Nous avons supprimé les facteurs $t_1 + t_2$, $t_1 - t_2$ qui, égalés à 0, représentent les côtés du triangle $(t_1 - t_2)^2 = \frac{4a(x^2 - y^2)}{x^2(x - a)}$. Le véritable lieu s'obtient en remplaçant dans (1) $t_1 t_2$, $t_1 + t_2$ par leurs valeurs. En posant $t_1 + t_2 = \sigma$, $t_1 t_2 = \pi$, cette équation s'écrit

$$(2) \qquad (\pi - 1)^2(\pi + 1)(\pi + 5) + \sigma^2[\sigma^2 - 2(\pi^2 + 2\pi - 1)] = 0.$$

Il est facile de voir que $\pi - 1$ est en facteur dans le crochet. On a en effet

$$\sigma^2 - 4\pi = -\frac{4a}{x}(\pi - 1).$$

Après avoir divisé par $\pi - 1$, il reste

$$(\pi^2 - 1)(\pi + 5) - 2\sigma^2\left(\pi + 1 - \frac{2a}{x}\right) = 0,$$

d'où le lieu

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2ax)(5x^2 + y^2 - 6ax) + 8y^2(x - a)^2(x^2 + y^2 - 2a^2) = 0.$$

C'est une courbe du sixième ordre ayant un point double à l'origine, et deux points triples en A et A', et admettant, comme on devait s'y attendre, Ox pour axe de symétrie.

L'équation, sous la forme que nous lui avons donnée, met en évidence de nombreuses régions qui vont nous être utiles pour construire la courbe. On peut également l'ordonner par rapport à y :

$$y^6 - 3x^2 - 8ax + 8a^2)y^4 - (9x^4 - 8ax^3 - 20a^2x^2 + 32a^3x - 16a^4)y^2 - x^4(x - 2a)(5x - 6a) = 0.$$

La tangente en O est Ox. L'axe Ox rencontre en outre la courbe aux points $x = 2a$, $x = \frac{6a}{5}$ (tangente parallèle à Oy).

En faisant $x = 0$, on trouve $y^2(y^2 - 4a^2)^2 = 0$, ce qui montre l'existence de deux nouveaux points doubles en $x = 0$, $y = \pm 2a$; les tangentes au point $x = 0$, $y = 2a$ sont $y - 2a = x\left(-1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Les tangentes au point triple $x = a$, $y = a$ sont toutes les trois réelles, leurs coefficients angulaires étant racines de l'équation

$$m^3 + m^2 - 4m - 2 = 0 \qquad (1 \text{ rac.} < 0 \text{ et } 2 \text{ rac.} > 0).$$

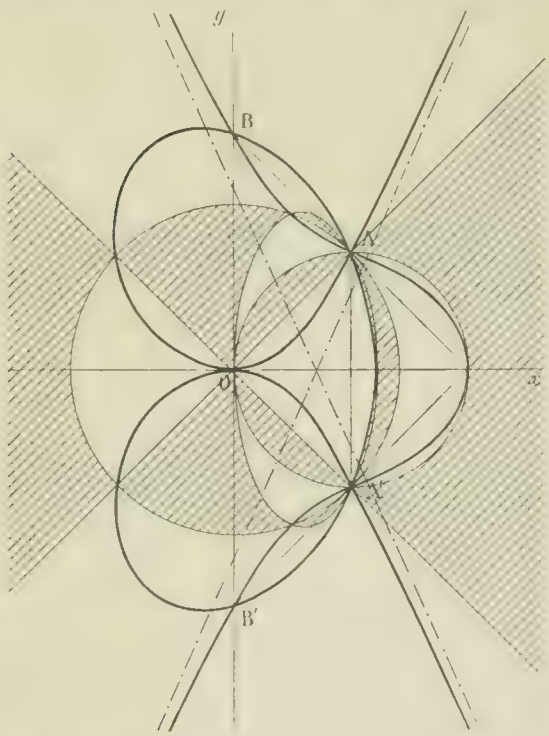
Asymptotes. — Les termes du sixième degré étant $(x^2+y^2)^2(5x^2-y^2)$, si l'on remplace dans l'équation ordonnée en y, y par $x\sqrt{5}+\delta$, et qu'on annule le coefficient de x^7, on trouve $9\delta\sqrt{5}+32a=0$. L'asymptote est donc

$$y=\sqrt{5}\left(x-\frac{32a}{45}\right).$$

L'autre asymptote est la symétrique de cette droite par rapport à Ox.

En se servant des régions en évidence dans la première équation, on peut maintenant tracer la courbe. La position des arcs infinis par rapport aux asymptotes ne donne lieu à aucune ambiguïté, si l'on remarque que chaque asymptote ne peut rencontrer la courbe qu'en quatre points à distance finie.

Remarque. — On peut montrer que la courbe est unicursale. En effet, une conique passant par les deux points triples A, A′ et par les deux points doubles B, B′ rencontre à nouveau la courbe en deux points situés sur une parallèle à Oy, car elle admet Ox comme axe. L'équation d'une telle conique peut donc s'écrire



$$(3)\qquad y^2+3ax-4a^2+\lambda x(x-a)=0.$$

Il en résulte que si x, y sont les coordonnées d'un des points d'intersection de la courbe et de la conique autres que A, A′, B, B′, x et y^2 seront exprimables rationnellement en λ.

En portant la valeur de y^2 tirée de (3) dans l'équation de la courbe, on a, après suppression du facteur $x^2(x-a)^2$,

$$x=-\frac{4a(\lambda^2+2\lambda-7)}{(\lambda-1)^2(\lambda+5)},$$

d'où l'on déduit d'après (3)

$$y^2=\frac{64a^2(\lambda+1)(3\lambda-5)}{(\lambda-1)^2(\lambda+5)^2}. \qquad (4)$$

Maintenant on peut, par un changement de paramètre, mettre y^2 sous la forme d'un carré. Il suffit de poser, par exemple, $(\lambda+1)(3\lambda-5)=3(\lambda+\theta)^2$, c'est-à-dire $\lambda=\dfrac{3\theta^2+5}{2(3\theta+1)}$. On obtient ainsi, pour x et y, des expressions du sixième degré en θ.

La discussion de la courbe, si on tient à la faire d'une façon rigoureuse, est plus aisée au moyen des formules (4). Il suffit alors de faire varier λ de $-\infty$ à -1 et de $\frac{5}{3}$ à $+\infty$. On trouverait les résultats que nous avons obtenus sur l'équation cartésienne.

VASNIER.

1083. — *La podaire de la parabole*

$$(P)\qquad (ax+by)^2-4ab(bx+ay)+4a^2b^2=0$$

par rapport à l'origine des coordonnées est une strophoïde oblique (S). *Calculer les coordonnées du point de rencontre de cette courbe avec son asymptote et trouver le lieu de ce point lorsque* $ab=c^{te}$.

Dans les mêmes conditions, trouver le lieu du foyer de la parabole (P) *et le lieu des points de contact des courbes* (P) *et* (S).

Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point M de la parabole (P) ; nous avons

$$(1)\qquad (ax_0+by_0)^2-4ab(bx_0+ay_0)+4a^2b^2=0.$$

La tangente au point M à la parabole a pour équation

$$(2)\qquad ax(ax_0+by_0-2b^2)+by(ax_0+by_0-2a^2)-2ab(bx_0+ay_0)+4a^2b^2=0.$$

et la perpendiculaire menée à cette droite par l'origine est représentée par l'équation

$$(3) \qquad ay(ax_0 + by_0 - 2b^2) - bx(ax_0 + by_0 - 2a^2) = 0.$$

Nous aurons l'équation de la podaire en éliminant x_0, y_0 entre les équations (1), (2) et (3).

L'équation (3) nous donne

$$ax_0 + by_0 = \frac{2ab(by - ax)}{ay - bx};$$

remplaçons $ax_0 + by_0$ par cette valeur dans l'équation (2); nous en tirons

$$2ab(bx_0 + ay_0) = \frac{2ab(by^2 - a^2x^2)}{ay - bx} - 2ab(bx + ay) + 4a^2b^2,$$

ou

$$bx_0 + ay_0 = \frac{(b^2 - a^2)(x^2 + y^2)}{ay - bx} + 2ab;$$

enfin portons les valeurs de $ax_0 + by_0$ et de $bx_0 + ay_0$ dans l'équation (1), nous obtenons, après un calcul des plus simples,

$$(S) \qquad (x^2 + y^2)(ay - bx) + ab(x^2 - y^2) = 0.$$

C'est l'équation de la podaire. Elle représente une strophoïde dont le point double est à l'origine, les tangentes en ce point étant les bissectrices des axes.

L'asymptote de cette strophoïde a une équation de la forme

$$ay - bx - \lambda = 0.$$

L'équation aux abscisses des point de rencontre de cette droite et de la courbe (S) est

$$x^2(\lambda(a^2 + b^2) + ab(a^2 - b^2)) + \lambda(\lambda - ab)(2bx - \lambda) = 0.$$

La valeur de λ correspondant à l'asymptote doit annuler le coefficient de x^2; nous avons donc $\lambda = \frac{ab(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$, et l'équation de l'asymptote est

$$ay - bx + \frac{ab(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} = 0.$$

L'équation aux abscisses des points de rencontre devient alors $2bx + \lambda = 0$; elle nous donne $x = -\frac{\lambda}{2b}$ ou $x = \frac{a(a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2)}$. Remplaçons x par cette valeur dans l'équation de l'asymptote, nous obtenons $y = \frac{b(b^2 - a^2)}{2(a^2 + b^2)}$.

Les coordonnées du point R où la strophoïde S rencontre son asymptote sont donc

$$(4) \qquad x = \frac{a(a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2)}, \qquad y = \frac{b(b^2 - a^2)}{2(a^2 + b^2)}.$$

Nous aurons le lieu de ce point en éliminant a et b entre les équations (4) et la relation

$$(5) \qquad ab = k.$$

En divisant et en multipliant membre à membre les équations (4), nous avons

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \quad \text{et} \quad xy = -\frac{k(a^2 - b^2)^2}{4(a^2 + b^2)^2}.$$

Comme cette dernière relation est homogène par rapport à a et b, nous pouvons y remplacer a et b respectivement par les quantités proportionnelles x et $-y$. Nous obtenons ainsi l'équation du lieu

$$4xy(x^2 + y^2)^2 + k(x^2 - y^2)^2 = 0.$$

On construira aisément cette courbe en posant $y = tx$, ou en passant en coordonnées polaires. Elle est symétrique par rapport aux bissectrices des axes de coordonnées, et ces axes sont asymptotes à la courbe.

Dans le tracé ci-contre nous avons supposé $k > 0$.

Lieu du foyer de (P). — L'équation de la parabole (P) peut être écrite

$$(bx + ay - 2ab)^2 + (a^2 - b^2)(x^2 - y^2) = 0,$$

et cela nous montre que la parabole est tangente aux deux droites $x^2 - y^2 = 0$, la corde des contacts ayant pour équation $bx + ay - 2ab = 0$. Il en résulte que le foyer est le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette corde. On obtiendra donc le lieu du foyer en éliminant a et b entre les équations

$$bx + ay - 2ab = 0, \qquad ax - by = 0, \qquad ab = k.$$

Les deux premières peuvent s'écrire $bx + ay = 2k$, $ax - by = 0$; nous en tirons

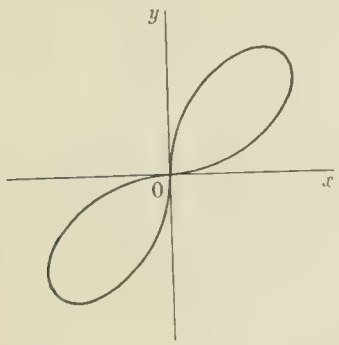
$$\frac{a}{y} = \frac{b}{x} = \frac{2k}{x^2 + y^2},$$

et, en écrivant que le produit ab est égal à k, nous avons

$$(x^2 + y^2)^2 - 4kxy = 0.$$

Cette équation représente une lemniscate de Bernoulli admettant l'origine comme point double et pour tangente en ce point les axes de coordonnées.

Lieu des points de contact des courbes (P) *et* (S). — Ces points sont les pieds des normales issues de l'origine à la parabole, ils sont à l'intersection de l'hyperbole d'Apollonius



$$\frac{x}{a(ax + by - 2b^2)} = \frac{y}{b(ax + by - 2a^2)},$$

ou

$$(6) \qquad (bx - ay)(ax + by) - 2k(ax - by) = 0,$$

et de la parabole (P). Mais on peut remplacer la parabole par la strophoïde (S) et on est ainsi conduit à éliminer a et b entre les équations (6), (S) et (5).

L'équation (S) nous donne d'abord $ay - bx = -\dfrac{k(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$; en remplaçant $ay - bx$ par cette valeur dans (6), nous obtenons

$$ax(x^2 + 3y^2) - by(y^2 + 3x^2) = 0,$$

ou

$$\frac{a}{y(y^2 + 3x^2)} = \frac{b}{x(x^2 + 3y^2)} = \frac{ay - bx}{y^4 - x^4} = -\frac{k(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)(y^4 - x^4)} = \frac{k}{(x^2 + y^2)^2},$$

d'où

$$a = \frac{ky(y^2 + 3x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad b = \frac{kx(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

et, en portant ces valeurs dans (5),

$$(x^2 + y^2)^4 - kxy(x^2 + 3y^2)(y^2 + 3x^2) = 0.$$

On construira facilement cette courbe en posant $y = tx$; elle est symétrique par rapport aux bissectrices des axes, et tangente aux axes à l'origine. Sa forme rappelle celle de la lemniscate qui est le lieu du foyer de (P).

J. MARCHAL.

Bonnes solutions par MM. Dulimbert, à Grenoble; Pierre Goudry, soldat au 126e d'infanterie, à Toulouse; Soules; P. Thonet

PHYSIQUE

1034. — *De l'air tiède et humide, dont la température est t et dans lequel la vapeur d'eau a une tension f, est dirigé lentement, sous la pression atmosphérique, au travers d'un serpentin disposé de façon que l'eau qui s'y condense puisse s'y accumuler. Ce serpentin est placé dans un calorimètre soustrait à tout échange de chaleur avec le milieu ambiant et contenant de l'alcool dont la température initiale est inférieure à zéro de θ degrés. On supposera que la température τ, à laquelle la tension maxima de la vapeur d'eau est égale à f, est supérieure à 0 et inférieure à t. Que se passe-t-il dans le serpentin, et comment varie la température du calorimètre ?*

Première période. — En même temps que l'air se refroidit dans le serpentin, une partie de la vapeur d'eau qu'il apporte se condense et se congèle. La chaleur cédée par l'air et celle qui résulte de la condensation et de la congélation élèvent rapidement la température du calorimètre, qui arrive ainsi à 0°.

Deuxième période. — A 0°, la vapeur d'eau condensée ne se congèle plus. La chaleur apportée au calorimètre est absorbée tout entière par la fusion de la glace formée pendant la première période et la température reste stationnaire jusqu'à ce que toute cette glace ait disparu.

Troisième période. — Une partie de la vapeur continue de se condenser, puisque f est supérieur à F_0, mais en proportion de moins en moins grande à mesure que la température s'élève, et cette ascension de la température est de moins en moins rapide. Le calorimètre arrive ainsi à la température τ pour laquelle la vapeur, sous la pression f, est exactement saturante.

Quatrième période. — A partir de la température τ, la vapeur ne se condense plus; au contraire, l'air, en traversant le serpentin, se sature au contact d'eau à une température supérieure à τ et l'eau condensée pendant les périodes précédentes se vaporise peu à peu.

Mettons en équation cette partie du phénomène. Soient t' la température du calorimètre à un instant déterminé, M sa capacité calorifique y compris tout ce qu'il contient à cet instant, m une petite masse d'air sec, μ la masse de vapeur d'eau qu'elle apporte avec elle, μ' la masse de vapeur qu'elle emporte après avoir traversé le serpentin, $\Delta t'$ la variation de température qui en résulte, c et γ les chaleurs spécifiques de l'air sec et de la vapeur d'eau, λ la chaleur de vaporisation dans les conditions de l'expérience.

Écrivons que la chaleur apportée par l'air humide est employée à échauffer le calorimètre de $\Delta t'$ et à vaporiser une masse $\mu' - \mu$ d'eau :

$$(mc + \mu\gamma)(t - t') = M\Delta t' + \lambda(\mu' - \mu).$$

D'autre part, si v désigne le volume de la masse d'air m à l'entrée, v' son volume à la sortie, H la pression atmosphérique, F' la pression maxima de la vapeur d'eau à la température t', a la masse spécifique de l'air normal et d la densité de la vapeur d'eau, on a

$$m = va\frac{H - f}{760}\frac{1}{1 + \alpha t} = v'a\frac{H - F'}{760}\frac{1}{1 + \alpha t'},$$

$$\mu = vda\frac{f}{760}\frac{1}{1 + \alpha t},$$

$$\mu' = v'da\frac{F'}{760}\frac{1}{1 + \alpha t'}.$$

Remplaçons, à l'aide de ces expressions, μ, μ', puis v et v' en fonction de m ; il vient

$$m\left(c + d\frac{f}{H - f}\gamma\right)(t - t') = M\Delta t' + md\lambda\left(\frac{F'}{H - F'} - \frac{f}{H - f}\right).$$

ou
$$\frac{M}{m}\Delta t' = \left(c + d\frac{f}{H-f}\gamma\right)(t-t') - d\lambda\left(\frac{F'}{H-F'} - \frac{f}{H-f}\right).$$

Quand t' est encore voisin de τ, F' est voisin de f et le second terme du second membre est très petit. A mesure que t' croît, ce second terme augmente en valeur absolue et le premier diminue. Si l'on suppose, dans l'équation, t' voisin de t, le premier terme est très petit. Il y a donc, entre τ et t, une valeur de la température pour laquelle l'équation précédente donne
$$\Delta t' = 0.$$

Cinquième période. — Si le calorimètre arrive à la température t' pour laquelle $\Delta t' = 0$ avant que toute l'eau ne soit vaporisée, la chaleur cédée par l'air qui se refroidit est exactement compensée par la chaleur de vaporisation et la température reste stationnaire à t'° jusqu'à ce que toute l'eau ait disparu. La température t satisfaisant à cette condition est donnée par l'équation
$$\left(c + d\frac{f}{H-f}\gamma\right)(t-t') = d\lambda\left(\frac{F'}{H-F'} - \frac{f}{H-f}\right),$$
dans laquelle F', il ne faut pas l'oublier, est fonction de t'. Si les températures sont voisines de la température ordinaire, les pressions f et F' sont petites vis-à-vis de H, et cette équation diffère peu de
$$c(t-t') = d\lambda\frac{F'-f}{H}.$$
Il se trouve, par exemple, que cette condition serait à peu près remplie pour $t = 36^{\circ}$, $H = 760^{mm}$, $f = 9^{mm}$ et $t' = 20^{\circ}$.

Si toute l'eau disparaît du serpentin avant que le calorimètre n'arrive à cette valeur particulière de t', cette cinquième période n'existe pas.

Sixième période. — Une fois l'eau disparue du serpentin, la question se simplifie et il est évident que la température du calorimètre tend asymptotiquement vers la température t de l'air qui le traverse.

Remarque. — Si le calorimètre, contenant encore de l'eau, avait été porté momentanément à une température inférieure à t mais supérieure à la température t' qui peut rester stationnaire, le courant d'air le refroidirait et l'amènerait à cette température t'; c'est là le phénomène bien connu du froid produit par vaporisation au contact de l'air tel qu'on l'observe, par exemple, avec le psychrometre.

Assez bonne, mais incomplète solution de M. P. Tribier.

QUESTIONS PROPOSÉES

1143. — Etant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et une sphère (S) ayant pour centre O' et pour rayon R, on considère les points de rencontre A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 des axes Ox, Oy, Oz avec les plans tangents à (S) qui leur sont respectivement perpendiculaires.

1° Les quadriques (Q), qui sont tangentes aux huit plans $A_\alpha B_\beta C_\gamma$ ($\alpha = 1$ ou 2, $\beta = 1$ ou 2, $\gamma = 1$ ou 2), ont leurs centres dans un même plan (P) quel que soit R.

2° Soit (Q_0) celle des quadriques (Q) qui a son centre sur OO'. Lorsque R varie, les plans tangents communs à (Q_0) et à (S) enveloppent un hyperboloïde et les axes de (Q_0) restent fixes.

3° Deux des focales de (Q_0) s'appuient sur quatre droites ne dépendant pas de la sphère (S). Si l'on se donne seulement le rayon de (S), combien y a-t-il de quadriques (Q_0) ayant un plan principal donné? Lieu des centres des quadriques (Q_0) de grandeur donnée ou semblables à une quadrique donnée.

4° Soit (Q_1) celle des quadriques (Q) qui est de révolution. Lieu de ses foyers. Lieu des sommets de son axe focal quand R varie. Dans les mêmes conditions, il y a trois quadriques (Q_1) tangentes à un plan donné (H) et qui admettent deux plans tangents communs. Enveloppe des plans H pour lesquels les deux plans tangents sont rectangulaires.

Vasnier.

1144. — Le paramètre tangentiel d'un cône du second degré (*) est $\frac{\Sigma(AA' - B'^2)}{\sqrt{\Delta^2}}$.

Montrer que si on considère un cône circonscrit à une quadrique, son paramètre tangentiel a pour expression

$$I = \frac{P}{\sqrt[3]{a^2b^2 . SK . SC}},$$

où P est la puissance du sommet S de ce cône par rapport à la sphère orthoptique de la quadrique, où a^2 et b^2 sont les carrés de deux demi-axes de la quadrique, SC, la distance du point S au plan principal de ces axes, et SK, la distance du point S à son plan polaire.

G. Fontené.

***1145.** — Etant donnés deux tétraèdres, s'il existe une quadrique inscrite au premier et conjuguée au second, il existe aussi une quadrique conjuguée au premier et circonscrite au second.

E. Duporcq.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1094. — *Dans le cas où le polynome du quatrième degré* $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4b'x + a'$ *n'est pas une quatrième puissance exacte, trouver la condition pour qu'on puisse le mettre sous la forme*

$$p(x+\alpha)^4 + q(x+\beta)^4.$$

Résoudre l'équation du quatrième degré dans ce cas.

Le polynome donné étant mis sous la forme indiquée, on aura

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4b'x + a' \equiv p(x+\alpha)^4 + q(x+\beta)^4,$$

ou, en développant,

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4b'x + a' \equiv \begin{cases} px^4 + 4p\alpha x^3 + 6p\alpha^2x^2 + 4p\alpha^3x + p\alpha^4 + \\ qx^4 + 4q\beta x^3 + 6q\beta^2x^2 + 4q\beta^3x + q\beta^4. \end{cases}$$

L'identification conduit aux relations suivantes :

$$(2) \begin{cases} p + q = a, \\ p\alpha + q\beta = b, \\ p\alpha^2 + q\beta^2 = c, \\ p\alpha^3 + q\beta^3 = b', \\ p\alpha^4 + q\beta^4 = a'. \end{cases}$$

Pour que la décomposition soit possible il faut que ces équations, où les inconnues sont p, q, α, β, soient résolubles.

Multiplions les deuxième, troisième, quatrième équations par $\alpha + \beta$, effectuons et tenons compte des relations (2) ; nous aurons

$$(3) \begin{cases} b(\alpha+\beta) - a\alpha\beta - c = 0, \\ c(\alpha+\beta) - b\alpha\beta - b' = 0, \\ b'(\alpha+\beta) - c\alpha\beta - a' = 0 \end{cases}$$

qui, avec les deux premières équations (2), remplaceront le système (2).

(*) Voir dans le n° de Novembre 1900 de la *Revue* une note de M. Fontené sur le paramètre tangentiel d'un cône du second degré.

Les deux premières équations (2) détermineront p et q si les équations (3) sont résolubles en α et β.

Si dans ces équations on prend pour inconnues $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$, on voit qu'elles seront résolubles si l'on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & b' \\ c & b' & a' \end{vmatrix} = 0;$$

c'est la condition cherchée.

Lorsqu'elle est réalisée, les équations (3) se réduisent à deux qui déterminent $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$, à la condition toutefois que l'on n'ait pas simultanément

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} b & a \\ c & b \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} b & a \\ b & c \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} c & b \\ b' & c \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons donc l'un de ces déterminants non nul, par exemple, $b^2 - ac \neq 0$.

Les deux premières équations (3) nous donnent

$$\alpha+\beta = \frac{bc-ab'}{b^2-ac}, \qquad \alpha\beta = \frac{c^2-bb'}{b^2-ac};$$

α et β sont donc racines de l'équation

$$(b^2-ac)z^2 - (bc-ab')z + c^2 - bb' = 0.$$

Celle-ci donne

$$z_1 = \frac{bc-ab' + \sqrt{(bc-ab')^2 - 4(b^2-ac)(c^2-bb')}}{2(b^2-ac)},$$

et

$$z_2 = \frac{bc-ab' - \sqrt{(bc-ab')^2 - 4(b^2-ac)(c^2-bb')}}{2(b^2-ac)}.$$

et nous prendrons par exemple

$$\alpha = z_1, \qquad \beta = z_2.$$

Alors les deux équations

$$(5) \begin{cases} p+q = a, \\ pz_1 + qz_2 = b \end{cases}$$

donneront p et q, à la condition toutefois que l'on ait $z_1 - z_2 \neq 0$.

Si l'on avait $z_1 = z_2$, le système (2) deviendrait

$$\begin{cases} p+q = a, \\ az_1 = b, \\ az_1^2 = c, \\ az_1^3 = b', \\ az_1^4 = a', \end{cases}$$

ce qui montre que le polynome serait une quatrième puissance exacte $a(x+z_1)^4$.

Ce cas étant écarté, on aura nécessairement $z_1 - z_2 \neq 0$,

et les équations (5) donneront

$$p = \frac{az_2 - b}{z_2 - z_1}, \qquad q = \frac{az_1 - b}{z_1 - z_2}.$$

Si on prenait $\alpha = z_2$, $\beta = z_1$, il suffirait d'échanger p et q.

On a donc deux systèmes de solutions, mais ils ne donnent qu'une seule manière de décomposer le polynome, puisque l'une se déduit de l'autre en échangeant α et β et p et q.

Le polynome n'est donc décomposable que d'une seule façon.

Supposons maintenant les déterminants (4) tous nuls, c'est-à-dire $b^2 - ac = 0$, $bc - ab' = 0$, $c^2 - bb' = 0$,

où
$$\frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \frac{c}{b'}.$$

Soit $\frac{1}{m}$ la valeur de ces rapports, nous en déduirons
$$b = am, \qquad c = am^2, \qquad b' = am^3,$$
et le polynome se mettra sous la forme $a(x+m)^4 + (a' - am^4)$,
c'est-à-dire qu'il se réduira à une quatrième puissance plus une constante.

La condition de possibilité est donc
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & b \\ c & b' & a' \end{vmatrix} = 0.$$

Si les coefficients des éléments de la troisième colonne ne sont pas tous nuls on trouvera les nombres p, q, α, β. S'ils sont tous nuls, on pourra mettre le polynome sous la forme d'une quatrième puissance plus une constante.

Résolution de l'équation du 4e degré. — De
$$p(x+\alpha)^4 + q(x+\beta)^4 = 0,$$
nous déduisons
$$\left(\frac{x+\alpha}{x+\beta}\right)^4 - \left(-\frac{q}{p}\right) = 0 :$$
posons $\frac{x+\alpha}{x+\beta} = z$; nous aurons à résoudre l'équation
$$z^4 - \left(-\frac{q}{p}\right) = 0. \tag{6}$$

Il suffit de déterminer un angle ω et un nombre ρ positif de façon que $-\frac{q}{p} = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$, et les racines de l'équation (6) seront fournies par la formule
$$z = \sqrt[4]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\omega}{4} + i\sin\frac{2k\pi+\omega}{4}\right),$$
dans laquelle on donne à k successivement les quatre valeurs 0, 1, 2, 3.

Nous aurons donc successivement
$$z_1 = \sqrt[4]{\rho}\left(\cos\frac{\omega}{4} + i\sin\frac{\omega}{4}\right), \qquad z_2 = \sqrt[4]{\rho}\left(-\sin\frac{\omega}{4} + i\cos\frac{\omega}{4}\right),$$
$$z_3 = \sqrt[4]{\rho}\left[-\cos\frac{\omega}{4} - i\sin\frac{\omega}{4}\right], \qquad z_4 = \sqrt[4]{\rho}\left[\sin\frac{\omega}{4} - i\cos\frac{\omega}{4}\right].$$

Soit z l'une de ces valeurs ; nous avons posé
$$\frac{x+\alpha}{x+\beta} = z,$$
par suite,
$$x = \frac{\beta z - \alpha}{1 - z}.$$

Les racines de l'équation du quatrième degré sont donc
$$x_1 = \frac{\beta z_1 - \alpha}{1 - z_1}, \qquad x_2 = \frac{\beta z_2 - \alpha}{1 - z_2}, \qquad x_3 = \frac{\beta z_3 - \alpha}{1 - z_3}, \qquad x_4 = \frac{\beta z_4 - \alpha}{1 - z_4}.$$

Dans le cas où le premier membre se mettrait sous la forme d'une quatrième puissance exacte plus une constante, la résolution serait évidemment la même. Les formules donnant les valeurs de x seraient un peu plus simples.

J. MARCHAL.

Bonnes solutions : MM. P. Thonet, E. N. Barisien.
Solutions satisfaisantes : MM. J. Haag, lycée de Nancy ; H. Jansen, Châlons-sur-Marne.

1102. — *Discuter la fonction*

$$y = x^n + 1 - x - \frac{1}{x}.$$

Nous supposerons que n représente un nombre *entier*, positif ou négatif.

Examinons d'abord quelques cas particuliers fort simples.

Pour $n = 0$, l'équation s'écrit

$$y = 2 - x - \frac{1}{x};$$

elle représente une hyperbole qu'on peut construire en ajoutant aux ordonnées de la droite $y = 2 - x$ la quantité $-\frac{1}{x}$. On voit ainsi que la courbe admet pour asymptotes les droites $y = 2 - x$, $x = 0$ et qu'elle est tangente à Ox au point A qui a pour abscisse 1. Il en résulte que la fonction a un minimum, $y = 4$ pour $x = -1$ et un maximum, $y = 0$, pour $x = 1$ (*fig.* 1).

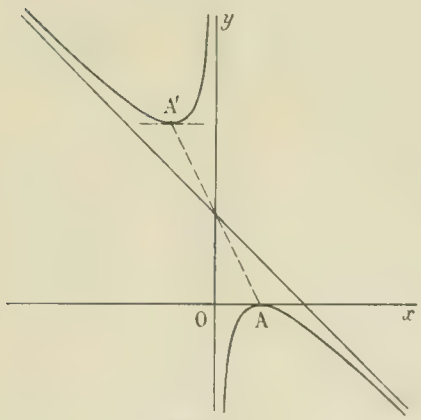


Fig. 1

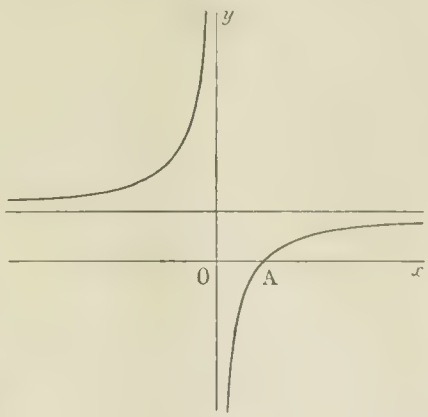


Fig. 2.

Faisons maintenant $n = 1$, nous obtenons l'équation

$$y = 1 - \frac{1}{x},$$

qui représente une hyperbole ayant pour asymptotes les droites $y = 1$, $x = 0$ et passant par le point A (*fig.* 2).

Enfin pour $n = -1$, l'équation représente une droite. Dans ces deux derniers cas la fonction n'a ni maximum ni minimum.

Cela posé, nous diviserons la discussion en deux parties, selon que n est positif ou négatif, et en valeur absolue au moins égal à 2.

Premier cas. — *n entier positif.* La fonction est continue pour toutes les valeurs de x, excepté pour $x = 0$. La dérivée est

$$y' = nx^{n-1} - 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{nx^{n+1} - x^2 + 1}{x^2};$$

elle a le signe du polynome

$$f(x) = nx^{n+1} - x^2 + 1.$$

Pour étudier le signe de ce polynome, il faut connaître les racines ; nous lui appliquerons le théorème de Rolle. Sa dérivée est

$$f'(x) = x\,n(n+1)x^{n-1} - 2;$$

elle admet la racine zéro et les racines de l'équation binome $n(n+1)x^{n-1} - 2 = 0$, et celle-ci a une ou deux racines réelles selon que n est pair ou impair. Nous sommes ainsi conduit à faire une hypothèse sur la parité de n.

1° *n pair.* La dérivée $f'(x)$ admet les racines 0 et $\sqrt[n-1]{\frac{2}{n(n+1)}}$, et la suite de Rolle est

$$-\infty \qquad 0 \qquad \sqrt[n-1]{\frac{2}{n(n+1)}} \qquad +\infty.$$

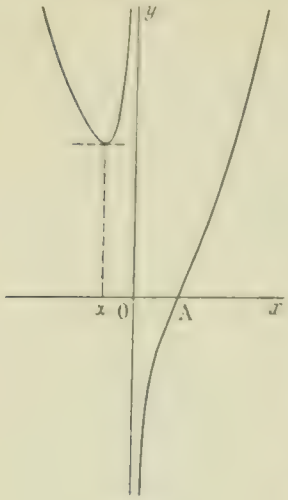


Fig. 3.

$f(-\infty)$ est négatif; $f(0)$ et $f(+\infty)$ sont positifs. La quantité $\sqrt[n-1]{\frac{2}{n(n+1)}}$ étant plus petite que 1 rend positif le polynome $f(x)$.

Il en résulte que ce polynome a une seule racine réelle négative α. Quand x est plus petit que α, $f(x)$ et par suite y' est négatif, et la fonction y décroît; quand x est supérieur à α, y' est positif et la fonction y croît. La variation de y est représentée par le tableau

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
y	$+\infty$	décroît	*min.*	croît $+\infty$	$-\infty$	croît	$+\infty$

et par la courbe ci-contre (*fig.* 3).

Le minimum de y est positif, car on voit sur l'équation que y est positif pour toute valeur négative de x. Le point A où la courbe rencontre Ox a pour abscisse 1.

2° *n impair.* — Dans ce cas $f'(x)$ admet trois racines réelles, 0 et $\pm\sqrt[n-1]{\frac{2}{n(n+1)}}$, et la suite de Rolle est

$$-\infty \qquad -\sqrt[n-1]{\frac{2}{n(n+1)}} \qquad 0 \qquad +\sqrt[n-1]{\frac{2}{n(n+1)}} \qquad +\infty.$$

Il est aisé de voir que tous ces nombres rendent $f(x)$ positif; par suite y' est toujours positif et y est une fonction croissante.

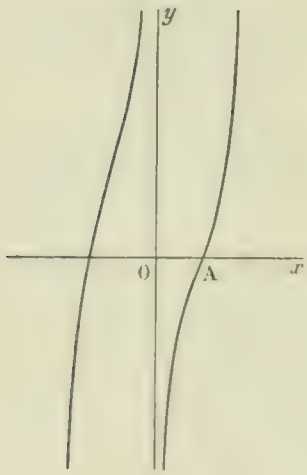


Fig. 4.

On a alors le tableau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	croît	$+\infty$ $-\infty$	croît	$+\infty$

et la courbe ci-contre (*fig.* 4).

Dans ces deux dernières courbes les branches infinies qui correspondent aux valeurs infiniment grandes de x sont paraboliques dans la direction Oy. Ces branches sont asymptotes à la courbe $y = x^n + 1 - x$.

Deuxième cas. — *n entier négatif.* Posons $n = -p$, p désignant un entier positif, nous avons alors

$$y = \frac{1}{x^p} + 1 - x - \frac{1}{x}.$$

On voit immédiatement que la courbe admet comme asymptote la droite $y_1 = 1 - x$ et que le signe de la différence $y - y_1$ pour des valeurs de n suffisamment grandes est celui de $-\frac{1}{x}$. Cette différence est de signe contraire à x, ce qui nous donne la disposition ci-contre (*fig.* 5).

De plus cette asymptote rencontre la courbe au point A ($x = 1$, $y = 0$) pour toute valeur de p et en outre au point A ($x = -1$, $y = 2$) si p est impair.

Fig. 5.

La dérivée de y est

$$y' = -\frac{p}{x^{p+1}} + 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^{p+1} + x^{p+1} - p}{x^{p+1}}.$$

Considérons le polynome

$$f(x) = -x^{p+1} + x^{p+1} - p,$$

et étudions ses racines au moyen du théorème de Rolle. Il a pour dérivée

$$f'(x) = x^{p-1}[-(p+1)x^2 + p - 1]$$

qui admet les racines 0 et $\pm\sqrt{\frac{p-1}{p+1}}$.

On peut observer tout de suite que les résultats de substitution des nombres $\pm\sqrt{\frac{p-1}{p+1}}$ dans $f(x)$ sont négatifs. En effet on peut substituer dans la dérivée par rapport à une variable d'homogénéité qui est ici $2x^{p+1} - p(p+1)$; $\frac{p(p+1)}{2}$ étant supérieur à 1 et x plus petit que 1, cette dernière est négative.

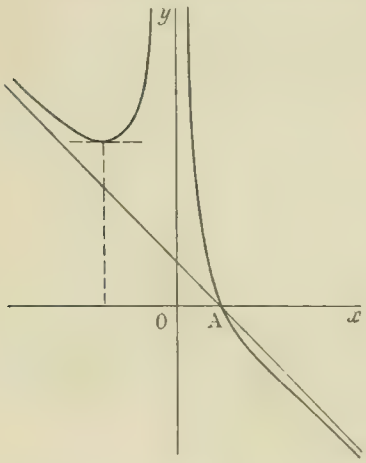


Fig. 6.

Deux cas sont à distinguer selon la parité de p.

1° *p pair*. La suite de Rolle est

$$-\infty \qquad -\sqrt{\frac{p-1}{p+1}} \qquad 0 \qquad +\sqrt{\frac{p-1}{p+1}} \qquad +\infty\ ;$$

les signes des résultats de substitution sont respectivement

$$+ \qquad - \qquad - \qquad - \qquad -\ ;$$

par suite $f(x)$ admet une seule racine réelle négative, α. Remarquons en outre que y' a même signe que $f(x)$ si x est positif et un signe contraire si x est négatif. On obtient ainsi le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$	
y	$+\infty$	décr.	*min.*	cr.	$+\infty \mid +\infty$	décr.	$-\infty$

et la courbe ci-contre (*fig.* 6).

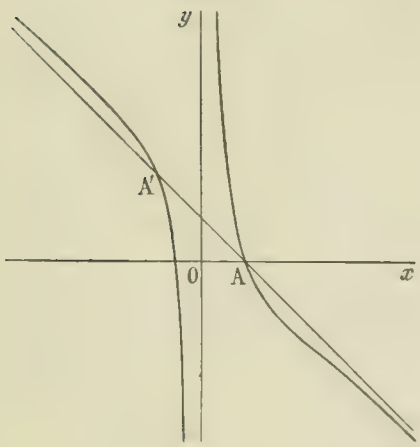


Fig. 7

2° *p impair*. On voit aisément que $f(x)$ n'a aucune racine réelle, par suite y' est constamment négative, et la fonction y est sans cesse décroissante :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	décroît	$-\infty \mid +\infty$	décroît	$-\infty$.

On obtient la courbe ci-jointe (*fig.* 7).

J. HAAG, lycée de Nancy.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1103. — *On considère une conique variable qui touche une droite fixe* (D) *en un point fixe* A *et qui admet un foyer fixe* (F). *On demande :*

1° *Le lieu de l'autre foyer, le lieu du centre et le lieu du point de contact de la seconde tangente parallèle à la droite* (D) ;

2° *Le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point* A *sur l'axe non focal de la conique et le lieu du point de contact d'une tangente perpendiculaire à la droite* (D) ;

3° *L'enveloppe de l'axe radical du cercle qui passe aux foyers et au point* A *et du cercle directeur ayant pour centre le point* F.

Prenons la droite (D) pour axe des x et la perpendiculaire à cette droite au point A pour axe des y, et désignons par a, b les coordonnées du foyer fixe F, par r la distance AF.

L'équation de la conique variable est

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(ux+vy+w)^2=0;$$

en écrivant qu'elle passe à l'origine, nous avons $w^2=a^2+b^2=r^2$, par suite, $w=+r$; mais la fonction $ux+vy+w$ ne figurant que sous un signe carré, nous pouvons choisir le signe d'un de ses coefficients, nous pouvons donc prendre $w=+r$. Annulons encore le coefficient de x afin d'exprimer que la tangente à l'origine est l'axe des x, nous aurons $u+wr=0$, c'est-à-dire $u=-\frac{a}{r}$, et l'équation générale des coniques indiquées sera finalement

$$(x-a)^2+(y-b)^2-\left(-\frac{ax}{r}+vy+r\right)^2=0,$$

v étant un paramètre variable.

1. Les équations du centre sont

$$x-a=-\frac{a}{r}\left(-\frac{ax}{r}+vy+r\right),\qquad y-b=v\left(-\frac{ax}{r}+vy+r\right);$$

elles donnent $v=-\frac{a}{r}\,\frac{y-b}{x-a}$ et il n'y a plus qu'à porter cette valeur de v, dans la première équation par exemple, pour avoir le lieu du centre. Nous trouvons ainsi

$$b^2x(x-a)-a^2y(y-b)=0,$$

ou

$$b^2x^2-a^2y^2-ab(bx-ay)=0;$$

cette équation se décompose en deux :

$$bx-ay=0,\qquad \text{et}\qquad bx+ay-ab=0.$$

La première est un lieu impropre, elle correspond à la valeur $v=-\frac{b}{r}$ pour laquelle la conique se réduit à deux droites confondues $(bx-ay)^2=0$; la seconde donne le véritable lieu, elle représente une droite qui passe au milieu de AF et qui fait le même angle que AF avec la droite (D), mais en sens contraire.

Soient alors x, y les coordonnées du centre, α, β celles du foyer variable ; nous aurons $2x=a+\alpha$, $2y=b+\beta$, et, en remplaçant x et y par ces valeurs dans les équations du centre,

$$\alpha-a=-\frac{a}{r}\left[-\frac{a}{r}(a+\alpha)+v(b+\beta)+2r\right],$$

$$\beta-b=v\left[-\frac{a}{r}(a+\alpha)+v(b+\beta)+2r\right];$$

par conséquent nous déduisons de là $v=-\frac{a}{r}\,\frac{\beta-b}{\alpha-a}$, et il nous suffit de porter cette valeur, dans la première équation par exemple, pour avoir le lieu du second foyer ; nous trouvons ainsi

$$b^2\alpha^2-a^2\beta^2=0,$$

équation qui se décompose en deux autres,

$$b\alpha-a\beta=0,\qquad \text{et}\qquad b\alpha+a\beta=0.$$

La première représente un lieu impropre, qui correspond à la valeur $v=-\frac{b}{r}$, pour laquelle la conique se réduit à deux droites confondues ; la seconde est le véritable lieu ; elle représente une droite passant à l'origine, la symétrique de la droite AF par rapport à la droite (D).

Nous aurons enfin le lieu du point de contact de la tangente parallèle à la droite (D) en prenant le diamètre conjugué de la direction Ox et en éliminant le paramètre v entre son équation et celle de la conique. Or le diamètre conjugué de Ox a pour équation $f'_x=0$, ou $x-a+\frac{a}{r}P=0$, en posant $P=-\frac{ax}{r}+vy+r$; il n'y a donc qu'à remplacer P par $-\frac{r}{a}(x-a)$ dans l'équation de la conique pour avoir le lieu demandé. Cela nous donne immédiatement

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{r^2}{a^2}(x-a)^2,$$

ou
$$a^2(y-b)^2=(r^2-a^2)(x-a)^2;$$

comme $r^2-a^2=b^2$, nous avons finalement

$$b^2(x-a)^2-a^2(y-b)^2=0,$$

qui se décompose en deux :

$$b(x-a)-a(y-b)=0, \qquad \text{ou} \qquad bx-ay=0,$$

et
$$b(x-a)+a(y-b)=0.$$

La première équation correspond encore au cas où la conique du faisceau se réduit à une droite double ; la seconde donne le vrai lieu : c'est une droite qui passe au point F et qui est parallèle au lieu des centres.

2. L'axe non focal est parallèle à la directrice et passe par le centre ; nous aurons donc son équation en prenant les deux équations du centre :

$$x-a+\frac{a}{r}\mathrm{P}=0,$$

$$y-b-v\mathrm{P}=0,$$

et formant avec elles une combinaison linéaire qui représente une droite parallèle à la droite $\mathrm{P}=0$; pour cela, il nous suffit de multiplier les deux équations par $-\frac{a}{r}$, v, et de les ajouter : nous obtenons ainsi

$$\mathrm{P}-r+\frac{a^2}{r}-bv-\mathrm{P}\left(\frac{a^2}{r^2}+v^2\right)=0,$$

ou
$$\mathrm{P}\left(\frac{b^2}{r^2}-v^2\right)-b\left(\frac{b}{r}+v\right)=0.$$

Cette équation contient en facteur $\frac{b}{r}+v$, ce qui était à prévoir, car, pour $v=-\frac{b}{r}$, elle doit représenter une droite indéterminée ; en supprimant ce facteur, nous obtenons pour équation de l'axe non focal

$$\mathrm{P}\left(\frac{b}{r}-v\right)-b=0.$$

La perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite a pour équation $vx+\frac{a}{r}y=0$, elle donne $v=-\frac{a}{r}\frac{y}{x}$, et il n'y a plus qu'à remplacer v par cette valeur dans l'autre équation pour obtenir le lieu demandé ; nous avons de cette façon

$$(ay+bx)(x^2+y^2)-r^2xy=0,$$

équation qui représente une cubique circulaire ayant un point double à l'origine avec deux tangentes rectangulaires $x=0$, $y=0$. Le lieu est donc une strophoïde.

Quant au lieu du point de contact d'une tangente perpendiculaire à Ox, nous l'obtiendrons en prenant le diamètre conjugué de la direction Oy, $f'_y=0$, et en éliminant v entre son équation et celle de la conique. Or $f'_y=0$ nous donne

$$y-b=v\mathrm{P};$$

l'élimination de P nous conduit à

$$v^2=\frac{(y-b)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

et il suffit de porter cette valeur de v dans l'équation précédente pour obtenir le lieu demandé. Nous trouvons ainsi une équation du quatrième degré :

$$\left(\frac{ax}{r}-r\right)^2(x-a)^2+(y-b)^2=(x-a)^2-b(y-b)^2.$$

qui se décompose en la droite $bx - ay = 0$ et la cubique

$$b(x-a)+a(y-b)(x^2+y^2-2r^2)x-a(y-b)=0.$$

Cette dernière équation représente le véritable lieu.

3. Le cercle passant aux foyers F, F' et au point A est un cercle du faisceau déterminé par les points A et F : en prenant comme cercles de base le cercle décrit sur AF comme diamètre et la droite AF, l'équation de ce cercle est donc

$$x(x-a)+y(y-b)+2\lambda(bx-ay)=0.$$

La droite $x=-a\mu$, $y=b\mu$ le rencontre en un point dont le paramètre μ est donné par l'équation

$$(a^2+b^2)\mu-4ab\lambda+a^2-b^2=0,$$

et les coordonnées du second foyer sont alors $-a\mu$, $b\mu$.

Le cercle directeur ayant pour centre le point F a pour équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2-\rho^2=0;$$

nous déterminerons le rayon ρ en exprimant qu'il passe au point $-a\mu$, $-b\mu$, symétrique de F' par rapport à la droite (D) ; ce calcul nous donne

$$\rho^2=(a^2+b^2)(1+\mu)^2.$$

L'axe radical des deux cercles s'obtient en égalant les deux valeurs de $x(x-a)+y(y-b)$ tirées des équations des deux cercles ; nous trouvons ainsi

$$ax+by+2\lambda(bx-ay)+(a^2+b^2)(\mu^2+2\mu)=0.$$

Or la relation entre λ et μ nous donne aussi

$$2\lambda=\frac{(a^2+b^2)\mu+a^2-b^2}{2ab};$$

l'équation de l'axe radical s'exprime alors uniquement en fonction de μ, et l'enveloppe de cette droite s'obtient en exprimant que cette équation, où x et y sont regardés comme connus, a une racine double en μ, ce qui fournit le résultat

$$(a^2-b^2)(bx-ay)+4ab(a^2+b^2)^2-8ab(a^2+b^2)(3a^2bx+3ab^2y-b^3x-a^3y)=0.$$

L'enveloppe est donc une parabole.

Remarque. — La première partie est évidente géométriquement : elle découle des propriétés les plus simples des coniques et de la définition de l'homothétie. Quant à la première moitié de la seconde partie elle s'aperçoit aussi immédiatement : l'axe non focal est la perpendiculaire à l'axe focal menée par le centre; or celui-ci décrit une droite Δ et l'axe focal pivote autour du point F; l'enveloppe de l'axe non focal est donc une parabole ayant pour foyer le point F et pour tangente au sommet la droite Δ. Le lieu demandé est la podaire de cette parabole par rapport à un point de la directrice, ce qui explique pourquoi ce lieu est une strophoïde.

Bonnes solutions : MM. P. Thonet; R. Bouvaist.
Solution satisfaisante : M. J. Haag, lycée de Nancy.

QUESTIONS PROPOSÉES

1146. — Le lieu des centres des coniques normales à deux droites données en un point donné de chacune de ces droites est une droite.

E.-N. Barisien.

1147. — Le lieu des foyers des coniques normales à deux droites parallèles en un point donné de chacune de ces droites est une hyperbole équilatère.

E.-N. Barisien.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

IMP. DU DUC, IMP. COMTE-JACQUET.

TABLE DES MATIÈRES

ANNÉES 1900-1901 ET 1901-1902

Nos des questions. — ALGÈBRE — Pages.

915 Relations entre des nombres de combinaisons. 24

1065 Série dont le terme général est

$$\log n\left[\frac{1}{n^p}-\frac{1}{(n+1)^p}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 421$$

925 Résolution d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues 48

965 Trouver un polynome entier $f(x)$ tel que la dérivée de $e^x f(x)$ soit $e^x(x-1)(x-2)$ . . 146

1102 Variations de la fonction

$$y = x^n + 1 - x - \frac{1}{x} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 587$$

978 Calculer la fonction $\Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2$ pour une équation du troisième degré 281

994 Toute équation du troisième degré peut se mettre de trois façons sous la forme

$$(x-\alpha)(x-\beta)^2 = h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 293$$

997 α, β, γ désignant les racines d'une équation du troisième degré, calculer un trinome $\theta(x)$ du second degré tel que l'on ait

$$\theta(\alpha) = \beta, \quad \theta(\beta) = \gamma, \quad \theta(\gamma) = \alpha$$

ou $\theta(\alpha) = \gamma, \quad \theta(\beta) = \alpha, \quad \theta(\gamma) = \beta$ . . . 299

1000 Trouver les équations du troisième degré telles que si l'on désigne par α et β les racines de la dérivée par rapport à x, la dérivée par rapport à la variable d'homogénéité prenne pour $x = \alpha$ et $x = \beta$ les valeurs 3β et 3α 321

941 Résolution d'une équation du quatrième degré 117

904 Étant donnée une équation du quatrième degré $f(x) = 0$, condition pour que $f(y+h) = 0$ soit réciproque pour trois valeurs de h. 3

939 Résoudre une équation du quatrième degré sachant que les dérivées première et troisième ont une racine commune. 99

950 Équation du quatrième degré qui a deux racines imaginaires conjuguées de module 1 117

1094 Condition pour qu'un polynome du quatrième degré puisse être mis sous la forme $(px+\alpha)^4 + (qx+\beta)^4$ 584

GÉOMETRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS

886 Lieu du centre d'un cercle orthogonal à un cercle C et passant par les extrémites d'une corde d'un cercle C', vue du centre de C sous un angle droit. 5

920 Sur les cercles inscrits et ex-inscrits à un triangle 30

924 Exercices sur un quadrilatère formé par les tangentes menées des extrémités d'un diamètre d'un cercle O à un cercle O' ayant son centre sur le cercle O. 62

930, 1016 Lieux géométriques relatifs à des cercles variables 77, 382

937 Cercles orthogonaux; lieux et enveloppes . 165

976 Surface d'un parallélogramme connaissant les équations des côtés 220

990 A, B, C étant des points fixes, par B et C on fait passer un cercle variable qui rencontre AB et AC en B' et C'. Lieu du pôle de B'C' par rapport au cercle. 294

995 Lieu et enveloppe relatifs à un cercle fixe . 295

1021 Lieu des points de concours des tangentes communes à deux cercles quand l'un d'eux reste fixe et que l'autre varie en passant par deux points fixes. 387

1045 Dans un triangle ABC, la base BC est fixe et le centre I du cercle inscrit est tel que $\overline{IA}^2 = IB.IC$. Lieu de A et de I 390

1036 Trouver un point ayant mêmes coordonnées par rapport à deux systèmes d'axes . . . 391

1037 Lieu et enveloppe relatifs à deux cercles tangents dont les centres sont fixes. 395

1080 Triangle ABC dont la base BC est fixe et dans lequel on a $m \operatorname{tg} B + n \operatorname{tg} C = k$. . 492

1095 Triangle dans lequel une bissectrice est constante en grandeur et en position et où la différence de deux angles est constante. . 563

929, 966 Exercices sur une cardioïde 74, 169

Sur les ovales de Descartes 279

913 La différence des carrés des segments interceptés sur deux diamètres conjugués d'une hyperbole équilatère par tout cercle ayant son centre sur l'hyperbole est constante. 5

901 Lieux et enveloppes relatifs à une parabole de grandeur constante tangente à deux droites rectangulaires. 25

911 Exercices sur des coniques tangentes à Oy, ayant un centre donné et traçant sur Ox une involution dont on connaît les points doubles 35

916 Lieux et enveloppes relatifs à des coniques inscrites dans un triangle et passant par un point. 38

918 La polaire de tout point d'une conique C par rapport à un triangle inscrit à C et circonscrit à une autre cônique C' passe par un point fixe 43, 85

914 Correspondance entre deux points; lieu de l'un d'eux quand l'autre décrit une droite. 50

926, 921 Exercices sur une parabole donnée 53, 71

923 Coniques bitangentes à une ellipse et ayant un axe donné; exercices et lieux 59

928 Lieux des centres et des sommets des triangles équilatéraux conjugués à une ellipse. 68

934 Exercices sur les tangentes issues d'un point à deux coniques. 93

936 Le cercle circonscrit à un triangle variable inscrit dans une conique et circonscrit à une autre reste orthogonal à un cercle fixe et son centre décrit une conique . . 96

922 Lieu du pôle et enveloppe d'une corde d'une ellipse. 100

938 Lieu des points communs à deux coniques semblables ayant un foyer fixe 101

935 Propriété de quatre tangentes à une conique 115

940 Lieux relatifs à un cercle passant par les extrémités d'un diamètre d'une hyperbole équilatère 118

948 Parabole et cercle variable passant par le sommet, exercices 137

N° des questions		Pages
970	On joint un point M variable d'une conique à deux points fixes A et B. La perpendiculaire menée en A à AM rencontre BM en P. Le lieu de P est une quartique. Discuter.	192
975	Lieu des foyers des coniques tangentes à une droite AB et admettant deux droites parallèles variables AM et BN comme tangentes aux sommets d'un même axe.	218
989, 1018	Exercices sur une parabole.	220, 372
971	Cercle variable (Γ) ayant son centre sur une droite (D) et orthogonal à un cercle (C). Enveloppe des cordes du cercle (Γ) vues du centre de (C) sous un angle droit. C'est une conique (S). Lieux relatifs à cette conique	263
	Lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans une ellipse	279
	Paraboles circonscrites à un triangle et telles que les normales aux sommets du triangle soient concourantes.	279
980	La normale en un point M d'une conique à centre rencontre en I l'axe non focal. Démontrer que $\frac{IF}{IM}$ est égal à l'excentricité (F, foyer)	282
973	Par un point P de l'axe focal d'une conique (S) on mène deux cordes rectangulaires AB, CD et on considère la conique (S') passant par A, B, C, D et tangente à la tangente en un sommet de l'axe focal de (S). Propriétés de cette conique (S')	282
992	Exercices relatifs aux tangentes issues d'un point à deux coniques.	301
993	Lieux relatifs aux coniques circonscrites à un triangle rectangle.	303
1014	Problèmes relatifs à une ellipse et à une hyperbole ayant mêmes axes	323
999	Lieu des sommets des coniques d'un faisceau ponctuel.	333
998	Sur les groupes de quatre points concycliques d'une ellipse	341
1001	Paraboles tangentes en O à Ox et dont les directrices enveloppent une hyperbole rapportée à ses axes. Lieu des foyers. Autres lieux	344
1009	Lieux des centres, sommets, foyers des hyperboles équilatères qui ont leurs directions asymptotiques données et qui coupent un cercle donné en des points dont trois soient les sommets d'un triangle équilatéral.	347
979	Exercices sur les paraboles tangentes aux axes d'une ellipse.	358
1002, 1010	Problèmes relatifs à une ellipse.	362, 370
1025	Construction d'une parabole tangente à deux droites données en des points donnés. Généralisation	369
1035	Exercices relatifs aux hyperboles équilatères tangentes en O à Ox et ayant leurs centres sur la droite $x = a$	374
1012	Si un triangle varie en restant inscrit à une conique et circonscrit à une autre conique, le cercle qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les côtés du triangle reste orthogonal à un cercle fixe	379
1017	P, Q, R pieds des normales menées à une ellipse par un point M de la courbe. Exercices sur le cercle circonscrit au triangle PQR	384
1044	Sur les paraboles bitangentes à un cercle.	394
1061	Triangles inscrits dans une ellipse et tels que leur centre de gravité soit au centre.	422
1062	Lieu des foyers des coniques normales aux quatre côtés d'un rectangle	423
1030	Deux paraboles de sommets fixes et de paramètres constants varient de façon que leurs quatre points communs soient sur un même cercle. Lieu du centre de ce cercle.	433
1066	Lieu des foyers des hyperboles équilatères qui passent par un point fixe et admettent une droite donnée comme axe transverse	444
1069	La tangente en un point M d'une parabole rencontre la directrice en T. Lieu du symétrique de T par rapport à M et du symétrique de M par rapport à T	466
1042	Étude d'un réseau de cubiques	485
1043	Exercices relatifs à deux coniques ayant mêmes directions asymptotiques	503
1082	Lieu du sommet A d'un triangle ABC dont la base BC est fixe et dont le cercle conjugué a un rayon constant	509
1070	Lieu du point de contact d'une conique ayant des foyers donnés et d'un cercle dont le centre est fixe.	519
1052	Coniques inscrites à un triangle équilatéral et passant par son centre de gravité. Lieu du point de concours des droites joignant les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés.	528
1090	Parabole P et cercle C ayant son centre au sommet de P. Lieu du point de rencontre d'une tangente à C et de la tangente à P qui lui est perpendiculaire	542
1097	Démontrer que sept droites sont tangentes à une conique	552
1064	Exercices sur les normales menées d'un point à une conique	553
1068	Une droite Δ est rencontrée par une série d'hyperboles semblables et par leurs asymptotes en quatre points fixes. Propriétés.	555
1081	Paraboles passant par deux points et tangentes à une droite. Lieux divers	563
1071	Lieu des points par où passent deux paraboles égales circonscrites à un triangle rectangle isocèle.	577
1083	Podaire de la parabole $(ax + by)^2 - 4ab\,bx + ay + 4a^2b^2 = 0$. Lieux relatifs à cette podaire	579
1103	Coniques ayant un foyer donné et tangentes en un point donné à une droite donnée. Lieux et enveloppes.	589

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

N° des questions		Pages
917	Quadriques circonscrites à deux quadriques qui se coupent suivant deux courbes planes.	41
927	Lieu du sommet d'un cône coupant une quadrique suivant deux cercles, l'un fixe et l'autre variable	66
951	Lieux géométriques de sommets de cônes ayant pour directrices une section centrale d'un ellipsoïde	147
958	Enveloppe de la surface $Ax - pz + By - qz + C = -z^2 = M$.	186
947	Lieu des cordes AB d'une quadrique qui passent par un point O et telles que $\frac{OA}{OB} = k$	206
967	Exercices sur un ellipsoïde : points correspondants.	212

Nos des questions. Pages.

957 Exercices relatifs à trois cercles situés dans des plans différents. 228
968 Exercices sur des quadriques variables ayant une direction asymptotique donnée, circonscrites à une quadrique fixe et telles que le plan de contact passe par un point donné 251
972 Lieu des sommets des tétraèdres circonscrits à une quadrique donnée et tels que chacune des hauteurs soit la normale au point de contact de la face correspondante . . . 255
991 Sur les tétraèdres circonscrits à une quadrique (Q) et tels que les perpendiculaires abaissées des sommets sur leurs plans polaires soient concourantes. 334
1020 Les quadriques conjuguées par rapport à deux couples de droites données ont en général quatre droites communes 357
1003 Lieu des foyers des paraboles sections d'un cylindre parabolique par des plans passant par une normale au cylindre 364
1011 Complexe des droites D telles que le point de rencontre de D et d'un plan P soit le pied de la perpendiculaire commune à D et à une droite donnée zz' 365
1019 Etude d'un conoïde 373
1013 Exercices sur une sphère variable. 379
1031 Condition pour que les droites conjuguées d'une même droite par rapport à une sphère et un paraboloïde se rencontrent. Propriétés de ces droites. 418
1051 Lieux relatifs à une droite mobile s'appuyant sur deux droites et tangente à une sphère. 506
1067 Exercices relatifs à un hyperboloïde à une nappe et à son cône asymptote. 529
1063 Paraboloïdes circonscrits à une sphère passant par un point et coupant un plan suivant des ellipses dont les axes ont des directions données. Lieu des sommets et des foyers 574

PHYSIQUE ET CHIMIE

919 Exercice sur le pendule. 6
996 Si on fait tourner un système de deux miroirs plans angulaires autour de leur intersection, les images d'ordre pair restent immobiles. 248
969 Exercices sur la lunette astronomique. . . 285
1004 Exercices d'optique sur un ballon sphérique vide placé entre deux glaces planes et parallèles 305
974 Calcul de la puissance et du grossissement d'un microscope 368
1034 Exercice de calorimétrie 582

NOTES ET COMMUNICATIONS

Sur les tables trigonométriques centésimales, par M. P. Barbarin 449
Notions sur les fonctions hyperboliques, par M. P. Barbarin 153
Résolution de l'équation $x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0$, par M. Cosandey 356
Sur l'équation aux six rapports anharmoniques, par M. Lelieuvre 129
Démonstration du théorème de Poncelet sur les polygones inscrits dans une conique et circonscrits à une autre, par M. E. Cahen. 1
Rectification à cette note, par M. E. Cahen. . . . 58
Sur les fausses solutions du problème de Poncelet pour deux coniques quelconques, par M. G. Fontené. 105
Sur le théorème de Poncelet, par M. Mathieu Weill. 201
Correspondances sur coniques. Extension des polygones de Poncelet, par M. G. Fontené. . . . 545
Sur des applications de la théorie des enveloppes, par M. H. Michel 82
Sur l'hexagone de Pascal, par M. J. Thèbes. . . 84
Sur le faisceau des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle, par M. O 106
Sur l'hyperbole équilatère, par M. Lanet 156
Sur quelques applications des transformations quadratiques involutives, par M. E. Duporcq . 177
Sur la relation entre les coefficients de l'équation en λ de deux coniques, l'une inscrite et l'autre circonscrite à un même triangle, par M. E. Duporcq 249
Sur les coniques inscrites dans un triangle, par M. Oppermann 250
Sur certaines relations involutives, par M. Lelieuvre. 297
Sur les triangles conjugués à une conique, par M. V. Jamet 331
Lieux géométriques, par M. E. Humbert 401
Note sur les invariants ponctuels et tangentiels, par M. J. Sire 425, 454, 476
Sur deux coniques ayant en commun un point connu par M. G. Fontené 497
Note de géométrie, par M. E. Legrand 497
Sur une application de la théorie des réseaux, par M. H. M. 499
Note sur les coniques, par M. Georges Monnet . 526
Paramètre tangentiel d'un cône du second ordre par M. G. Fontené. 33
Note sur une propriété des génératrices d'une quadrique, par M. Th. Leconte. 57
Sur les lieux de foyers de certains réseaux de coniques ou de quadriques, par M. B. Cluzeau . 81
Conjuguées d'une droite par rapport aux quadriques qui passent par deux droites fixes, par M. L. Bickart. 178
Sur les points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône ou d'un cylindre, par M. Spinnler. 225
Propriétés du parallélépipède construit sur trois génératrices de même système d'un hyperboloïde à une nappe, par M. G. P. 329
Note sur les réseaux de quadriques, par M. L. Bickart 353
Détermination des axes d'une section plane d'une quadrique, par M. G. Halley des Fontaines . . 378
Condition pour qu'il existe un tétraèdre inscrit dans une quadrique et circonscrit à une autre, par M. A. Bourgonnier 525
Rotations dans un plan, par M. L. Bickart. . . . 569
Théorie de la balance, par M. G. Fontené. . . . 234
Réflexion et réfraction d'un faisceau lumineux sur une surface sphérique, par M. Ch. Rivière. 473
Théorie des lentilles épaisses, par M. S. Bloch. . 521
Sur le nouveau programme d'admission à l'école centrale 287

BIBLIOGRAPHIE

Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure, par H. Andoyer. . . 104
Eléments de la théorie des nombres, par E. Cahen. 104

EXAMENS ET CONCOURS

Agrégation des Sciences Mathématiques.

1900. . . . . 156.
1901. . . . . 260, 461.
1902. . . . . 558.

Concours général de Mathématiques spéciales.

1896. . . . . Mathématiques. 377.
1900. . . . . Mathématiques. 85.
Physique. . . . 91.
1901. . . . . Mathématiques. 216, 479.
Physique . . . 217, 458.
Chimie. . . . . 217, 460.
1902. . . . . Mathématiques. 531.
Physique. . . . 532.
Chimie. . . . . 532.

Bourses de Licence.

Mathématiques. 1900. . . . . 161.
1901. . . . . 261, 500.
1902. . . . . 559.
Sciences Physiques . . . 1900. . . . . 164.
1901. . . . . 261, 502, 503.
1902. . . . . 559.

Concours généraux de Belgique.

Athenées. . . 1900. . . . . 176.

ÉCOLES

Ecole Normale Supérieure.

1900 . . . . . 132.
1901 . . . . . 237, 262, 410.
1902 . . . . . 534, 560.

Ecole Polytechnique.

1900 . . . . . 107, 188.
1901 . . . . . 236, 273, 431.
1902 . . . . . 533.

Ecole Centrale.

1899. 2e session . . . . 79.
1900. 1re session . . . . 120, 140, 195.
2e » . . . . 54, 223, 289, 325, 399.
1901. 1re session . . . . 271, 272, 436, 468.
2e » . . . . 349, 535.
1902. 1re » . . . . 566.

Ecole des Ponts et Chaussées.

Cours préparatoires. 1900. 56, 247, 268.
1901. 351, 561.
Cours spéciaux. . . 1900. 46, 215.
1901. 342.

Ecole des Mines de Saint-Etienne.

1889 . . . . . 31.
1900 . . . . . 126, 239.
1901 . . . . . 375, 512.

EXAMENS ORAUX

Ecole Normale Supérieure.

1900 . . . . . 190.
1901 . . . . . 489, 511.

Ecole Polytechnique.

1900 . . . . . 7.
1901 . . . . . 307.

Ecole Centrale.

1900 . . . . . 149, 172, 197.
1901 . . . . . 445, 470, 494.

NOMS D'AUTEURS

A. (X.), 492.
ABRAHAM, 491.
ANDOYER, 104.
ANDRE (D.), 48.
B. (E.), 279.
BALABAN, 103, 120, 165, 200.
BARBARIN, 153, 449.
BARISIEN (E.-N.), 5, 56, 80, 103, 152, 218, 224, 247, 248, 292, 328, 346, 363, 368, 369, 371, 375, 376, 387, 400, 444, 544, 520, 592.
BICKART (L.), 98, 160, 178, 191, 233, 341, 353, 358, 492, 569.
BLOCH (S.), 521.
BOUJU (G.), 296.
BOURGONNIER (A.), 525.
BOUVAIST (R.), 381, 475, 520, 563.
C. (N.), 146, 190, 244, 400, 470, 516.
CAHEN (E.), 1, 58, 104.
CANS, 38, 41, 101, 140, 266, 285, 346, 349, 369, 508.
CEDRIC Sauvageon, 513.
CELZIAT (B.), 81, 99.
COMBETTE, 149, 152, 445, 446, 448.
CORDIER (R.), 248.
COSANDEY (M.), 356.
DRACH, 301.
DUFAUT (J.-D.), 29, 73, 79, 144, 164, 367.
DULIMBERT (G.), 116, 134, 577.
DUPORCQ (E.), 177, 191, 192, 249, 262, 364, 390, 466, 560, 584.
ELGHOZI (R.), 433.
F. (G.), 391.
F. A. G., 64.
FAUVERNIER (G.), 282, 323, 424, 374, 467, 531.
FONTAINE (G.), 52.
FONTENÉ (G.), 33, 105, 234, 497, 545, 584.
DE FRANCE (G.), 118, 149.
FRÉCHET (M.), 135.
GALBRUN, 85.
GIROD (J.), 200.
GOUILLY, 172, 470.
GROLLEAU (C.), 377.
GUERITHAULT, 279, 364.
GUITTON, 98.
H. (E.), 48, 71, 80, 103, 104, 140, 165, 217, 239, 262, 287, 301, 321, 344, 376, 400, 466, 472, 496, 544, 568.
H. (M.), 390.
HAAG (J.), 445, 544, 589.
HALLEY des FONTAINES (G.), 378.
HUMBERT (E.), 401.
JAMET (V.), 331.
JOLY (A.), 91.
L. (P.), 126, 242, 270, 439, 440, 442, 538, 540, 562.
LANET (M.), 156.
LAPOINTE (G.), 85.
LAURENCE (M.), 395, 397, 417, 423, 424, 494, 503, 518, 541.
LECONTE (Th.), 57.
LEGRAND (E.), 497.
LELIEUVRE, 129, 297.
LENOIR, 435.
LEVI, 197, 198, 494, 495
M. (H.), 499.
MARCHAL (J.), 220, 248, 295, 305, 374, 394, 397, 420, 434, 488, 502, 553, 581, 586.
MICHEL (H.), 82, 334.
MONNET (G.), 526.
NEGRE (P.), 566.
O. (M.), 106, 128, 217.
D'OCAGNE (M.), 435, 535.
ODOU (L.), 515, 520.
OLLIER, 512.
OPPERMANN, 250.
P. (G.), 329.
PEGORIER (F.), 5.
PELLAT (H.-G.), 458.
PELVOISIN, 31, 49, 54, 76, 103, 117.
PUIG (P.), 116, 140.
RAFFY, 490.
REBEIX (M.), 420, 553, 560.
RIVIERE (Ch.), 473.
ROUYER, 23, 260.
SAINTIN (P.), 224.
SIRE (J.), 425, 454, 476.
SOULS, 223, 424.
SPINNLER, 225.
TANNERY (J.), 489.
THEBES (J.), 84.
THELLIER de la NEUVILLE (P.), 460.
THONET (P.), 223.
TRIBIER (P.), 99, 146, 195, 296, 325, 369, 420, 424, 510, 544.
VALOT (P.), 239, 506.
VASNIER, 6, 23, 48, 53, 54, 66, 71, 74, 101, 115, 169, 191, 215, 248, 255, 268, 284, 287, 295, 303, 321, 341, 342, 344, 360, 362, 371, 390, 423, 435, 496, 529, 555, 557, 579, 583.
WEILL (M.), 201.

QA
1
R486
année 11-
12

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY